

*Firenze, 31 Agosto-4 Settembre 1992*

UN'ANALISI DI ALCUNI FENOMENI IDROLOGICI A SCALA DI BACINO  
MEDIANTE L'USO DEL CONCETTO DI ENTROPIA

Mauro Fiorentino, Pierluigi Claps

*Dipartimento di Ingegneria e Fisica dell'Ambiente, Università della Basilicata, Potenza*

**SOMMARIO**

I legami tra le principali caratteristiche delle reti di drenaggio naturali vengono teoricamente derivati mediante l'uso del principio di massima entropia. Viene mostrato che i fenomeni idrologici dissipativi che avvengono alla scala di bacino tendono a rispettare, in media, principi di minima ed uniforme dissipazione di energia potenziale. Le leggi di variazione spaziale con l'area del bacino, della pendenza dell'asta terminale, della lunghezza dell'asta principale e della dissipazione di energia potenziale per unità di lunghezza, vengono legate all'inverso della dimensione frattale del reticolo idrografico.

**ABSTRACT**

Theoretical relationships between the main planimetric and altimetric characteristics of river networks are herein derived. Dissipative hydrological phenomena which act at a basin scale, are shown to obey, in average, the minimum and uniform potential energy dissipation criteria. Scaling properties with the drainage area, of channel slope and length as well as of energy dissipation per unit length of the channel are shown to depend upon the reciprocal of the channel network fractal dimension.

**INTRODUZIONE**

Molti problemi idrologici, tipici della scala di bacino idrografico, vengono affrontati, in assenza di osservazioni dirette della grandezza di interesse, con metodologie alquanto empiriche, principalmente basate su tecniche di regressione più o meno concettualmente giustificate. Si citi ad esempio la stima della portata media annua, del valore atteso della massima piena annuale o della quantità media di sedimenti trasportati dalla corrente fluviale. Eppure appare oggi evidente (si veda ad esempio, Rodriguez-Iturbe et al., 1992a) che i fenomeni idrologici in questione debbano rispondere, in analogia con altri fenomeni naturali, a leggi fisiche generali che ne spieghino il comportamento in base a poche grandezze climatiche e morfologiche che controllano i bilanci di energia in un bacino idrografico.

Un sistema idrografico è un sistema fisico, aperto e dissipativo, nel quale viene introdotta energia, in maniera disuniforme nel tempo e nello spazio, per mezzo delle precipitazioni. In esso, ad ogni variazione di energia, è legata, almeno in linea di principio, una variazione di entropia, sebbene non sia immediato, in questo caso, definire una funzione di entropia. Definita questa funzione però, è lecito ipotizzare, in analogia con altri fenomeni fisici naturali, che i fenomeni idrologici debbano rispondere a principi di minima produzione di entropia (o di minima dissipazione di energia) e che lo stato del sistema nel quale questi fenomeni avvengono, debba essere tale che, in media, l'entropia del sistema sia massima nel rispetto dei vincoli fisici imposti.

Lo stato del sistema, infine, dovrebbe essere tale da far sì che i fenomeni dissipativi che su di esso avvengono, siano distribuiti, in media, il più uniformemente possibile nel sistema stesso.

Scopo del presente articolo è quello di dimostrare, mediante l'uso della funzione di entropia informativa introdotta da Fiorentino e Claps (1992), che la configurazione plano-altimetrica dei reticoli idrografici rispetta il principio di massima entropia e che alcuni fenomeni idrologici che in essi avvengono rispondono a criteri di minima ed uniforme dissipazione di energia potenziale.

Le relazioni derivate teoricamente in questo lavoro sono state verificate con riferimento ad 8 bacini della Puglia settentrionale per i quali si dispone del modello digitale del terreno, realizzato nell'ambito del sistema informativo dei bacini idrografici pugliesi (Copertino et al. 1990). Le caratteristiche principali di questi bacini sono riportate in tabella 1.

Tabella 1. Caratteristiche principali di alcuni bacini idrografici pugliesi.

#	Bacino	Area (Km <sup>2</sup> )	Densità di Drenaggio (km <sup>-1</sup> )	L. asta Pr. (Km)	Magnitud. (m)	H <sub>L</sub> (m)	E (m)	Diam. Topol.	Ordine	R <sub>B</sub>	R <sub>L</sub>
1	Arcidiaconata	123.9	2.24	23.04	254	657	301	50	5	4.12	2.39
2	Lapilloso	28.5	2.34	11.56	72	394	229	36	4	4.34	2.28
3	Vulgano	94.1	2.08	22.08	193	663	370	37	5	3.79	2.26
4	S.Maria	58.1	2.26	15.53	159	226	144	48	5	3.72	2.57
5	Salsola	44.1	2.24	14.21	100	513	270	31	5	3.28	2.29
6	Casanova	57.3	2.20	15.79	123	524	290	26	5	3.44	2.55
7	Celone S.V	92.5	2.07	27.59	181	715	362	42	5	3.83	2.73
8	Celone a P.F	233.5	1.55	48.61	292	861	405	53	5	4.1	2.74

## ENTROPIA E STRUTTURA PLANIMETRICA DELLE RETI TOPOLOGICHE

### Entropia informativa e primaria delle reti topologiche

Una rete di drenaggio fluviale può essere pensata come una struttura costituita da M elementi (*links*) identificati ognuno come l'asta fluviale a monte della giunzione. La configurazione della struttura è data dal modo in cui gli elementi si dispongono in diversi stati  $d = (1, 2, \dots, D)$  rappresentati dalla *distanza topologica*, del nodo di monte del link, dalla sezione di chiusura della rete. Per distanza topologica s'intende il numero links consecutivi interposti tra il punto considerato e l'uscita della rete. Si dirà anche che un link allo stato  $d$  è al *livello topologico*  $d$  (si vedano gli schemi di fig. 1). Il numero totale di stati corrisponde al *diametro topologico*  $D$  della rete, massimo valore che  $d$  può assumere. Si definisce *funzione di larghezza topologica*  $W(d)$ , l'andamento della frequenza  $p_d$  dei links al livello topologico  $d$ .

Florentino e Claps (1992) hanno definito l'*entropia informativa* della rete topologica fluviale, che chiameremo  $S$ , come:

$$(1) \quad S = - \sum_{d=1}^D p_d \ln p_d$$

L'entropia così come definita dalla (1) corrisponde alla definizione data da Shannon (1948) in teoria dell'informazione. Questa misura viene riguardata in generale come un indice di incertezza di un processo casuale.  $S$  è massimo in condizioni di massima incertezza, corrispondente alla massima uniformità delle probabilità. In condizioni di minima entropia ( $S=0$ ),

anche l'incertezza è minima, in quanto tutti gli *eventi*  $d$  hanno probabilità nulla tranne uno che, essendo certo, ha probabilità 1. Fiorentino et al. (1992) hanno mostrato il legame esistente tra entropia informativa, il concetto di entropia derivato dalla meccanica statistica e l'entropia termodinamica di un sistema. Così come espressa nell'equazione (1), l'entropia può essere massimizzata rispetto a diversi tipi di vincolo, in ordine all'ottenimento della distribuzione delle  $p_d$ , con la minima distorsione rispetto all'informazione connessa ai vincoli. Ad esempio, è possibile dimostrare che, scegliendo come vincoli le medie di  $d$  e  $\ln d$ , la massimizzazione della  $S$  conduce ad una distribuzione di tipo gamma per  $p_d$  (Singh et al., 1986).

Definiamo *entropia primaria* della rete topologica,  $S$ , il massimo valore incondizionato di  $S$ , massimo cioè con rispetto al solo vincolo banale

$$(2) \quad \sum_{d=1}^D p_d = 1;$$

massimizzando, si ottiene  $p_d = 1/D$ ,  $d = 1, 2, \dots, D$ , che fornisce

$$(3) \quad S = \ln D$$

Le reti fluviali non sono di fatto così regolari da presentare lo stesso numero di links ad ogni livello topologico, per cui la condizione (3) non è mai vera a rigore. Tuttavia, principalmente a causa dell'appiattimento presentato dalla funzione di entropia intorno al suo massimo,  $S$  fornisce in molti casi una buona approssimazione del valore di  $S$ , così che  $\ln D$  può essere assunto talvolta come uno stimatore efficiente dell'entropia informativa della rete fluviale.

### Entropia ed evoluzione delle reti ad albero

Si consideri una rete ordinata secondo lo schema di Horton-Strahler, con ordine massimo pari ad  $\Omega$ . Un ramo di ordine  $\omega$ ,  $2 \leq \omega \leq \Omega$ , è definito come la sequenza di links di ordine  $\omega$  il cui ultimo link si unisce con un link di ordine  $\omega' \geq \omega$  o risulta essere il link terminale. Siano  $R_B$  e  $R_L$  rispettivamente il rapporto di biforcazione ed il rapporto delle lunghezze:  $R_B = N(\omega-1; \Omega) / N(\omega; \Omega)$ ;  $R_L = L(\omega; \Omega) / L(\omega-1; \Omega)$ , dove  $N(\omega; \Omega)$  è il numero di rami di ordine  $\omega$  nella rete di ordine  $\Omega$  ed  $L(\omega; \Omega)$  è la relativa lunghezza media.

Rinaldo et al. (1991) hanno mostrato che la varianza dei tempi di arrivo delle particelle d'acqua alla sezione terminale, cioè il momento del secondo ordine dell'IUH, dipende da un fattore di *dispersione geomorfologica*, che è funzione delle sole caratteristiche geometriche e topologiche della rete. Allo scopo di esemplificare come l'entropia possa essere considerata un indice di incertezza connesso alla configurazione topologica della rete e, in analogia, al suo IUH, verranno adoperate configurazioni ideali di reti topologiche (fig. 1).

La prima configurazione ideale è quella di una rete con funzione di larghezza uniforme (fig. 1.a) che, come si è detto, è quella che fornisce la massima entropia incondizionata. Nella configurazione a cui ci si riferisce, la magnitudine è pari a  $D$  e l'ordine Hortoniano è indipendente da  $D$  e pari a 2. Al crescere del diametro topologico  $D$  crescono sia il rapporto di biforcazione  $R_B$ , pari a  $D$ , che l'entropia dell'intera rete, che tende molto velocemente a  $\ln D$ . La funzione di larghezza di questa rete è praticamente rettangolare e quindi avrà ordinata pari a  $2/D$  ed ampiezza pari a  $D$ . Tale configurazione, in quanto quella corrispondente al massimo di entropia presenta il massimo grado di incertezza, concetto che può, ad esempio, essere legato alla posizione del suo picco, che qui è indeterminato. Il secondo caso considerato è relativo alla configurazione della rete costruita in modo tale che sia  $R_B=2$  (fig. 1.b). In questo caso, che è anch'esso poco rappresentativo dell'effettiva forma dei reticoli idrografici, si verifica la circostanza che l'ordine di Horton cresce di pari passo con il livello topologico. La funzione di

larghezza di questa rete ideale ha andamento definito dalla legge  $W(d) = 2^{(d-1)}/(2^D - 1)$  che ha il suo picco alla massima distanza (D) dalla sezione terminale. Risultando elevata la probabilità di avere il picco di  $W(d)$  in corrispondenza di una certa posizione, l'entropia della rete risulta piuttosto bassa e poco dipendente dall'ordine della rete.

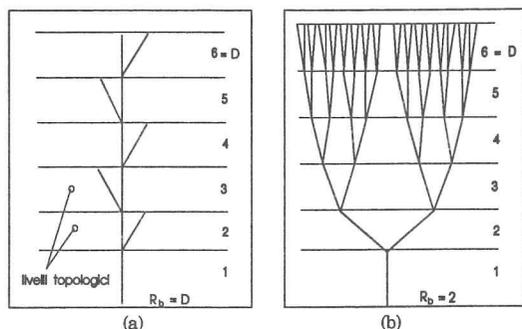


Fig. 1. Rappresentazione schematica di reti topologiche sintetiche: (a)  $R_B = R_L = D, \Omega = \text{cost.} = 2$ ; (b)  $R_B = 2, R_L = 1, \Omega = D$ .

L'espressione dell'entropia informativa per tale rete, detto N il numero complessivo di links (pari a  $2^D - 1$ ), è

$$(4) \quad S = - \left[ \frac{2^{D-1}}{N} \ln \frac{2^{D-1}}{N} + \frac{2^{D-2}}{N} \ln \frac{2^{D-2}}{N} + \dots + \frac{2^{D-D}}{N} \ln \frac{2^{D-D}}{N} \right]$$

Al crescere di D, l'entropia così definita tende ad un valore costante. Questa configurazione, a parità di ordine, o magnitudine, o diametro topologico, ha entropia molto più bassa rispetto al caso precedente.

Entrambi i casi esaminati corrispondono a configurazioni di reticoli che molto difficilmente si ritrovano in natura, sebbene tutte le reti idrografiche hanno configurazioni comprese tra questi due casi estremi. Le reti di drenaggio naturali presentano infatti rapporti medi di biforcazione  $R_B$  che vanno da 3 a 5. Ci si deve pertanto attendere che l'entropia informativa dei reticoli naturali assuma, per assegnato ordine, valori compresi nella zona delimitata dalle curve relative ai casi (a) e (b). L'elevata rarità sia del caso (a) che del caso (b) mostra che il criterio di massima entropia da solo non basta a spiegare il processo evolutivo dei reticoli naturali. Sembra, piuttosto, sebbene le entropie informative dei reticoli naturali siano prossime a quelle primarie (cioè massime), che le reti idrografiche nella loro evoluzione rispondano anche ad un criterio di minima produzione di entropia, così come, tra l'altro, intuito da Leopold e Langbein (1962). Infatti, il caso (a), sebbene in ogni stadio della sua evoluzione ha il massimo valore possibile di entropia, tende a crescere col massimo gradiente (infinito) di entropia rispetto all'ordine Hortoniano. Al contrario, nel caso (b) la crescita avviene con il minimo di produzione di entropia, ma la configurazione del reticolo in ogni stadio ha entropia minima. Valutazioni effettuate su alcune reti naturali hanno mostrato (Fiorentino e Claps, 1992) l'esistenza di una relazione sensibilmente lineare tra entropia informativa e ordine Hortoniano. Ciò si verifica per reti

frattali ottenute dalla moltiplicazione di una struttura elementare di ordine 2, in cui la relazione entropia ordine Hortoniano è del tipo (v. Appendice):

$$(5) \quad S_\Omega = c (\Omega - 1)$$

nella quale c è l'entropia della struttura elementare.

In fig. 2, vengono riportati gli andamenti delle relazioni  $S(\Omega)$  per le due reti sintetiche e per 8 reticoli di bacini idrografici Pugliesi. Si può osservare che le rette di miglior adattamento relative alle reti naturali si dispongono su di una fascia abbastanza ristretta, con c della (5) variabile tra 0.84 e 1.08, con media 0.95. Nella stessa figura è anche riportata l'andamento relativo alla rete di Peano (schema di fig. 6.c), per la quale  $c=0.562$  (v. Appendice).

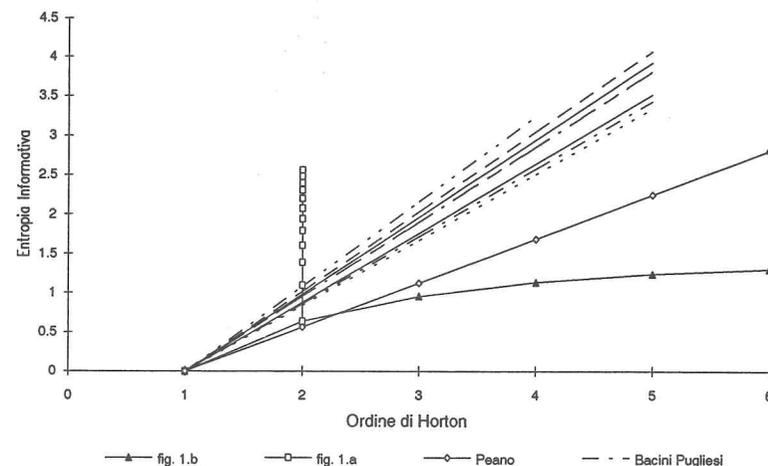


Fig. 2. Entropia informativa di reti topologiche sintetiche ed entropia informativa osservata per alcuni reticoli fluviali reali in funzione dell'ordine Hortoniano. Per la rete rappresentata in fig (1.a), non variando l'ordine durante l'evoluzione, i punti sono rappresentativi dell'aumento di diametro topologico.

La magnitudine n, cioè il numero di aste del primo ordine (o sorgenti) è una caratteristica fondamentale dei reticoli idrografici, essendo strettamente connessa all'area del bacino. La relazione che definisce il rapporto di biforcazione di Horton conduce ad un legame tra il numero totale di links, M, ed ordine espresso da  $M = 2n - 1 = R_B^{\Omega - 1}$ , che consente di mettere n in relazione con l'entropia informativa per mezzo della (5). Si ha infatti, confondendo  $2n - 1$  con  $2n$ ,

$$(6) \quad S = c \frac{\ln 2}{\ln R_B} + \frac{c}{\ln R_B} \ln n$$

La (6) è stata verificata sui sottobacini afferenti ad ogni link dell'asta principale dei bacini in indagine, stimando  $c$  dalla (5) e utilizzando il valore stimato di  $R_B$ . In fig. 3 si riporta, a titolo di esempio, il risultato relativo al bacino dell'Arcidiaconata ( $c=0.92$ ,  $R_B=4.12$ ).

Stimando  $S$  mediante l'entropia primaria  $S = \ln D$ , la (6) spiega un'importante caratteristica di scala delle lunghezze dei corsi d'acqua con l'area drenata. Infatti, essa fornisce  $D \propto n^{c/\ln R_B}$  che, per gli ovvi legami tra diametro topologico e lunghezza  $L$  dell'asta principale e tra magnitudine ed area del bacino, conduce a

$$(7) \quad L \propto A^{c/\ln R_B}$$

che, nello stesso ordine di approssimazione per il quale una rete Hortoniana può essere interpretata come un oggetto frattale, conduce a (v. Appendice)

$$(8) \quad L \propto A^{\ln R_L / \ln R_B} = A^{1/F}$$

nella quale  $F$  è la dimensione frattale dei reticoli naturali, dovuta al processo di ramificazione, così come è stata definita da La Barbera e Rosso (1989). Una relazione simile alla (8) è stata ricavata da Fiorentino e Claps (1992) con altro procedimento. Per  $F=1.75$ , valore più probabile per una rete di dimensione frattale totale pari a 2 (Tarboton et al., 1990) risulta  $1/F=0.57$ , pari al valor medio osservato da Gray (1961) in un gran numero di bacini idrografici.

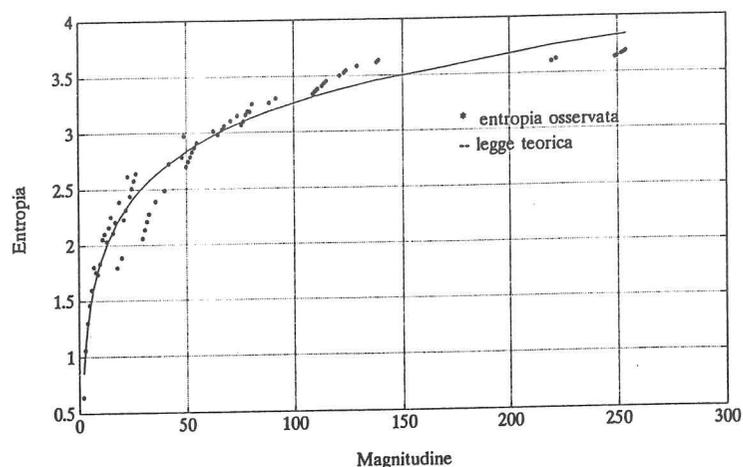


Fig. 3. Entropia informativa osservata dei sottobacini dell'Arcidiaconata a P.te Rapolla-Lavello in funzione della magnitudine e legge teorica di eq. (6).

## ENTROPIA, DISSIPAZIONE DI ENERGIA E PORTATE FLUVIALI

Le caratteristiche morfologiche peculiari dei bacini idrografici possono essere considerate in larga parte come il prodotto della dissipazione di energia che avviene durante la produzione del deflusso superficiale. Il bacino idrografico tende naturalmente a concentrare e convogliare la precipitazione, che ad esso arriva in modo diffuso, con la massima efficienza in relazione all'energia potenziale disponibile. Ciò si riflette nella conformazione altimetrica e planimetrica della rete di drenaggio, che costituisce il vettore delle portate liquide e di sedimenti che hanno, nel tempo, compiuto il lavoro di modellamento della rete stessa. Ne consegue che la configurazione attuale del reticolo idrografico contiene in sé gran parte delle informazioni sulle caratteristiche medie del processo fisico che la ha determinata. Ciò trova conferma nella regolarità mostrata, anche a fronte di situazioni geologiche completamente diverse, dalla struttura plano-altimetrica dei reticoli idrografici di tutto il mondo, una volta fissate poche caratteristiche geomorfologiche fondamentali, quali superficie e altitudine media del bacino. Anche nei confronti della variabilità rispetto a poche grandezze idrologiche fondamentali, come la portata media annua, vengono inoltre riscontrati caratteri di regolarità. Sembra, in definitiva, così come anche evidenziato da Rodriguez-Iturbe et al. (1992b), che i bacini idrografici evolvano verso uno stato regolare che funge da attrattore per un sistema naturale dinamico molto complesso.

Quanto premesso pone i sistemi idrografici in analogia con una serie di altri sistemi fisici naturali aperti, dissipativi e con immissione continua di energia dall'esterno che, a fronte di un numero grande di gradi di libertà, evolvono in base a principi fisici semplici quali quello di massima entropia, minima produzione di entropia, minima dissipazione di energia per unità di massa immessa, distribuzione spaziale uniforme della dissipazione di energia, etc.

Già circa trenta anni fa Leopold e Langbein (1962) applicarono il concetto di massima entropia per spiegare il comportamento dei corsi d'acqua, intuendo l'analogia tra il significato termodinamico di energia termica e temperatura di un sistema gassoso ed energia potenziale ed altitudine di un tronco fluviale. Più tardi, Yang (1971), utilizzando il principio di minimo tasso di produzione di entropia, ricavò la legge di riduzione dei salti di quota di rami fluviali ordinati secondo lo schema di Horton-Strahler. Più recentemente, grazie anche all'avvento dei sistemi informativi territoriali che, consentendo di gestire banche dati georeferenziate quali i modelli digitali del terreno, permettono una verifica con dati reali delle ipotesi fisiche adottate, la ricerca delle fondamentali fisiche dei processi idrologici alla scala di bacino ha trovato nuova linfa. Rodriguez-Iturbe et al. (1992a), applicando i principi di minima dissipazione di energia in ciascun link del reticolo fluviale e di uniforme dissipazione di energia per unità di area bagnata di ciascun'asta del reticolo, con riferimento a situazioni idrodinamiche medie quali quelle che si realizzano in corrispondenza della portata media annua  $Q$ , hanno spiegato alcune leggi empiriche, fortemente confortate dai dati reali, quali la dipendenza dalla portata, della larghezza media  $B$  della corrente, del tirante idrico  $h$  e dell'energia potenziale  $P$  dissipata per unità di lunghezza. Le leggi ricavate, di tipo di potenza, mostrano che queste grandezze variano da tronco a tronco del reticolo con la radice quadrata della portata, con coefficienti ovviamente diversi tra loro, ma costanti su tutto il bacino.

Il riconoscimento di una struttura frattale bi- e tridimensionale dei reticoli idrografici (La Barbera e Rosso, 1989; Gupta e Waymire, 1989; Tarboton et al., 1989; Rosso et al., 1991; Marani et al., 1991), significativo del fatto che i sistemi fluviali tendono ad organizzarsi verso uno stato di criticalità, indipendente dalla scala delle lunghezze, con rispetto al quale avvengono i processi di dissipazione di energia, ha consentito a Rodriguez-Iturbe et al. (1992b) di giustificare la straordinaria regolarità osservata della distribuzione spaziale delle portate e delle potenze dei vari links di un reticolo fluviale. Nel loro articolo le distribuzioni ricavate sono, per la portata,  $Prob(Q>q) \propto q^{-0.45}$  e, per la potenza (portata per pendenza locale),  $Prob(P>p) \propto p^{-0.9}$ , entrambe in ottimo accordo con i dati reali di alcuni bacini americani, che mostrano valori dei coefficienti molto stabili e rispettivamente pari, in media, a 0.43 e 0.92. Il concetto di entropia informativa

dei reticoli idrografici, come si è visto nel precedente capitolo, spiega e precisa alcuni dei risultati sopra menzionati.

In questo capitolo viene introdotto il concetto di entropia termodinamica dei reticoli idrografici che, come si vedrà, consente di spiegare, mediante l'applicazione del principio di massima entropia, i legami esistenti tra la struttura planimetrica e le caratteristiche altimetriche dei reticoli. Lo stesso principio consentirà di precisare la legge di variabilità, da link a link, della dissipazione di energia per unità di lunghezza con la portata. Legge che, unitamente al principio di distribuzione uniforme della dissipazione di energia potenziale, conduce ad una precisazione delle leggi di distribuzione spaziale delle portate e delle potenze.

### Entropia termodinamica delle reti idrografiche.

Nella dinamica di una rete idrografica, il ruolo dominante è esercitato dall'energia potenziale che viene immessa nel sistema fluviale mediante le precipitazioni. Tale energia è proporzionale alla superficie ed all'altitudine media del bacino. L'entropia informativa di un reticolo idrografico può essere massimizzata, con rispetto ai vincoli imposti da queste due grandezze morfometriche fondamentali, imponendo che  $S$ , così come definita dalla (1), sia massima sotto le assunzioni

$$(9) \quad \sum_{i=1}^D p_i = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^D p_i E_i = E$$

nelle quali le  $E_i$  ( $i=1, \dots, D$ ) sono le quote medie dei nodi del reticolo a distanza topologica  $i$  dalla sezione di chiusura ed  $E$  è l'altitudine media dei nodi del reticolo che, con buona approssimazione, rappresenta l'altitudine media del bacino idrografico. Sia  $E_i$  che  $E$  sono considerate riferite al nodo di monte del link terminale. Le  $p_i$ , che come detto rappresentano la percentuale di links al livello topologico  $i$ , sono qui assunte come una stima della porzione di area del bacino idrografico avente quota media  $E_i$ . La massimizzazione della (1), sotto il rispetto dei vincoli di equazione (9), fornisce

$$(10) \quad p_i = e^{-\lambda E_i} / \sum_{i=1}^D e^{-\lambda E_i}$$

nella quale  $\lambda$  è un moltiplicatore di Lagrange dato dalla relazione

$$(11) \quad E = \sum_{i=1}^D E_i e^{-\lambda E_i} / \sum_{i=1}^D e^{-\lambda E_i}$$

La (10) è, per inciso, la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Ponendo  $\lambda$  proporzionale a  $1/T$ , dove  $T$  è una grandezza fisica funzione crescente di  $E$ , che potremmo chiamare *temperatura* (degenerata) del reticolo topologico, la (10) evidenzia l'analogia tra un bacino idrografico ed un sistema termodinamico. E' possibile pertanto definire *entropia termodinamica*  $\delta$  del reticolo idrografico il massimo valore dell'entropia informativa  $S$  soggetto ai vincoli di equazione (9). La sostituzione della (11) nella (1) fornisce

$$(12) \quad \delta = \lambda E + \ln \sum_{i=1}^D e^{-\lambda E_i}$$

che indica una relazione lineare tra entropia termodinamica ed altitudine media della rete idrografica.

### Distribuzione spaziale dell'energia potenziale

Per un qualsiasi nodo  $j$  del reticolo ( $j=1, 2, \dots, 2n-1$ ) è possibile scrivere

$$(13) \quad \delta_j = \lambda E_j + \ln \sum_{i=1}^{D_j} e^{-\lambda E_i}$$

nella quale  $\delta_j$ ,  $E_j$  e  $D_j$  sono rispettivamente l'entropia termodinamica, l'altitudine media ed il diametro topologico del sottoreticolo avente sezione di chiusura al nodo  $j$ . Fiorentino et al. (1992) hanno mostrato che  $\lambda$  può essere ritenuto, in prima approssimazione, costante per l'intero sistema idrografico, e può essere pertanto definito con le seguenti condizioni ai limiti: (a) per le aste del primo ordine si ha  $E=0$  e, per la (1),  $\delta=0$ ; (b) per l'asta terminale si ha  $\delta_j=\delta$  e  $E_j=E$ . Ne consegue

$$(14) \quad E_j = E \delta_j / \delta$$

In luogo delle entropie termodinamiche è anche possibile utilizzare, in prima approssimazione, le entropie informative. Infatti, sebbene queste ultime siano sempre maggiori delle prime, il rapporto che compare nella (14) è poco affetto dalle differenze tra le due. In luogo della (14) è quindi possibile scrivere

$$(15) \quad E_j = \frac{E}{\ln D} \ln D_j$$

che consente una più immediata verifica con dati ricavati da reticoli idrografici reali. Il buon adattamento della (15) è mostrato in figura (4) in cui si riporta l'andamento altitudine media - diametro topologico per i sottoreticoli del Vulcano con nodo di chiusura giacente sull'asta principale.

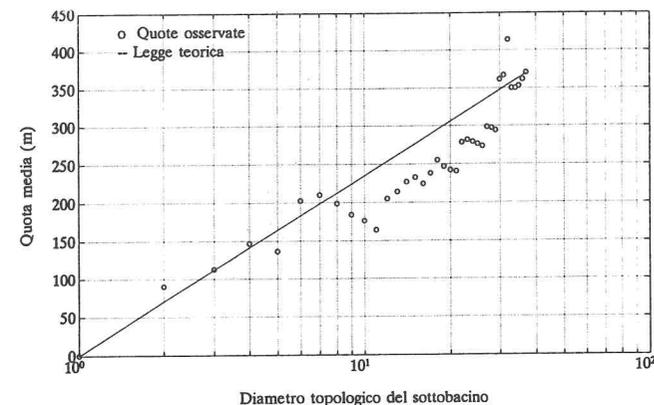


Fig. 4. Variabilità della altitudine media (rispetto alla propria sezione di chiusura) dei sottoreticoli del Vulcano con nodo terminale appartenente all'asta principale, in funzione del diametro topologico del sottoreticolo.

**Profili altimetrici dei corsi d'acqua**

L'equazione del profilo longitudinale di un percorso idrografico è stata derivata da Fiorentino e Claps (1992) in base al principio di massima entropia, seguendo il procedimento che ha condotto alla (15) ed ipotizzando che il massimo salto  $H_d$  tra la quota della sorgente e la quota del nodo di uscita di un sottoreticolo di diametro topologico  $d$  sia legato, in media, all'altitudine media  $E_d$  dello stesso, secondo una relazione lineare. Una più ampia discussione su questo argomento è riportata in Fiorentino et al. (1992).

L'equazione fornita per il profilo, in termini di distanza topologica è

$$(16) \quad Y_\delta = Y_0 - \frac{H_D}{\ln D} \ln \delta ; \quad \delta \geq 1$$

nella quale  $Y_0$  è la quota della sorgente,  $Y_\delta$  è la quota del nodo alla distanza topologica  $\delta$  dalla sorgente,  $H_D$  e  $D$  sono rispettivamente il salto complessivo ed il diametro topologico dell'asta principale del reticolo. Il buon adattamento della (16) è stato mostrato da Fiorentino e Claps (1992).

Una relazione analoga alla (16) applicabile con l'uso delle lunghezze reali in luogo di quelle topologiche è

$$(17) \quad Y_l = Y_0 - \frac{H_L}{\ln(1+L/\varepsilon)} \ln(1+ l/\varepsilon)$$

nella quale  $L$  ed  $H_L$  sono la lunghezza reale ed il salto totale dell'asta principale del bacino,  $l$  è la distanza reale misurata dal punto a quota  $Y_l$  a partire da monte, ed  $\varepsilon$  è una scala caratteristica delle lunghezze che eguaglia, in media, la lunghezza media dei links del reticolo. E' lecito attendersi, però che, lungo un singolo percorso,  $\varepsilon$  possa oscillare intorno al suo valore medio.

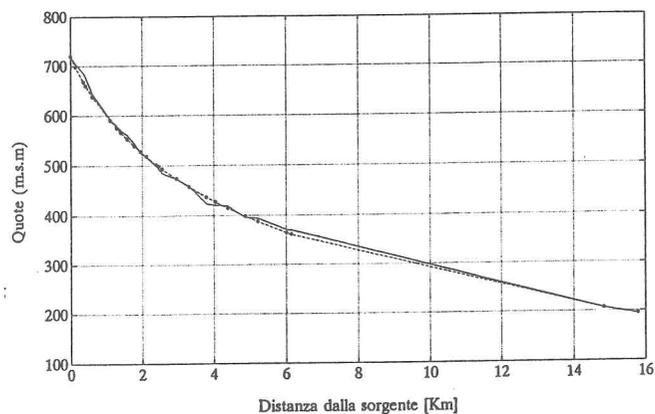


Fig.5. Profilo altimetrico dell'asta principale del bacino del Casanova. (-\*-) legge teorica di eq. (17) ( $\varepsilon = 1.2$  Km); (—) profilo osservato.

Ulteriori indagini, che esulano dallo scopo di questo lavoro, sono necessarie per comprendere il legame, tra l'altro intuibile, di  $\varepsilon$  con la varianza delle lunghezze dei links. In fig. (5) si nota la buona capacità interpretativa della (17) rispetto al profilo dell'asta principale del Casanova.

La (17) unitamente alla (8) permette di derivare un'importante caratteristica di variabilità delle pendenze locali  $s$  dei corsi d'acqua rispetto all'area  $A$  del bacino idrografico di monte. Infatti, essendo  $s = dY_l/dl \propto 1/l$ , per la (8) si ha

$$(18) \quad s \propto A^{-1/F}$$

Per  $F=1.75$  l'esponente della (18) diventa  $-0.57$ , in eccellente accordo con il valore medio di  $-0.60$  ottenuto da Flint (1974). Per l'usuale campo di variabilità di  $F$ , tra 1.3 e 2, l'esponente della (18) varia tra  $-0.5$  e  $-0.77$ , congruentemente con il campo di variabilità osservato in natura.

**Variabilità spaziale delle portate e delle potenze.**

Nei precedenti paragrafi sono state ricavate teoricamente, in base al principio di massima entropia, importanti proprietà di variabilità spaziale, a scala di bacino, delle principali caratteristiche altimetriche e planimetriche dei sottoreticoli idrografici. In particolare, sono state precisate le leggi di variabilità della lunghezza dell'asta principale e della pendenza locale dell'asta terminale con l'area ( $L \propto A^{1/F}$  e  $s \propto A^{-1/F}$ , equazioni (8) e (18) rispettivamente). Con rispetto alla portata media annua  $Q$  è lecito assumere una relazione di proporzionalità diretta tra  $Q$  ed  $A$ , cosicché, in base alle (8) e (18), è possibile derivare teoricamente le caratteristiche di variabilità spaziale delle potenze  $P=Qs$  e delle portate. Infatti, per le (18) si ha

$$(19) \quad P = Qs \propto A^{1-1/F} \propto Q^{1-1/F}$$

Per  $F=1.75$ , valore teorico ipotizzato da Tarboton et al.(1990), la (19) conduce ad un esponente pari a  $-0.43$ , in ottimo accordo con il valore mediamente riscontrato in natura. In confronto con la relazione, ricavata in base al principio di minima dissipazione di energia fornita da Rodriguez-Iturbe et al.(1992a), (esponente pari a  $-0.5$ ), la (19) consente di legare la variabilità di  $P$  a quella della dimensione frattale  $F$ .

Il valore medio dell'energia potenziale per unità di lunghezza  $E[P]$  può essere ricavato assumendo che, all'interno di un assegnato bacino, la probabilità di trovare un sottobacino di area  $A$  ( $>0$  e  $<A$ ), maggiore di un assegnato valore  $a$  di riferimento, può essere espressa, in ottimo accordo con la realtà, come

$$(20) \quad \text{Prob}(A > a) \propto a^{-\beta}; \quad a > 0, \beta > 0.$$

La (19) e la (20) consentono di scrivere

$$(21) \quad E[P] \propto \int_0^A a^{-\beta-1/F} da \propto A^{1-\beta-1/F}$$

Il criterio di dissipazione media di energia potenziale per unità di lunghezza uniforme da sottobacino a sottobacino ( $dE[P]/dA = 0$ ), analogo a quelli usati da Yang (1971) e Rodriguez-Iturbe et al.(1992a), conduce a

$$(22) \quad \beta = 1 - 1/F.$$

Poiché si ha  $Q \propto A$ , per le (20) e (22) la probabilità che uno dei  $2n-1$  links del bacino la portata media annua sia maggiore di un valore di riferimento  $q$  è proporzionale a  $q^{1-1/F}$ . Per  $F=1.75$ , la (22) conduce a  $\beta=0.43$ , in eccellente accordo con il valore medio osservato da Rodriguez-Iturbe et al. (1992b) su sottobacini nordamericani.

Le (21) e (22) consentono anche di derivare la legge di dipendenza tra la dissipazione totale  $P_t$  di energia potenziale e l'area del bacino. Infatti, indicando con  $L_{tot}$  la lunghezza totale del reticolo idrografico, da esse si ricava

$$(23) \quad P_t = E[P] L_{tot} \propto L_{tot} \propto A$$

che, tra l'altro, trova anche conferma applicando il criterio di uniforme dissipazione di energia potenziale tra i diversi livelli topologici. Infatti, indicando con  $P_j$  l'energia potenziale totale dissipata in ogni livello topologico, ed essendo

$$(24) \quad P_t = \sum_{j=1}^D P_j$$

l'assunzione  $P_j = \text{cost.}$  conduce, in base alle (8) e (18) a

$$(25) \quad P_t \propto A^{1/F} \quad A^{-1/F} = A.$$

la quale prova anche che, nelle ipotesi fatte, la dissipazione di energia per unità di massa immessa, proporzionale a  $P_t/A$ , è costante su tutto il bacino.

## CONCLUSIONI

Dal presente lavoro possono trarsi le seguenti conclusioni:

1. L'entropia informativa dei reticoli idrografici tende ad assumere valori prossimi alla massima entropia incondizionata (entropia primaria). Nei casi reali  $S$  tende a variare linearmente con l'ordine Hortoniano  $\Omega$  del reticolo. Ciò è stato spiegato esattamente con riferimento ad alcune reti frattali. Il gradiente di variabilità di  $S$  con  $\Omega$  è circa pari, nel campo in cui ricadono le reti naturali, a  $\ln R_L$ . Nel piano  $(S, \Omega)$ , la posizione dei punti relativi ai casi reali suggerisce che l'evoluzione dei reticoli idrografici verso il massimo valore di entropia è condizionata da un criterio di minima produzione di entropia.
2. Il principio di massima entropia incondizionata spiega la relazione empirica tra lunghezza  $L$  dell'asta principale ed area  $A$  del bacino,  $L \propto A^\alpha$ , e conduce ad  $\alpha = 1/F$ , dove  $F$  è la dimensione frattale del reticolo dovuta alla sola struttura di ramificazione.
3. Il principio di massima entropia, condizionata all'altitudine media del reticolo, spiega la distribuzione spaziale delle quote medie dei sottoreticoli e fornisce un'espressione per il profilo dei corsi d'acqua. Ciò ha condotto alla derivazione teorica delle leggi di variabilità con l'area totalmente drenata, della pendenza locale  $s$  di un'asta e della potenza  $P=Qs$  della corrente, dove  $Q$  può essere pensata come la portata media annua. Le leggi derivate sono:  $s \propto A^{-\alpha}$  e  $P \propto A^{1-\alpha}$ ,  $\alpha = 1/F$ .
4. La dissipazione di energia potenziale per unità di lunghezza, media su tutto il reticolo, così come la dissipazione di energia potenziale totale per unità di massa immessa nel reticolo, può essere ritenuta, in media, costante da sottobacino a sottobacino.

5. La probabilità che un nodo del reticolo idrografico drena un'area  $A$  superiore ad un valore  $a$  di riferimento, è proporzionale ad  $a^{-\beta}$  con  $\beta = 1 - 1/F$ .

6. Il valore  $F=1.75$  fornisce i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  più prossimi a quelli medi riscontrati in letteratura.

## BIBLIOGRAFIA

- Copertino, V.A., M. Fiorentino, A.Sole and A.Valanzano (1990) Organizzazione del Sistema Informativo dei Bacini Idrografici Pugliesi (SIBIP), in F. Rossi (Ed.), *Previsione e prevenzione degli eventi idrologici estremi e loro controllo*, Linea 1. Rapporto 1989. GNDCI-CNR, Roma.
- Feder J. (1988) *Fractals*, Plenum Press, New York.
- Fiorentino, M. e P. Claps (1992). On what can be explained by the entropy of a channel network, in Singh e Fiorentino (Ed.) *Entropy and Energy Dissipation in Water Resources*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Fiorentino M., P.Claps e V.P.Singh (1992). An entropy-based morphological analysis of river-basin networks", inviato per la stampa su *Water Resources Research*.
- Flint J.J.(1974). Stream gradient as a function of order, magnitude and discharge, *Water Resources Research*, **10** (5), 969-973.
- Gray D.M. (1961). Interrelationships of watersheds characteristics, *J. Geophys. Res.*, **66**, 1215-1223.
- Gupta V.K. e E. Waymire (1989). Statistical self-similarity in river networks parametrized by elevation, *Water Resources Research*, **25** (3), 463-476.
- La Barbera, P. e R.Rosso (1989). On the fractal dimension of stream networks, *Water Resources Research*, **25** (4), 735-741.
- Leopold, L. B. e W.B. Langbein (1962). The concept of entropy in landscape evolution, *U.S. Geol. Survey Prof. Pap.* 500-A.
- Marani, A., R.Rigon e A. Rinaldo (1991). A note on fractal channel networks, *Water Resources Research*, **27** (12), 3041-3049.
- Rinaldo, A., Marani, A. e R.Rigon (1991). Geomorphological dispersion, *Water Resources Research*, **27** (4), 513-525.
- Rodriguez-Iturbe I., A.Rinaldo, R.Rigon, R.L.Bras, A.Marani e E.Ijjasz-Vasquez (1992a). Energy dissipation, runoff production and the 3-dimensional structure of river basins, *Water Resources Research*, **28** (4), 1095-1103.
- Rodriguez-Iturbe I., R.L.Bras, e E.Ijjasz-Vasquez (1992b). Power law distribution of discharge mass and energy in river basins, *Water Resources Research*, **28** (4), 1089-1093.
- Rosso R., B.Bacchi e P. La Barbera (1991). Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks, *Water Resources Research*, **27** (3), 381-387.
- Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communications, *Bell System Technol. Jour.*, vol. 27.
- Singh, V.P., A.K. Rajagopal e K. Singh (1986) Derivation of some frequency distributions using the principle of maximum entropy (POME), *Adv. Water Resources*, 9, June.
- Tarboton D.G., R.I. Bras e I. Rodriguez-Iturbe (1989). Scaling and elevations in river networks, *Water Resources Research*, **25** (9), 2037-2051.
- Tarboton, D.G., R.I. Bras e I. Rodriguez-Iturbe (1990). Comment on "On the fractal dimension of stream networks" by La Barbera, P. e R.Rosso, *Water Resources Research*, **26** (9), 2243-2244.
- Yang, C.T. (1971). Potential energy and stream morphology, *Water Resources Research*, **7** (2), 311-322.

**APPENDICE: ENTROPIA INFORMATIVA DELLE RETI FRATTALI**

Un oggetto che si riproduce identicamente a se stesso si definisce *autosimilare* e presenta natura frattale. Una rete frattale può essere costruita a partire da una struttura elementare, con un processo moltiplicativo, cioè per sostituzione di ognuno degli  $\mathcal{N}$  elementi (links) con una struttura identica a quella iniziale, riducendo di un fattore  $1/\eta$  ( $\eta < 1$ ) la lunghezza degli elementi stessi. La dimensione geometrica frattale della rete è pari a (Feder, 1988)

$$(A.1) \quad F = - \frac{\ln \mathcal{N}}{\ln \eta}$$

Nella schematizzazione Hortoniana delle reti,  $\mathcal{N}$  è in analogia con  $R_\Omega$  e  $1/\eta$  con  $R_L$ . Il numero complessivo  $M$  di elementi che risultano da  $m$  moltiplicazioni è pari a  $M = \mathcal{N}^m$ , mentre il diametro topologico diventa  $D = \Delta^m$ , dove  $\Delta$  è il diametro topologico iniziale. Poiché ogni moltiplicazione sostituisce un singolo link con una struttura, ogni link del primo ordine viene sostituito con una struttura che ha ordine Hortoniano superiore ad uno. Di conseguenza ad ogni moltiplicazione segue un incremento di ordine Hortoniano. Per i tre schemi considerati ad esempio, riprodotti in fig. 6, dei quali quello (c) corrisponde alla rete di Peano, le cui caratteristiche strutturali sono state descritte da Marani et al. (1991), si ha che l'ordine iniziale  $\Omega_0$  è pari a 2, per cui  $m = \Omega - 1$ . Nello schema (a)  $\mathcal{N} = 5$  e  $\eta = 1/3$ , nello schema (b)  $\mathcal{N} = 3$  e  $\eta = 1/2$  mentre per la rete di Peano (c)  $\mathcal{N} = 4$  e  $\eta = 1/2$ . Le dimensioni frattali delle tre reti sono, per la (A.1),  $F = 1.465$ ,  $F = 1.585$  ed  $F = 2$  per gli schemi (a), (b) e (c) rispettivamente.

Di notevole interesse per il concetto di entropia informativa di reti ottenute da processi moltiplicativi è la possibilità di ottenere una espressione ricorsiva per la funzione di larghezza in corrispondenza dell'ordine Hortoniano assunto dalla rete. Definita, a questo scopo, la funzione di larghezza come  $W_\Omega(d)$ , dove  $d$  è il livello topologico ( $d = 1, \dots, D_\Omega$ ), per le strutture frattali appena definite  $W_\Omega(d)$  si riproduce secondo il seguente criterio:  $D_\Omega$  (che, come detto, vale  $\Delta^{\Omega-1}$ ) risulta pari a  $\Delta D_{\Omega-1}$ , per cui la  $W_\Omega(d)$  è costituita da  $\Delta$  blocchi di lunghezza  $D_{\Omega-1}$ . Ognuno di questi blocchi riproduce la struttura della sequenza  $W_{\Omega-1}(d)$  moltiplicata per il numero di elementi presenti al corrispondente livello topologico della struttura elementare: la funzione di larghezza della rete di Peano è fornita da Marani et al. (1991) mentre per la rete frattale mostrata in fig. (6.a), in cui  $W_{\Omega_0}(d=1)=1$ ,  $W_{\Omega_0}(d=2)=2$ ,  $W_{\Omega_0}(d=3)=2$ , risulta

- (blocco 1)  $W_\Omega(1, \dots, D_{\Omega-1}) = W_{\Omega_0}(1) * W_{\Omega-1}(1, \dots, D_{\Omega-1}) = 1 * W_{\Omega-1}(1, \dots, D_{\Omega-1});$
- (blocco 2)  $W_\Omega(D_{\Omega-1}+1, \dots, 2 * D_{\Omega-1}) = W_{\Omega_0}(2) * W_{\Omega-1}(1, \dots, D_{\Omega-1}) = 2 * W_{\Omega-1}(1, \dots, D_{\Omega-1});$
- (blocco 3)  $W_\Omega(2 * D_{\Omega-1}+1, \dots, 3 * D_{\Omega-1}) = W_{\Omega_0}(3) * W_{\Omega-1}(1, \dots, D_{\Omega-1}) = 2 * W_{\Omega-1}(1, \dots, D_{\Omega-1});$

La funzione di entropia informativa ottenuta dalle espressioni appena riportate risulta:

$$(A.2) \quad S_\Omega = S_{\Omega-1} + \left[ - \frac{W_{\Omega_0}(1)}{\mathcal{N}} \ln \frac{W_{\Omega_0}(1)}{\mathcal{N}} - \dots - \frac{W_{\Omega_0}(\Delta)}{\mathcal{N}} \ln \frac{W_{\Omega_0}(\Delta)}{\mathcal{N}} \right]$$

La quantità in parentesi quadra non è altro che l'entropia della struttura elementare,  $S_{\Omega_0}$ , per cui, si ricava

$$(A.3) \quad S_\Omega = (\Omega - 1) S_{\Omega_0}$$

risultato valido in generale per reti frattali il cui ordine iniziale è pari a 2.

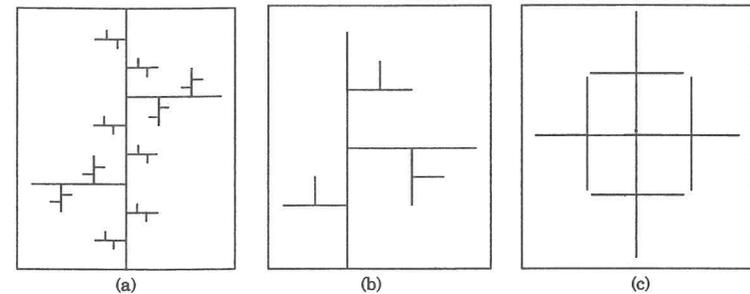


Fig. 6. Reti topologiche frattali. (a):  $\mathcal{N} = 5$ ,  $\eta = 1/3$ ,  $F = 1.465$ ; (b):  $\mathcal{N} = 3$ ,  $\eta = 1/2$ ,  $F = 1.585$ ; (c):  $\mathcal{N} = 4$ ,  $\eta = 1/2$ ,  $F = 2$  (rete di Peano);

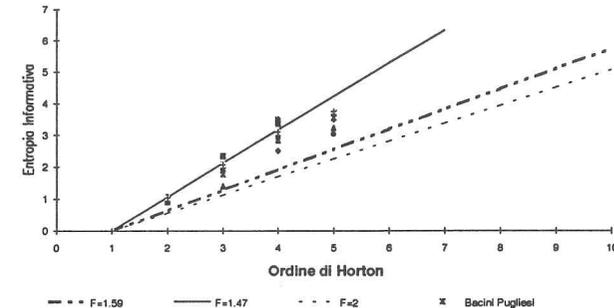


Fig. 7. Confronto tra entropie informative di alcuni reticoli fluviali reali e delle tre reti topologiche frattali considerate.

Per le tre reti frattali riportate nella figura (6), i valori di entropia della struttura elementare sono rispettivamente  $S_{\Omega_0} = 1.055$ ;  $S_{\Omega_0} = 0.637$ ;  $S_{\Omega_0} = 0.562$ . Lo schema (a) è, per inciso, tra i tre, quello che produce la curva  $(S_\Omega, \Omega)$  che meglio interpreta l'andamento entropia informativa-ordine Hortoniano per gli 8 bacini considerati in questo articolo (fig. 7).

Per gli schemi (a) e (b), più rappresentativi, rispetto allo schema (c), dei casi reali,  $S_{\Omega_0}$  è ben approssimato da  $\ln(1/\eta)$  e quindi circa uguale a  $\ln R_L$ , sicché  $S_\Omega \approx (\Omega - 1) \ln R_L$ .