

DERIVAZIONE CON APPROCCIO MECCANICO-STATISTICO DELLA RISPOSTA IDROLOGICA DI RETICOLI FRATTALI

Pierluigi Claps, Mauro Fiorentino e Giuseppe Oliveto

Dipartimento di Ingegneria e Fisica dell'Ambiente

Università degli Studi della Basilicata, Potenza

SOMMARIO

La risposta idrologica di una rete idrografica è stata qui ricavata sulla base di un approccio meccanico-statistico e nell'ipotesi che detta rete possa riguardarsi come un oggetto frattale. In ipotesi di distribuzione uniforme della lunghezza delle aste e di velocità costante e condizionando il risultato alla conoscenza della lunghezza totale invariante del reticolo idrografico, la funzione di risposta ottenuta è una legge di Weibull con parametro di forma pari alla dimensione frattale topologica D_t e con parametro di scala anch'esso funzione di D_t . Il significato idrologico di tale dimensione frattale viene così ad essere fortemente evidenziato. Il modello proposto è ben supportato dal fatto che l'applicazione di criteri generali (minimo picco, massima entropia, minimo lavoro) conducono a valori di D_t variabili fra 1.4 ed 1.6, intervallo questo riscontrato in natura. Mutuamente, viene a rafforzarsi l'idea che i reticoli idrografici si modellano nel rispetto di detti criteri generali.

INTRODUZIONE

L'introduzione del concetto di geometria frattale nello studio della geomorfologia delle reti idrografiche (vedi ad esempio: *Mandelbrot*, 1982, *La Barbera e Rosso*, 1989, *Liu*, 1992, *Beer e Borgas*, 1993, *Nikora et al.*, 1993, *Claps e Oliveto*, 1996) ha offerto sia la possibilità di una lettura sintetica, indipendente dalla scala di osservazione, delle caratteristiche peculiari dei reticoli e sia una nuova interpretazione di alcuni modelli della risposta idrologica proposti in passato (*Claps et al.*, 1996b).

Nel presente studio, a proseguimento di precedenti lavori (*Claps et al.*, 1994; *Claps et al.*, 1996b), si presentano i risultati di un'indagine volta alla comprensione dell'influenza esercitata sulla risposta idrologica dalle varie dimensioni frattali riconoscibili in un reticolo idrografico ed alla comprensione delle modalità con le quali l'esigenza di un bacino idrografico di fornire una risposta efficiente alle precipitazioni determina strutture frattali dei reticoli molto simili tra loro anche in presenza di condizioni geologiche e climatiche molto

diverse. Preliminarmente, viene fatto cenno alle modalità secondo cui una rete frattale si sviluppa ed al significato di dimensione frattale di una rete di drenaggio naturale.

MODELLI FRATTALI DETERMINISTICI DI UNA RETE IDROGRAFICA

L'utilizzo di reticoli sintetici di tipo frattale consente non solo un approfondimento delle caratteristiche di *auto-similarità* delle reti naturali (Claps et al., 1996a), ma altresì interessanti interpretazioni fisiche, come si vedrà successivamente, dei parametri della funzione di risposta di una rete idrografica (Claps et al., 1996b). Qui di seguito viene fatto cenno sia alle modalità secondo cui una rete frattale deterministica viene composta a partire dai meccanismi fondamentali di biforcazione e sinuosità e sia al significato di dimensione frattale di una rete di drenaggio naturale.

Modelli frattali di simulazione della sola struttura di biforcazione

Una rete frattale che voglia simulare la sola struttura di ramificazione di una rete idrografica, può essere costruita, in maniera deterministica, usando un iniziatore (segmento di lunghezza unitaria) ed un generatore (combinazione di uguali segmenti di lunghezza $\eta < 1$) ad albero. Dopo la prima generazione, consistente nella sostituzione dell'iniziatore con il generatore, ciascun segmento (detto anche *link*) del generatore diventa un iniziatore che sarà a sua volta sostituito da un generatore; la costruzione della rete frattale si riconduce, in tal modo, ad una procedura di tipo ricorsivo (Fig.1).

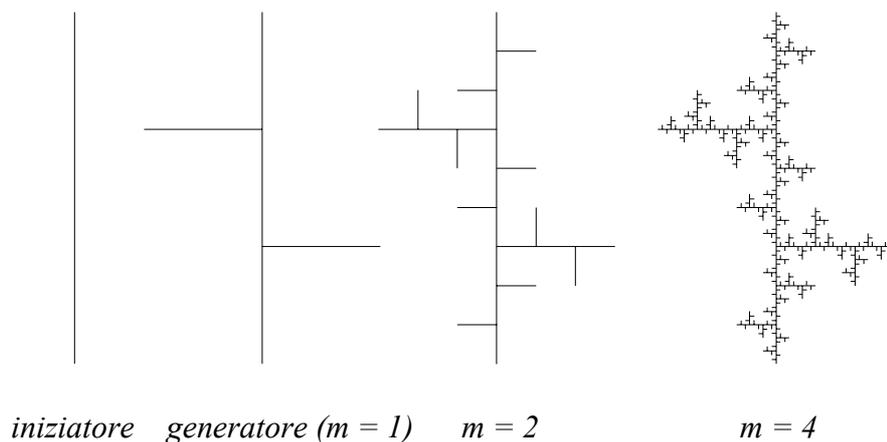


Fig. 1. Esempio di generazione deterministica di una rete frattale simulante il solo processo di biforcazione di una rete naturale. Con m è indicato lo stadio moltiplicativo.

Con riferimento a siffatte reti, la dimensione frattale topologica D_t è data da

$$D_t = \frac{\ln M}{\ln \Delta} \quad (1)$$

essendo M il numero complessivo di *links* della rete e Δ il diametro topologico di questa (numero di *links* dell'asta principale). Nel caso specifico di Fig.1, D_t è pari a 1.465.

Circa la stima di D_t di una rete idrografica naturale, la proposta avanzata da *Claps e Oliveto* (1996) si basa sul calcolo del valore medio ottenuto applicando l'Eq. (1) a ciascun sotto-reticolo dell'intera rete. In tal modo, da valutazioni fatte su 23 bacini idrografici di Basilicata e Puglia, la dimensione frattale topologica stimata è risultata molto poco variabile intorno al valore medio $D_t = 1.51$ con uno scarto quadratico medio pari a 0.057. Un siffatto risultato sembrerebbe implicare una sostanziale uniformità della struttura di ramificazione delle reti di drenaggio naturali e ciò, pressoché indipendentemente dalle condizioni geologiche e climatiche.

Modelli frattali di simulazione della struttura di biforcazione del reticolo e della struttura sinuosa del singolo corso d'acqua

In realtà, una migliore approssimazione della struttura bidimensionale di una rete idrografica la si ottiene considerando che anche le singole aste fluviali hanno natura frattale, il che si riflette nella variabilità delle lunghezze euclidee con la scala caratterizzante la misura. A rigore, la singola asta fluviale andrebbe trattata come un oggetto *auto-affine* (*Snow*, 1989; *Nikora et al.*, 1993; *Ijjasz-Vasquez et al.*, 1994) e cioè come un oggetto la cui invarianza dipende da più di un fattore di scala. Ciononostante, per semplicità, d'ora in avanti dette aste saranno considerate alla stregua di oggetti *auto-similari* con dimensione frattale D_s . Si può ritenere, pertanto, che la dimensione D che caratterizza la misura invariante della lunghezza totale del reticolo, dipenda sia dalla dimensione frattale topologica D_t , dovuta alla struttura di biforcazione, che dalla dimensione frattale D_s , dovuta alla struttura sinuosa dei singoli corsi d'acqua. In Fig.2 è mostrato un modello di rete frattale simulante l'insieme di dette strutture. Tale modello, proposto da *Nikora e Sapozhnikov* (1993), deriva dalla moltiplicazione di un generatore ottenuto dalla combinazione di una struttura che simula le sinuosità delle singole aste (ad esempio la struttura (b) di Fig.2) con una struttura ad albero che simula il processo di biforcazione (ad esempio la struttura (a) di Fig.2). In tale caso, la dimensione frattale D della struttura risultante è pari al prodotto della dimensione frattale delle due strutture originarie. In particolare, la dimensione frattale D_s della struttura sinuosa può calcolarsi come

$$D_s = - \frac{\ln M}{\ln \eta} \quad (2)$$

essendo M il numero degli elementi della struttura sinuosa ($M = 3$ nel caso della struttura di Fig.2 (b)) ed η la lunghezza del singolo elemento (inferiore ad 1 nell'ipotesi in cui si assuma unitaria la lunghezza dell'iniziatore).

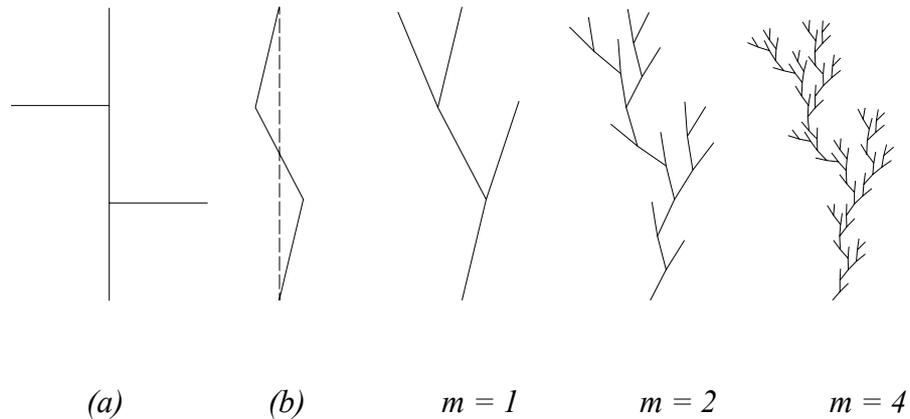


Fig. 2. Esempio di generazione deterministica di una rete frattale simulante sia il processo di biforcazione che le sinuosità dei singoli corsi d'acqua. Con (a) si è indicato il generatore della struttura di biforcazione, con (b) il generatore delle sinuosità e con m lo stadio moltiplicativo.

Circa la stima di D e D_s nel caso di reti idrografiche naturali si rimanda a *Claps e Oliveto* (1996). Ad ogni modo, gli autori appena citati hanno evidenziato come sia D che D_s siano molto poco variabili intorno ai valori medi pari, rispettivamente, ad 1.7 ed 1.1.

RISPOSTA IDROLOGICA DI UN RETICOLO FRATTALE

Basandosi su un approccio di tipo meccanico-statistico, *Lienhard* (1964) e *Lienhard e Meyer* (1967), sono pervenuti ad un'espressione dell'idrogramma unitario istantaneo $f(t)$ del tipo:

$$f(t) = \left[\frac{c/b^a}{\Gamma(a/c)} (a/c)^{\frac{a}{c}} \right] t^{a-1} \exp \left[-\frac{a}{c} \left(\frac{t}{b} \right)^c \right] \quad t \geq 0 \quad (3)$$

in cui a, b , e c sono i parametri della distribuzione. Alla (3) si perviene ricercando la funzione $f(t)$ più probabile soggetta ai seguenti vincoli:

1. principio di conservazione della massa:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i = N \quad (4)$$

dove con N_i si è indicato il numero di particelle d'acqua che pervengono alla sezione di chiusura al tempo t_i e con N il numero complessivo delle particelle immesse nel reticolo;

2. proporzionalità fra il numero di modi g_i , secondo cui N_i particelle d'acqua possono pervenire alla sezione di chiusura nell'intervallo di tempo $[t_{i-1}, t_i]$, ed una specificata potenza di t_i :

$$g_i = ct_i^{a-1} \quad (5)$$

3. vincolo sul momento di ordine c rispetto all'origine:

$$E[t^c] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i}{N} t_i^c = b^c \quad (c > 0) \quad (6)$$

Specializzazione, nel caso di reti frattali, dei vincoli introdotti da Lienhard

Tenuto conto del fatto che il primo vincolo è un vincolo banale, maggiore attenzione va posta sul secondo e terzo vincolo. Per quanto riguarda il secondo vincolo, *Claps et al. (1996b)* hanno mostrato come, nell'ipotesi in cui il reticolo idrografico possa considerarsi perfettamente frattale, si ha che:

$$a = D_t \quad (7)$$

Per quanto riguarda il terzo vincolo, gli autori appena citati hanno dimostrato che esso, nell'ipotesi in cui si assuma la lunghezza totale invariante (cioè indipendente dalla scala di osservazione) Z del reticolo quale principale fattore condizionante la risposta idrologica, si specializza nel modo seguente

$$E[t^{D_t}] \propto Z \quad (8)$$

Idrogramma unitario istantaneo di una rete frattale

In definitiva, sulla base di quanto appena detto, è possibile dimostrare come, nel caso di una rete frattale, la (3) si particolarizza nel seguente modo (*Claps et al. 1996b*):

$$f(t) = \frac{D_t}{k} \left(\frac{t}{k}\right)^{D_t-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{k}\right)^{D_t}\right] \quad (9)$$

in cui k è un fattore di scala temporale. Tale dimostrazione è basata sulle seguenti ipotesi:

- i. velocità V costante in ogni segmento del reticolo;
- ii. segmenti (*links*) del reticolo di lunghezza costante;
- iii. funzione di larghezza A del reticolo, in assenza di vincoli imposti sulla sua struttura frattale, approssimabile con una funzione di potenza del tipo $A(\delta) \propto \delta^{D_t-1}$ in cui δ rappresenta la distanza dalla sezione di chiusura;
- iv. lunghezza totale invariante (cioè indipendente dalla scala di osservazione) Z del reticolo assunta come principale caratteristica morfologica controllante la forma della risposta.

La prima ipotesi, generalmente accettata in prima approssimazione (v. es. *Lienhard, 1964; Rodriguez-Iturbe e Valdés, 1979*), ha ricevuto un supporto teorico in un lavoro di *Rodriguez-Iturbe et al. (1992)*. La seconda risponde ad esigenze di semplicità, ma resta sufficientemente

valida se si sostituisce alle lunghezze reali dei *links* la loro lunghezza media. La validità dell'ipotesi iii è stata mostrata in *Claps et al.* (1996b). La quarta ipotesi, tra l'altro simile a quella assunta da *Troutman e Karlinger* (1985), è più che ragionevole se si pensa che la misura frattale della lunghezza totale del reticolo, che porta in conto anche quei percorsi idraulici non riconoscibili al di sotto di una certa scala di lettura, rappresenta una misura attendibile dell'area contribuente alla formazione del deflusso superficiale (che non necessariamente coincide con l'area del bacino idrografico).

Circa il fattore di scala k , questo è dato da (*Claps et al.*, 1994):

$$k = \left[\frac{1}{2^{D_t} + 1} \left(\frac{2^{D_t} - 1}{2^{D_t}} + 1 \right)^{D_t} \right]^{\frac{1}{D_t}} \frac{\zeta}{V} \Delta \quad (10a)$$

oppure

$$k = \left[\frac{0.5}{3^{D_t} + 1} \left[\left(\frac{3 \cdot 3^{D_t} - 1}{4 \cdot 3^{D_t}} + 1 \right)^{D_t} + \left(\frac{3 \cdot 3^{D_t} - 1}{4 \cdot 3^{D_t}} + 2 \right)^{D_t} \right] \right]^{\frac{1}{D_t}} \frac{\zeta}{V} \Delta \quad (10b)$$

a seconda che il diametro topologico Δ_l del generatore della rete frattale risulti, rispettivamente, pari a 2 o 3¹. Nelle equazioni appena scritte ζ rappresenta la lunghezza media invariante dei *links*, V la velocità media della corrente ipotizzata costante su tutto il reticolo e Δ il diametro topologico, anch'esso invariante, dell'asta principale. E' interessante notare come il fattore di scala temporale k , reso adimensionale per mezzo del raggruppamento $\zeta\Delta/V$, possa semplicemente esprimersi, con scarti inferiori al 4%, per mezzo delle seguenti equazioni (Fig.3a):

$$k' = \frac{k}{(\zeta/V)\Delta} = \frac{1}{2} D_t^{2/3} \quad (11a)$$

$$k' = \frac{k}{(\zeta/V)\Delta} = \frac{1}{2} D_t^{1/2} \quad (11b)$$

a seconda che Δ_l sia pari, rispettivamente, a 2 o 3. Tenuto poi conto della relazione $Z = (\zeta\Delta)^{D_t}$ (*Claps e Oliveto*, 1996), in cui Z è la misura invariante dell'intero reticolo e come tale fortemente rappresentativa dell'area contribuente al deflusso superficiale, nelle Eqq. (10a) e (10b) in luogo del raggruppamento $\zeta\Delta$ può pure scriversi Z^{1/D_t} . In Fig.3b, con riferimento ad alcuni bacini di Basilicata e Puglia, viene mostrato come Z (stimata a mezzo dell'Eq. (3) in *Claps e Oliveto*, 1996) sia fortemente correlata all'area del bacino idrografico e ciò in misura

¹ *Claps et al.* (1996a) hanno dimostrato come, generalmente, le strutture elementari alla base delle reti naturali hanno diametro topologico Δ_l prossimo a 3 e comunque compreso fra 2 e 3.

più soddisfacente rispetto a quanto riscontrato con le misure euclidee (variabili a seconda della scala di osservazione). Risulta, inoltre, interessante notare come i reticoli appartenenti alla Basilicata abbiano una densità di drenaggio sensibilmente maggiore rispetto a quella delle reti idrografiche pugliesi; ciò è principalmente da imputarsi alle diverse condizioni climatiche e geologiche caratteristiche delle due aree suddette (clima generalmente umido e formazioni geologiche prevalentemente impermeabili nel caso dei bacini lucani; clima pressoché arido e formazioni geologiche per buona parte permeabili nel caso dei bacini pugliesi).

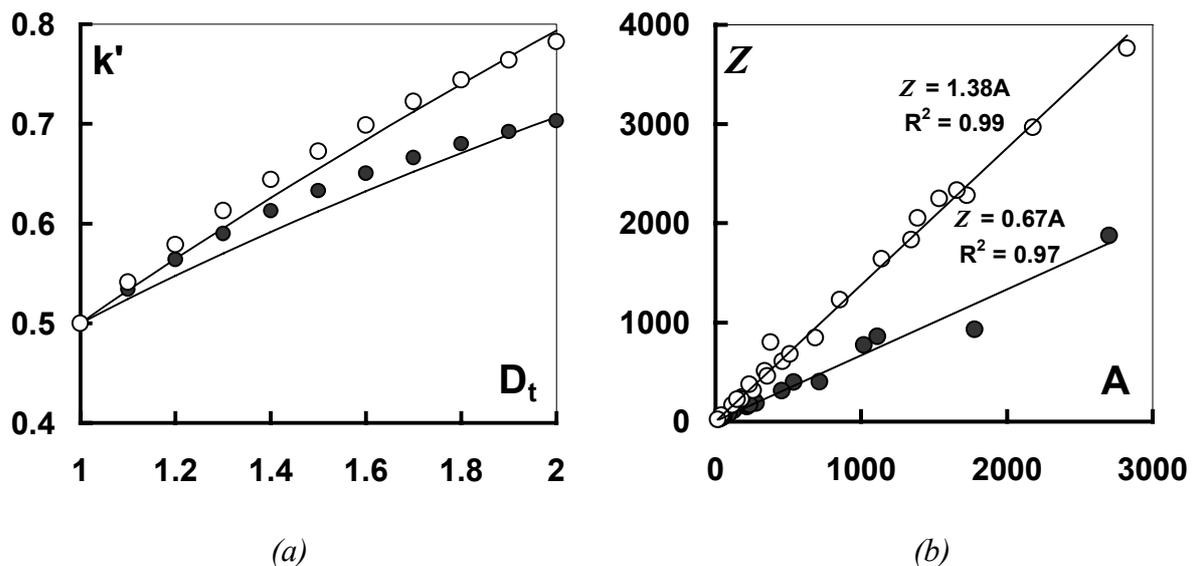


Fig.3. (a) Andamento del fattore k' in funzione di D_t ed equazioni (11a) ed (11b); (b) andamento, per alcune reti idrografiche di Puglia (●) e Basilicata (○), della lunghezza invariante Z [Km^D] del reticolo in funzione dell'area A [Km^2] del bacino.

CONFIGURAZIONI TOPOLOGICHE PIÙ PROBABILI DI UNA RETE IDROGRAFICA

Sembra ragionevole ritenere che sia lo sviluppo che il mantenimento di una rete idrografica avvengano secondo principi generali, quali ad esempio i criteri di minima dissipazione di energia nel concentrare e smaltire le precipitazioni o di minimo lavoro svolto per modellare la rete. La validità di questi principi, tra l'altro già dimostrata nelle linee generali (v. es. *Rinaldo et al.* 1992; *Rodriguez-Iturbe et al.*, 1992), spiegherebbe la similarità, spesso riscontrata, fra reti idrografiche sviluppatesi in condizioni geologiche e climatiche molto diverse. A tal proposito, si pensi ad esempio alla dimensione frattale topologica che, come detto in precedenza, si è mostrata abbastanza stabile e con valori compresi fra 1.4 ed 1.6.

Qui di seguito, assumendo quale funzione di risposta idrologica quella espressa dall'Eq.(9), viene avviata un'indagine volta all'individuazione delle configurazioni topologiche più probabili e dei principi che governano i processi evolutivi di una rete di drenaggio naturale. Il tutto con riferimento alle sole immissioni impulsive unitarie.

Principio del minimo picco

In accordo con l'Eq.(9) e per un assegnato valore del raggruppamento $\zeta\Delta/V$, in Fig.4 vengono mostrati gli andamenti degli idrogrammi unitari istantanei al variare di D_t e del diametro topologico del generatore Δ_l . L'osservazione della figura mostra come il picco della funzione di risposta tenda a decrescere rapidamente all'aumentare di D_t e presenti valori piuttosto stabili per $D_t > 1.4$; è anche possibile individuare in $D_t=1.75$ e $D_t=1.60$ il valore minimo assoluto del picco a seconda che Δ_l sia pari a, rispettivamente, 2 o 3.

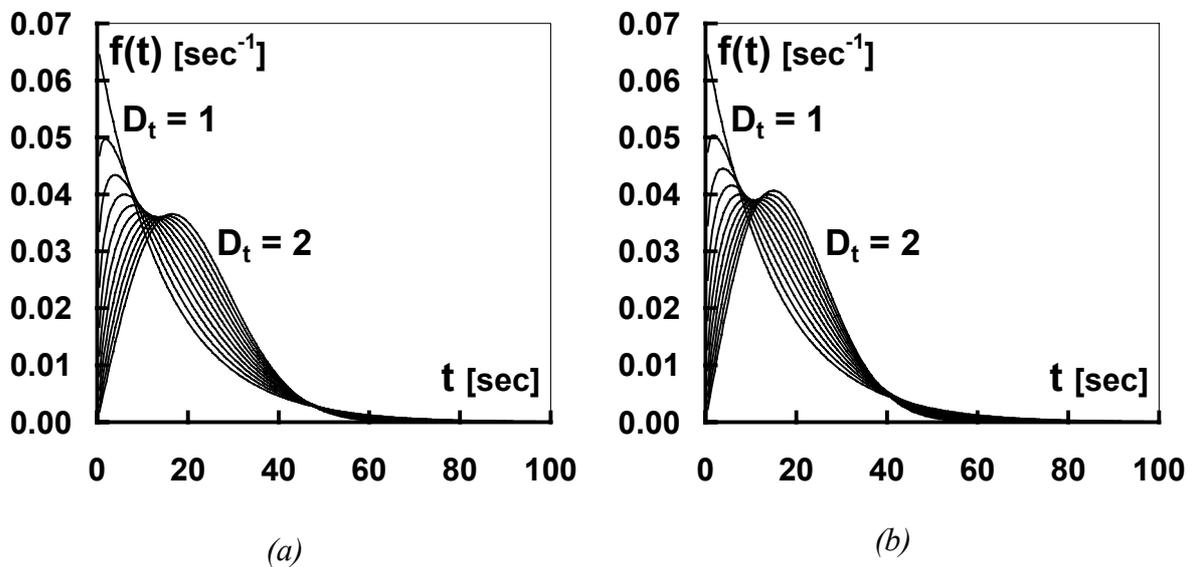


Fig. 4. Andamento, in funzione di D_t , della funzione di risposta istantanea di una rete frattale. (a) $\Delta_l = 2$; (b) $\Delta_l = 3$.

Ad ogni modo, tenuto conto altresì conto che per i reticoli naturali si ha con buona approssimazione $\Delta_l = 3$, si potrebbe affermare che le configurazioni topologiche di una rete idrografica più probabili siano quelle con D_t compreso fra 1.4 ed 1.8. D'altro canto, poiché tale intervallo è prossimo a quello riscontrato in natura, sebbene di maggiore ampiezza rispetto a quest'ultimo, si potrebbe pure affermare che le reti idrografiche tendono ad evolvere massimizzando gli effetti di laminazione naturale, o, anche, come meglio si vedrà in seguito, minimizzando il lavoro necessario per la concentrazione e lo smaltimento della precipitazione. Va, comunque, da subito evidenziato che lo scostamento del valore di D_t più probabile da quello mediamente riscontrato in natura, è presumibilmente da imputarsi al fatto che tutti i

ragionamenti fin qui condotti sono basati su idrogrammi unitari istantanei che, per come sono stati ricavati, sono da considerarsi, a tutti gli effetti, delle funzioni di larghezza. In tal senso, dunque, l'analisi condotta è da ritenersi semplificata in quanto trascurante degli aspetti più propriamente idraulici strettamente connessi con i fenomeni di propagazione del deflusso.

Principio della massima entropia

L'entropia informativa I associata ad una generica funzione $f(t)$ può calcolarsi nel modo seguente (Shannon, 1948):

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \ln[f(t)] dt \quad (12)$$

Nel caso in esame, applicando semplici regole d'integrazione, l'entropia informativa associata all'idrogramma unitario istantaneo di Eq.(9) è data da

$$I(D_t) = 1 + \ln\left(\frac{k^{D_t}}{D_t}\right) - (D_t - 1) \cdot \left[\frac{1}{D_t} \psi(1) + \ln(k) \right] \quad (13)$$

avendo indicato con ψ la funzione speciale digamma. L'andamento della variabile I , in funzione di D_t ed del diametro topologico del generatore Δ_l , è rappresentato nel diagramma di Fig.5. Come può osservarsi, l'entropia informativa è massima per un valore di D_t pari all'incirca ad 1.5, nel caso in cui $\Delta_l = 2$, e ad 1.3 nel caso in cui $\Delta_l = 3$. Tenuto conto, come già detto in precedenza, che generalmente il diametro topologico Δ_l delle strutture elementari alla base dei reticoli naturali risulta molto prossimo a 3 e comunque compreso fra 2 e 3, sembrerebbe di poter dedurre che le configurazioni topologiche più probabili, sulla base del principio di massima entropia, siano quelle con D_t pari all'incirca ad 1.4, valore questo minore, sebbene prossimo, a quello mediamente riscontrato in natura e pari ad 1.5.

A questo punto si rende opportuna qualche considerazione su quanto appena detto. La funzione di risposta impulsiva di Eq. (9) rappresenta, per il modo in cui è stata ricavata, la più probabile delle funzioni di densità di probabilità dei tempi d'arrivo delle particelle di pioggia alla sezione di chiusura del reticolo. Per un assegnato valore del raggruppamento $\zeta \Delta/V$, l'applicazione del principio di massima entropia, introdotto da Jaynes (1957), consiste nel ricercare tra le diverse possibili funzioni $f(t)$ associate ai diversi valori di D_p , quella più probabile consistentemente con l'informazione insita nella funzione di risposta stessa. È utile precisare che detto principio, seppur propriamente statistico nella sua formulazione, sottintende, nel caso specifico, un significato fisico che può essere così sintetizzato: il principio di massima entropia conduce alla individuazione di quella $f(t)$ quanto più prossima ad una funzione di distribuzione uniforme in accordo con i vincoli imposti per la definizione della funzione stessa. In termini fisici ciò significa che detto principio conduce all'individuazione di quella funzione rappresentativa della massima uniformità possibile della

distribuzione dei tempi di percorrenza di una particella di pioggia dal punto di caduta alla sezione di chiusura. Pertanto, nell'ipotesi assunta di velocità costante in ogni ramo della rete e di uguale lunghezza dei *links* e tenuto conto altresì conto dei valori di D_t che più frequentemente si riscontrano in natura, sembrerebbe di poter sostenere che le reti di drenaggio naturali tendano ad evolvere, pur sempre nel rispetto di certi vincoli, in conformità con il principio di massima uniformità della distribuzione delle distanze dei nodi del reticolo dalla sezione di chiusura. Circa, poi, le probabili motivazioni a cui è da ricondursi lo scostamento, sia pur ridotto, del valore di D_t più probabile da quello mediamente riscontrato in natura, si rimanda a quanto detto in precedenza.

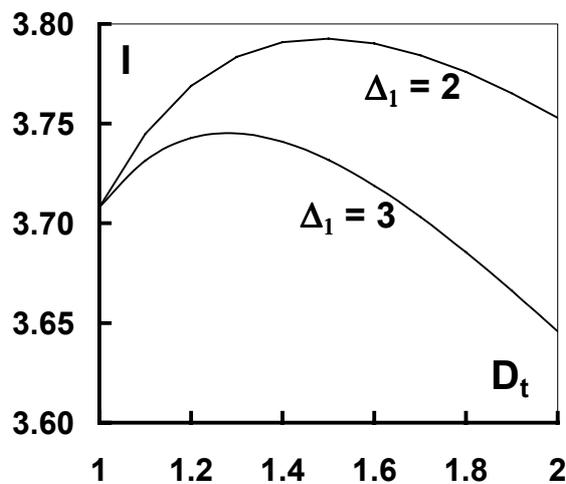


Fig. 5. Andamento, in funzione di D_t , della funzione entropia informativa I associata all'idrogramma unitario istantaneo di Eq. (9).

Principio del minimo lavoro

Detto E il carico idraulico totale relativo ad una sezione di un corso d'acqua, il flusso di energia Φ che si accompagna al passaggio di una portata Q è dato da:

$$\Phi = \gamma Q E = \gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) \quad (14)$$

avendo indicato con z la quota più depressa del fondo, con p/γ l'altezza piezometrica e con $V^2/2g$ l'altezza cinetica. Nell'ipotesi che l'altezza cinetica possa trascurarsi rispetto all'altezza piezometrica (pari al tirante h nel caso di correnti gradualmente variate) e posto $z = 0$ si ottiene:

$$\Phi \approx \gamma Q h \quad (15)$$

La variabilità del tirante idrico con la portata può esprimersi per mezzo della relazione

$$h=cQ^m \quad (16)$$

che, con particolare riferimento alla formula di Gauckler- Strickler, può scriversi come

$$h=cQ^{\frac{3}{5}} \quad (17)$$

L'integrazione della (15), rispetto al tempo, consente di valutare la quantità di energia W che attraversa la sezione in un certo intervallo temporale, o, in altre parole, il lavoro svolto dal sistema per lo smaltimento delle portate che transitano in detto intervallo. Può dunque scriversi

$$W=\gamma \int_t Qhdt =\gamma c \int_t Q^{m+1} dt \quad (18)$$

Pertanto, il lavoro compiuto per lo smaltimento di un'immissione unitaria impulsiva può calcolarsi come

$$W=c \cdot \gamma \int_0^{+\infty} [f(t)]^\omega dt \quad (19)$$

avendo posto $\omega = m+1$. In definitiva, tenuto conto dell'espressione della $f(t)$ data dall'Eq.(9) e risolvendo l'integrale (19) si perviene alla seguente espressione di W

$$W=c\gamma \left(\frac{D_t}{k}\right)^{\omega-1} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\left(\omega-\frac{\omega}{D_t}+\frac{1}{D_t}\right)} \Gamma\left(\omega-\frac{\omega}{D_t}+\frac{1}{D_t}\right) \quad (20)$$

dalla quale si evince la dipendenza di W dai soli parametri D_t ed ω .

L'andamento di W in funzione di D_t ed al variare del parametro m , è rappresentato nei diagrammi di Fig.6. Da tali diagrammi si deduce che nel caso di $\Delta_l = 3$ (condizione questa che, si ricorda, generalmente si riscontra nelle reti naturali) il valore di D_t a cui corrisponde il minimo valore di W è pari ad 1.5 e, cioè, praticamente coincidente con quello mediamente riscontrato in natura. Tale valore è praticamente indipendente da m , sebbene tenda a decrescere leggermente al diminuire di m stesso. Mutuamente, può asserirsi che le reti di drenaggio naturali tendono ad organizzarsi minimizzando il lavoro necessario per lo smaltimento delle precipitazioni. Occorre, inoltre, evidenziare come i risultati appena ottenuti siano da ritenersi di maggiore attendibilità rispetto a quelli ottenuti dall'applicazione del principio di massima entropia. Infatti, sebbene anche in questa fase i ragionamenti siano stati basati ancora una volta sugli idrogrammi unitari istantanei (coincidenti, come precedentemente evidenziato, a delle funzioni di larghezza), il ricorso alle scale di deflusso ha consentito, in questo caso, di introdurre, in una qualche maniera, l'informazione idraulica connessa con il processo di trasferimento dei deflussi.

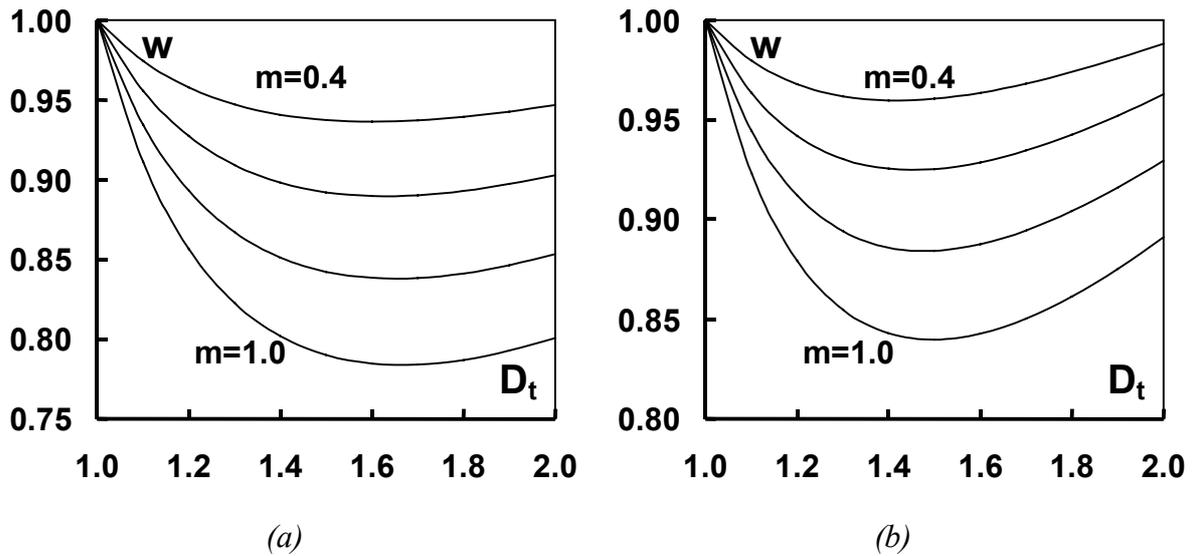


Fig. 6. Andamento, in funzione di D_t , del lavoro W (reso adimensionale per mezzo del suo valore massimo, sicché $w = W/W_{max}$) compiuto dal sistema reticolo per lo smaltimento di un'immissione unitaria impulsiva. (a) $\Delta_l = 2$; (b) $\Delta_l = 3$.

CONCLUSIONI

L'idrogramma unitario istantaneo di un reticolo idrografico è stato qui ricavato sulla base di un approccio meccanico-statistico e nell'ipotesi che il reticolo stesso possa riguardarsi come oggetto frattale. In particolare, tale idrogramma è stato desunto ricercando, nel rispetto di vincoli opportuni, la più probabile fra le funzioni di distribuzione dei tempi di arrivo alla sezione di chiusura delle particelle d'acqua istantaneamente immesse nel bacino idrografico. Oltre al vincolo banale rappresentato dal principio di conservazione della massa, si è pensato altresì di imporre un vincolo che tenesse conto della lunghezza totale invariante del reticolo. In pratica, si è fatto in modo che l'espressione più probabile della risposta idrologica incorporasse, quale unica informazione, quella dovuta alla lunghezza totale della rete.

Inoltre, si è avviata una discussione circa le configurazioni topologiche più probabili di una rete di drenaggio naturale. A tal proposito, applicando alcuni principi (minimo picco, massima entropia, minima dissipazione energetica) si è constatato come i valori della dimensione frattale topologica D_t più probabile risultino pressoché coincidenti con quelli che normalmente si osservano in natura. Mutuamente, tale constatazione rafforzerebbe l'ipotesi secondo cui detti principi governano i processi evolutivi alla base dello sviluppo di una rete di drenaggio naturale.

RINGRAZIAMENTI

Il presente lavoro è stato parzialmente supportato con fondi CNR-GNDCI.

BIBLIOGRAFIA

- Beer, T. e M. Borgas, Horton's laws and the fractal nature of streams, *Water Resour. Res.*, 29 (5), 1475-1487, 1993.
- Claps, P. e G. Oliveto, Reexamining the determination of the fractal dimension of river networks, *Water Resour. Res.*, 32(10), 3123-3135, 1996.
- Claps, P., M. Fiorentino e G. Oliveto, Risposta idrologica di reticoli idrografici frattali, *Rapporto interno*, Dipartimento di Ingegneria e Fisica dell'Ambiente, Università della Basilicata, 1994.
- Claps, P., M. Fiorentino e G. Oliveto, The informational entropy of fractal river networks, *Journal of Hydrology*, Vol.187 (1-2), 145-156, 1996a.
- Claps, P., M. Fiorentino e G. Oliveto, The most probable hydrologic response of fractal river networks, in Singh and Kumar (eds.) *Proc. of the Int'l Conf. on Hydrology and Water Resources*, New Delhi, India, December 1993, Vol. I, 191-204, Kluwer Acad., Dordrecht, The Netherlands, 1996b.
- Ijjasz-Vasquez, E.J., R.L. Bras, e I. Rodriguez-Iturbe, Self-affine scaling of fractal river courses and basin boundaries, *Physica, A*, 209, 288-300, 1994.
- Jaynes, E. T., Information theory and statistical mechanics, *J. Phys. Rev.*, 106, 620-630, 1957.
- La Barbera, P. e R. Rosso, On the fractal dimension of stream networks, *Water Resour. Res.*, 25(4), 735-741, 1989.
- Lienhard, J. H. e P.L. Meyer, A physical basis for the generalized Gamma distribution, *Quart. Appl. Math.*, 25, 330-334, 1967.
- Lienhard, J. H., A Statistical mechanical prediction of the dimensionless unit hydrograph. *J. Geophys. Res.*, Vol. 69, N.24, 5231-5238, 1964.
- Liu, T., Fractal structure and properties of stream networks, *Water Resour. Res.*, 28 (11), 2981-2988, 1992.
- Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New York, 1982.
- Nikora, V.I., e V.B. Sapozhnikov, River network fractal geometry and its computer simulation, *Water Resour. Res.*, 29(10), 3569-3575, 1993.
- Nikora, V.I., V.B. Sapozhnikov, e D.A.Noever, Fractal geometry of individual river channels and its computer simulation, *Water Resour. Res.*, 29(10), 3561-3568, 1993.
- Rinaldo, A, I. Rodriguez-Iturbe I., R.Rigon, R.L.Bras, E.Ijjasz-Vasquez e A.Marani, Minimum Energy and fractal structures of drainage networks, *Water Resour. Res.*, 28 (9), 2183-2195,1992.

- Rodriguez-Iturbe I., A.Rinaldo, R.Rigon, R.L.Bras, A.Marani e E.Ijjasz-Vasquez, Energy dissipation, runoff production and the 3-dimensional structure of river basins, *Water Resour. Res.*, 28 (4), 1095-1103, 1992.
- Rodriguez-Iturbe, I. e J.B. Valdés, The geomorphologic structure of the hydrologic response. *Water Resour. Res.*, 15(6), 1409-1420, 1979.
- Shannon, C. E., The mathematical theory of communications, I and II. *Bell System Tech. J.*, 27, 379-423, 1948.
- Snow, R.S., Fractal sinuosity of stream channels, *Pure Appl. Geophys.*, 131(1/2), 99-109, 1989.
- Troutman B. M. e M. B. Karlinger. Unit hydrograph approximation assuming linear flow trough topologically random channel networks, *Water Resour. Res.*, 21(5), 743-754, 1985.