

RISPOSTA IDROLOGICA DI RETICOLI IDROGRAFICI FRATTALI

Pierluigi Claps, Mauro Fiorentino e Giuseppe Oliveto

Dipartimento di Ingegneria e Fisica dell'Ambiente

Università della Basilicata, Potenza

SOMMARIO

Con riferimento a reticoli idrografici perfettamente frattali si ricerca la funzione più probabile di risposta idrologica, corrispondente alla funzione di densità di probabilità dei tempi di arrivo di particelle immesse istantaneamente ed uniformemente sulla rete. La derivazione della funzione di risposta idrologica in condizioni di massima probabilità avviene secondo lo schema proposto da Lienhard (1964), schema che viene interamente rivisto alla luce dei concetti di geometria frattale assegnando un chiaro significato geometrico ai vincoli. In ipotesi di distribuzione uniforme della lunghezza delle aste e di velocità costante e condizionando il risultato alla conoscenza della lunghezza totale (frattale) del reticolo idrografico, la funzione di risposta ottenuta è una legge di Weibull con parametro di forma pari alla dimensione frattale topologica D_t e con parametro di scala anch'esso funzione di D_t . L'applicazione del principio di massima entropia induce poi a ritenere che il valore più probabile di D_t sia circa pari a 1.5, valore in corrispondenza del quale il picco della funzione raggiunge una zona di minimo. La discussione di quanto detto è preceduta da alcune considerazioni sulle modalità secondo cui una rete frattale deterministica viene composta a partire dai meccanismi fondamentali di biforcazione e sinuosità.

INTRODUZIONE

L'introduzione del concetto di geometria frattale nello studio della geomorfologia delle reti idrografiche ha offerto la possibilità di una lettura sintetica, indipendente dalla scala di osservazione, delle caratteristiche peculiari dei reticoli, con particolare riferimento alla loro struttura topologica che, da sola, controlla in gran parte il complesso fenomeno di formazione dei deflussi superficiali. Questo consente una rivisitazione di alcuni schemi interpretativi della risposta idrologica dei bacini idrografici proposti in passato, con l'obiettivo di ricercare le mutue relazioni esistenti tra la struttura delle reti idrografiche e detta risposta.



Visto, si attesta l'avvenuto deposito in
data odierna, presso l'ufficio Stampa
della Prefettura di Potenza, degli
esemplari d'obbligo.

Potenza, il 7 LUG 1996

IL DIRETTORE DELL'UFFICIO STAMPA

(Dot. L. Rotondi)

Se da un lato, infatti, è stata ampiamente dimostrata l'influenza della struttura geomorfologica e topologica della rete idrografica sulla risposta idrologica (v. es. *Rodriguez-Iturbe e Valdés*, 1979; *Troutman e Karlinger*, 1985; *Rinaldo et al.*, 1991), dall'altro poco è stato detto sull'influenza esercitata sulla risposta dalle varie dimensioni frattali riconoscibili in un reticolo idrografico e, ancor meno, sulle modalità con le quali l'esigenza di un bacino idrografico di fornire una risposta efficiente alle precipitazioni determina strutture frattali delle reti idrografiche molto simili tra loro (cioè con dimensioni frattali variabili in un ristretto *range*), anche in presenza di condizioni geologiche e climatiche molto diverse.

In questo lavoro, con riferimento ad alcuni risultati ottenuti da *Claps et al.* (1993b), si vuole avviare la discussione su questi temi. Risulterà però utile far precedere detta discussione da una riflessione sulle modalità con cui una rete frattale si sviluppa e sul significato delle dimensioni frattali delle reti.

MODELLO DETERMINISTICO FRATTALE DELLE RETI DI DRENAGGIO

Premessa

Gli studi sulla struttura frattale dei corsi d'acqua hanno riguardato talvolta i criteri di determinazione della dimensione frattale dell'oggetto fisicamente osservato, sia esso il singolo corso d'acqua o la rete idrografica nella sua complessità, talaltra la ricerca di legami esistenti tra detta dimensione ed altre caratteristiche geomorfologiche della rete. I suddetti criteri hanno per lo più trovato fondamento nelle leggi di Horton inerenti le lunghezze ed il numero di rami di diverso ordine, oltre che (in qualche caso) la legge di variazione delle aree dei sottobacini di diverso ordine (*Tarboton et al.*, 1988; 1990; *La Barbera e Rosso*, 1989; 1990; *Marani et al.*, 1991; *Beer e Borgas*, 1993). In altri casi ci si è basati sullo studio di reti simulate a mezzo di modelli matematici di diversa genesi (es. *Liu*, 1992; *Rigon et al.*, 1993; *Rinaldo et al.*, 1992; *Nikora e Sapozhnikov*, 1993; *Nikora et al.*, 1993).

Una citazione a parte riguarda l'analisi delle proprietà geomorfologiche dei reticoli naturali e frattali effettuata con l'ausilio dell'entropia informativa (*Claps et al.*, 1993a). In tale approccio, finora incentrato sui caratteri topologici dei reticoli fluviali, l'entropia informativa dei reticoli idrografici (definita da *Fiorentino e Claps*, 1992) mostra forti analogie nella dipendenza da significativi parametri geomorfologici di reticoli naturali e frattali. Le basi dell'analisi condotta da *Claps et al.*, 1993a sono esposte nel paragrafo seguente.

Reti topologiche frattali ed entropia informativa

Al fine di meglio comprendere le caratteristiche di auto-somiglianza insite nei reticoli naturali, *Claps et al.* (1993a) hanno utilizzato quali modelli di confronto delle reti ad albero frattali. Tali reti sono generate in modo deterministico, a partire da alcune strutture elementari

(*generatori*) ad albero, con un processo moltiplicativo, cioè per sostituzione di ognuno degli M elementi (*links*) della struttura elementare con una struttura identica a quella iniziale. Nella generazione la lunghezza degli elementi stessi è ridotta di un fattore $1/\eta$ (con $\eta < 1$) (fig.1). La dimensione geometrica frattale della rete è pari a (Feder, 1988, p.17)

$$D_t = - \frac{\ln M}{\ln \eta} \quad (1)$$

Con riferimento alle reti frattali così ottenute è stata espressa analiticamente l'entropia informativa S_m della funzione di larghezza, che dipende linearmente dallo stadio di generazione m . Di fatto, quindi, il valore di entropia che caratterizza univocamente una rete frattale è quello S_1 relativo al generatore, che rappresenta anche il *tasso di produzione di entropia*, coefficiente angolare della legge $S(m)$.

Per quanto attiene la valutazione della dimensione frattale topologica di un reticolo, Claps et al. (1993a) hanno mostrato che, per le reti frattali generate come detto in precedenza, la stima di tale dimensione frattale ottenuta tramite il rapporto $\ln R_B / \ln R_L$ risulta valida solo asintoticamente (una buona approssimazione comincia ad aversi per reti di ordine superiore a 7). L'insieme delle proprietà frattali mostrate dai reticoli naturali (anche solo con riferimento alla topologia) consente di estendere questo risultato alle reti naturali, suggerendo criteri alternativi di stima della dimensione frattale topologica per reticoli di ordine non elevato.

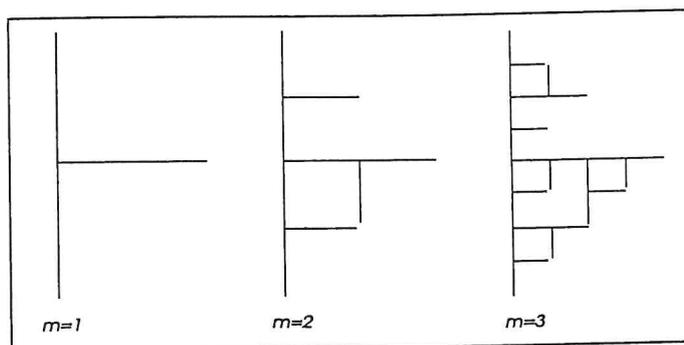


Fig.1. Generazione di una rete frattale ad albero, Il parametro m rappresenta l'indice di generazione. Il generatore è la struttura con $m=1$. L'iniziatore è un segmento di lunghezza unitaria.

La proposta avanzata da Claps et al. (1993a) per la stima di D_t si basa su una relazione tra il tasso di produzione di entropia S_1 e la dimensione frattale D_t , relazione tarata tramite regressione tra i valori assunti dalle suddette variabili con riferimento ad una classe di reti frattali con ordine hortoniano del generatore pari a 2 (v. es. fig. 2).

Il tasso di produzione di entropia dei reticoli naturali è stimato tramite la relazione tra ordine Ω di un sottobacino e la sua entropia informativa S_Ω (Claps et al., 1993a):

$$S_\Omega = (\Omega - 1) S_1 \quad (2)$$

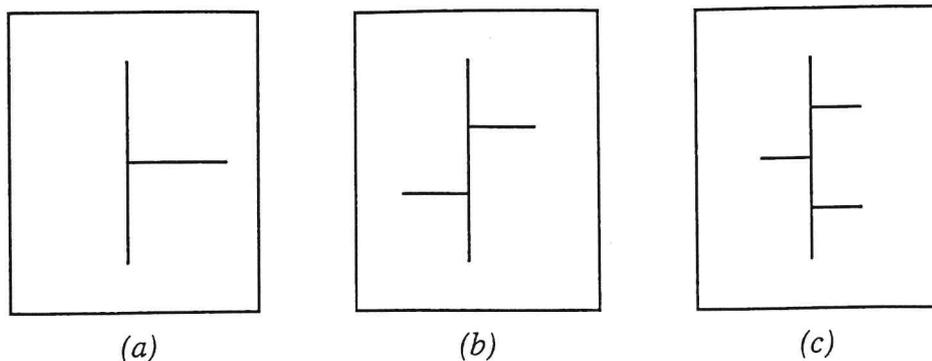


Fig.2. Esempi di strutture elementari (generatori) ad albero utilizzate da Claps et al. (1993a). I parametri rappresentativi di tali strutture sono: (a) $D_f=1.585$; $M_f=3$; $\eta_f=1/2$; (b) $D_f=1.465$; $M_f=5$; $\eta_f=1/3$; (c) $D_f=1.404$; $M_f=7$; $\eta_f=1/4$; con: D = dimensione frattale, con M = numero degli elementi e η = lunghezza del singolo elemento (partizione dell'iniziatore unitario). Il pedice f sta ad indicare che tali strutture sono rappresentative dei soli processi di biforcazione.

Da valutazioni fatte su alcuni bacini idrografici di Basilicata e Puglia, la dimensione frattale topologica stimata risulta molto poco variabile intorno al valore medio $D_f=1.49$. Infatti lo scarto quadratico medio risulta essere pari a 0.029, molto inferiore a quello ottenuto con riferimento alla relazione $D_f=\ln R_B/\ln R_L$, pari a 0.169 (a fronte di un valore medio praticamente uguale). Questo risultato, sia pur relativo ad un campione di soli 8 bacini implicherebbe una sostanziale uniformità della struttura di ramificazione nelle reti di drenaggio naturali.

Modello deterministico frattale delle reti di drenaggio

L'estensione dell'approccio sinteticamente esposto al paragrafo precedente ad una caratterizzazione più completa dei reticoli di drenaggio naturali presuppone la definizione di un modello frattale che tenga conto anche dalle geometrie sinuose proprie dei singoli corsi d'acqua.

Una buona approssimazione della struttura bidimensionale dei reticoli di drenaggio si ha considerando che anche le singole aste fluviali hanno natura frattale, cosa che si riflette nella variabilità delle lunghezze euclidee con la scala caratterizzante la misura. Si mantiene questa ipotesi anche in presenza di risultati di diverso tipo recentemente apparsi in letteratura (v. es. Nikora, 1994), per coerenza con lo schema di rappresentazione adoperato.

Considerando il reticolo idrografico come un oggetto frattale a sé stante, si può ritenere che la dimensione D , che caratterizza la misura frattale della lunghezza totale del reticolo dipenda dalla dimensione frattale D_f dovuta al processo di biforcazione e dalla dimensione frattale D_s dovuta alla sinuosità dei singoli corsi d'acqua:

$$D = f(D_f, D_s) \quad (3)$$

Come risulta da alcuni dei contributi citati in introduzione, la composizione delle due dimensioni frattali è stata prevalentemente affidata all'applicazione delle leggi hortoniane, con esiti talvolta contraddittori.

Per fornire un contributo alla chiarificazione della composizione tra le suddette due dimensioni D_t e D_s ed in vista di ulteriori approfondimenti dell'applicazione del concetto di entropia informativa a reti naturali e frattali, si ravvisa la necessità di derivare l'espressione della dimensione frattale globale D di un reticolo in base a sole considerazioni di geometria frattale, facendo riferimento sia alle geometrie topologiche che a quelle caratterizzanti la sinuosità.

Un tentativo in questa direzione è stato fatto da *Nikora e Sapozhnikov* (1993) il cui modello di rete deriva dalla moltiplicazione di un generatore (fig.3c) ottenuto dalla combinazione della curva di Koch (fig. 3b), che simula le sinuosità delle singole aste, con una struttura ad albero (fig. 3a) che simula il processo di biforcazione. Il link della struttura 3a è ottenuto da una partizione $\eta=1/4$ dell'inziatore di lunghezza unitaria che rappresenta l'asta principale, mentre la struttura 3b presenta $\eta=1/3$. La stessa partizione $\eta=1/3$ caratterizza la struttura risultante. Dunque, l'asta principale della struttura di biforcazione è sostituita da una struttura sinuosa che implica una diversa partizione dell'inziatore. Ne consegue un incremento della lunghezza dei links della struttura risultante, se si intende mantenerli tutti della stessa lunghezza.

Nel modello di *Nikora e Sapozhnikov* (1993) la dimensione frattale della struttura risultante è pari al prodotto della dimensione frattale delle due strutture originarie. In accordo con la (1), si ha:

$$D = \frac{\ln(M)}{\ln(1/\eta)} = -\frac{\ln(M)}{\ln(\eta)} \quad (4)$$

e dunque per la struttura di fig.3c:

$$D_t = \frac{\ln(7)}{\ln(4)} \quad ; \quad D_s = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \quad D = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} = D_t \cdot D_s \quad (5)$$

In realtà, la condizione $D=D_t D_s$ non può applicarsi per tutte le strutture a meno che non si rinunci alla proprietà di auto-somiglianza della rete che si va a generare. Al fine di chiarire quanto appena asserito, consideriamo ora un nuovo schema di biforcazione (fig.4a) e combiniamolo sempre con una curva di Koch (fig.4b) procedendo in analogia con il caso precedente.

Le strutture risultanti di fig.4c e 4d differiscono nella modalità di crescita, in quanto presuppongono diversi iniziatori, che sono rappresentati da aste delimitate dai punti in nero. Si vedrà subito come la definizione degli iniziatori implichi, oltre alla particolare modalità di crescita, una particolare dimensione frattale globale. Per la struttura rappresentata in fig.4c la

dimensione frattale D è data dalla seguente equazione (Mandelbrot, 1982, p.67), riferita all'esistenza di due iniziatori di differente lunghezza ($1/3$ e $2/3$ rispettivamente):

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^D + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1 \quad (6)$$

da cui risulta $D=2$ e così pure $D_i D_s = 2$, condizione che implica il "riempimento" del piano da parte della struttura frattale.

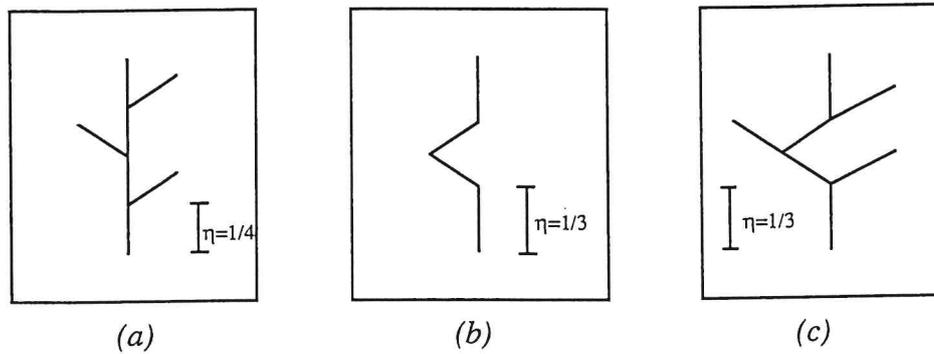


Fig.3. Modello proposto da Nikora e Sapozhnikov (1993). Il pedice s sta ad indicare che la struttura di tipo (b) è rappresentativa della geometria sinuosa del singolo corso d'acqua. I parametri delle strutture frattali derivate dai singoli generatori sono: (a) $D_i=1.404$; $M_i=7$; $\eta_i=1/4$; (b) $D_s=1.262$; $M_s=4$; $\eta_s=1/3$; (c) $D=1.771$; $M=7$; $\eta=1/3$.

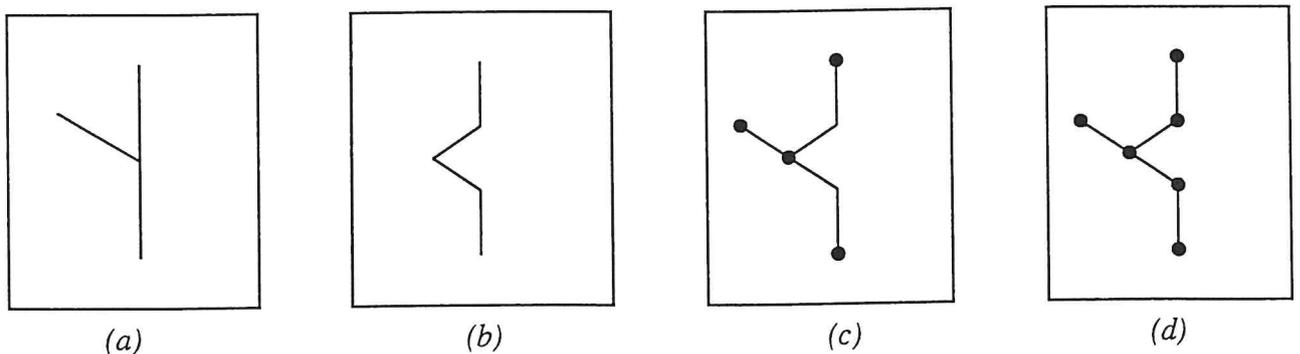


Fig.4. Esempio di combinazione di due strutture frattali secondo l'approccio di Nikora e Sapozhnikov (1993). I parametri delle strutture frattali derivate dai singoli generatori sono: (a) $D_i=1.585$; $M_i=3$; $\eta_i=1/2$; (b) $D_s=1.262$; $M_s=4$; $\eta_s=1/3$; (c) $D=2.000$; $M=3$; $\eta=1/3$; $\eta'=2/3$; (d) $D=1.465$; $M=5$; $\eta=1/3$.

Il numero degli elementi della struttura di fig.4c è pari a quello della struttura di biforcazione (fig.4a) ma la loro lunghezza e geometria non è uniforme: i segmenti più lunghi sono costituiti da due segmenti con differenti direzioni. La presenza di iniziatori non rettilinei implica che l'oggetto risultante da ripetute moltiplicazioni non conserva le caratteristiche di auto-somiglianza (v. es. Feder, 1988, p.20).

Considerando invece la struttura ottenuta in fig.4d (i segmenti di tale struttura sono tutti rettilinei e di uguale lunghezza) si osserva che la dimensione frattale D risulta:

$$D = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} = 1.465$$

cosicché viene meno la legge di composizione $D = D_t D_s$.

La regola di composizione che viene qui proposta (Fig. 5) e che non soffre degli inconvenienti evidenziati con riferimento allo schema di *Nikora e Sapozhnikov* (1993) si basa sulla considerazione che ogni singolo corso d'acqua ha natura frattale e quindi ogni segmento della struttura ad albero va sostituito con una struttura sinuosa avente lo stesso dettaglio, cioè la stessa scala di definizione. In altri termini, La crescita dell'oggetto si sviluppa sulla base di due meccanismi indipendenti: uno per la "crescita" della struttura ad albero ed uno per quella della struttura sinuosa. La sostituzione del segmento rettilineo con la struttura sinuosa avviene solo dopo la crescita di entrambe (fig. 6).

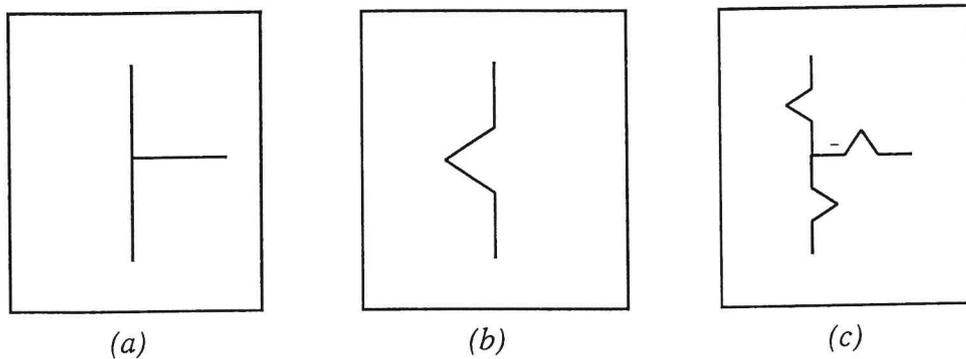


Fig.5. Schema di composizione del modello proposto. Il generatore (c) risultante dalla composizione di (a) e (b) ha parametri: $D=2.710$; $\eta=2/3$; $M=3$

In accordo con tale regola di crescita, la dimensione frattale dell'oggetto di fig. 5c può calcolarsi per mezzo della relazione (1) introducendo al posto di M il numero dei segmenti del generatore di fig.5a ed al posto di η la lunghezza euclidea del generatore di Koch di fig. 5b.

Poiché a qualsiasi stadio moltiplicativo la lunghezza del generico link vale $M_s \eta_s \eta_t$, la dimensione frattale è:

$$D = - \frac{\ln(M_t)}{\ln(M_s \eta_s \eta_t)} = - \frac{\ln(M_t)}{\ln(M_s \eta_s) + \ln(\eta_t)} \quad (7)$$

oppure

$$\frac{1}{D} = - \left[\frac{\ln(\eta_t)}{\ln(M_t)} + \frac{\ln(M_s \eta_s)}{\ln(M_t)} \right] \quad (8)$$

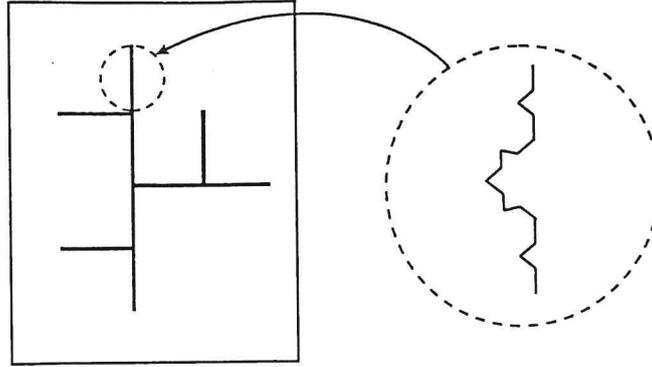


Fig.6. Rappresentazione schematica della composizione delle strutture di fig. 5a e 5b. al secondo stadio di generazione.

Tenuto conto del fatto che per definizione di dimensione frattale:

$$M_s \eta_s^{D_s} = 1 \quad \text{e quindi} \quad M_s = \frac{1}{\eta_s^{D_s}} \quad (9)$$

e poiché:

$$\frac{\ln(\eta_t)}{\ln(M_t)} = \frac{1}{D_t} \quad (10)$$

la (8) diventa:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_t} - (1 - D_s) \frac{\ln(\eta_s)}{\ln(M_t)} \quad (11)$$

ed indica che la dimensione frattale globale non è semplicemente data dal prodotto di $D_t D_s$.

Un'espressione più semplice si ricava per la (11) nel caso in cui $\eta_t = \eta_s$ (come accade se in luogo della struttura 5a si adopera la 2b). Tale condizione comporta:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_t} - (1 - D_s) \frac{\ln(\eta_t)}{\ln(M_t)} = \frac{1}{D_t} + \frac{(1 - D_s)}{D_t} = \frac{(2 - D_s)}{D_t} \quad (12)$$

e quindi:

$$D = \frac{D_t}{2 - D_s} \quad (13)$$

espressione che coincide proprio con la relazione ricavata da *La Barbera e Rosso* (1990) in base alle sole leggi di Horton sul numero e le lunghezze dei rami.

LA RISPOSTA IDROLOGICA DELLE RETI FRATTALI

Claps et al. (1993b), utilizzando la procedura tipica della meccanica statistica proposta da *Lienhard* (1964), hanno derivato l'espressione della funzione di risposta idrologica di una rete frattale. Questa assume la forma (v. Appendice B):

$$f(t) = \frac{D_t}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{D_t-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{b}\right)^{D_t}\right] \quad (14)$$

nella quale b è un fattore di scala temporale, dipendente da D_t , proporzionale al rapporto L/v tra lunghezza dell'asta principale e velocità della corrente secondo un'espressione che verrà meglio precisata di seguito.

La (14) è stata derivata come la funzione di risposta più probabile sotto le seguenti ipotesi:

- i. la velocità v è costante in ogni segmento del reticolo;
- ii. i segmenti (*links*) del reticolo sono tutti di uguale lunghezza;
- iii. la funzione di larghezza del reticolo, in assenza di vincoli imposti sulla sua struttura frattale, è approssimabile con una funzione di potenza del tipo

$$W(\delta) \propto \delta^{D_t-1} \quad (15)$$

in cui δ rappresenta la distanza dalla sezione di chiusura.

- iv. la lunghezza totale del reticolo è l'unica caratteristica morfologica che controlla la forma della risposta.

La prima ipotesi, generalmente accettata in prima approssimazione (v. es. *Lienhard*, 1964; *Rodriguez-Iturbe e Valdés*, 1979), ha di recente ricevuto un supporto teorico in un lavoro di *Rodriguez-Iturbe et al.* (1992). La seconda risponde ad esigenze di semplicità, ma resta sufficientemente valida se si sostituisce alle lunghezze reali dei links la loro lunghezza media. La validità dell'ipotesi iii viene mostrata in *Claps et al.* (1993b). La quarta ipotesi, tra l'altro simile a quella assunta da *Troutman e Karlinger* (1985), è più che ragionevole se si pensa che la misura frattale della lunghezza totale del reticolo, che porta in conto anche quei percorsi idraulici non riconoscibili al di sotto di una certa scala di lettura, rappresenta una misura attendibile dell'area contribuente alla formazione del deflusso superficiale (che non necessariamente coincide con l'area del bacino idrografico). A tal proposito è forse utile richiamare che l'area contribuente è fortemente rappresentativa, a parità di condizioni climatiche, delle precipitazioni che la rete idrografica deve smaltire e, conseguentemente, del lavoro che la rete è chiamata a svolgere sotto la sollecitazione piovosa.

E' possibile dimostrare che, nella (14), il fattore di scala b è fornito dall'espressione:

$$b = \frac{\tau_{D_i}^{1/D_i}}{v} \quad (16)$$

nella quale τ_{D_i} rappresenta il momento rispetto all'origine, di ordine D_i , della funzione di larghezza della rete. τ_{D_i} è anche una funzione del diametro topologico Δ_1 del generatore dell'oggetto frattale e della lunghezza L dell'asta principale del reticolo (v. Appendice A).

In *Claps et al.* (1993b) era stata proposta per τ_{D_i} un'espressione basata su di un'approssimazione dei momenti della funzione di larghezza della rete frattale. Sulla scorta della definizione esatta di questi momenti, è qui possibile fare riferimento ad una relazione più precisa. La discussione che segue verrà fatta assumendo $\Delta_1=2$ che, vista l'analogia esistente tra Δ_1 ed R_L (*Claps et al.*, 1993a) è un valore rappresentativo del diametro topologico delle strutture elementari che sottendono lo sviluppo frattale di un reticolo idrografico naturale. In tal caso si ha:

$$\tau_{D_i} = \frac{1}{2^{D_i} + 1} \cdot \left(\frac{2^{D_i} - 1}{2^{D_i}} + 1 \right)^{D_i} \cdot L^{D_i} \quad (17)$$

e quindi

$$b = \left(\frac{1}{2^{D_i} + 1} \right)^{\frac{1}{D_i}} \left(\frac{2^{D_i} - 1}{2^{D_i}} + 1 \right) \cdot \frac{L}{v} \quad (18)$$

La più probabile dimensione frattale topologica delle reti idrografiche

I bacini idrografici sviluppano il loro reticolo drenante sotto la sollecitazione delle precipitazioni. In linea di principio le reti idrografiche risultanti potrebbero essere molto diverse per struttura topologica, forme macroscopiche, dimensioni dei diversi rami, pendenze, etc. Sembra però ragionevole ritenere che, in seguito al fatto che sia lo sviluppo sia il mantenimento di una rete richiedono che un lavoro debba essere compiuto dal bacino, le reti idrografiche mature rispondano a principi generali, quali ad esempio i criteri di minima dissipazione di energia nel concentrare e smaltire le precipitazioni o di minimo lavoro svolto per modellare la rete. La validità di questi principi, tra l'altro già dimostrata nelle linee generali (v. es. *Rinaldo et al.* 1992; *Rodriguez-Iturbe et al.*, 1992), conduce ai caratteri di similarità mostrata dalle reti idrografiche in condizioni geologiche e climatiche molto diverse.

Tra queste caratteristiche di reciproca somiglianza dei reticoli è oggi da inserire a pieno titolo la dimensione frattale topologica che, anche a dispetto di metodi di stima non sempre efficienti, mostra una evidente regolarità nella media intorno a valori prossimi ad 1.4 - 1.7. Questa dimensione, inoltre, assume un notevole significato idrologico alla luce di quanto mostrato nel paragrafo precedente.

Per comprendere le ragioni della sostanziale stabilità di D_i risulta utile trattare la funzione di risposta alla stregua di una funzione di densità di probabilità dei tempi di arrivo delle

particelle di pioggia alla sezione di chiusura del reticolo. In questo modo, infatti, è possibile richiamare il principio di massima entropia introdotto da *Jaynes* (1957) per ricercare tra le diverse forme possibili della funzione di risposta, quella più probabile consistentemente con l'informazione data sulla risposta stessa.

È utile precisare che detto criterio, seppur propriamente statistico nella sua formulazione, sottintende in questo caso specifico un significato fisico che può essere così sintetizzato. Il principio di massima entropia conduce alla massima uniformità possibile della funzione di risposta idrologica, in accordo con i vincoli imposti alla funzione stessa. In termini fisici ciò significa che conduce alla massima uniformità possibile dei tempi di percorrenza di una particella di pioggia dal punto di caduta alla sezione di chiusura. Nell'ipotesi assunta di velocità costante in ogni ramo della rete e di uguale lunghezza dei links, questo implica anche la massima uniformità dei nodi del reticolo per classi di distanza dalla sezione di chiusura che, almeno in linea di principio, risponde al requisito di ripartire in maniera uniforme sul bacino i carichi di lavoro necessari per smaltire le precipitazioni.

Seguendo un criterio molto prossimo a quello naturale di formazione delle reti idrografiche, noi porremo a confronto funzioni di risposta relative a reticoli aventi aste principali di uguale lunghezza L e lunghezza totale Z (proporzionale all'area contribuyente del bacino idrografico) variabile in funzione di D_t . È infatti ipotizzabile che, nelle varie fasi di formazioni di un reticolo, sia L ad essere controllata in primo luogo da fattori tettonici e sia invece Z ad essere condizionata da fattori idrologici. Per maggiore chiarezza si vuole porre in evidenza che $D_t = 1$ è rappresentativo di un reticolo degenerato formato da un unico ramo rettilineo e $D_t = 2$ è invece rappresentativo di un reticolo che tende a riempire il piano con una larghezza media del reticolo pari alla lunghezza della sua asta principale.

In fig. 7 vengono mostrati gli andamenti delle funzioni di risposta al variare di D_t . Il diametro topologico di riferimento è assunto invariante; di conseguenza, in base alla relazione (*Claps et al.* 1993b)

$$Z \propto \Delta^{D_t} \quad (19)$$

la lunghezza totale del reticolo cresce con D_t .

L'osservazione della figura mostra che il picco della funzione di risposta tende a decrescere rapidamente all'aumentare di D_t e presenta valori piuttosto stabili per $D_t > 1.4$; è anche possibile individuare in $D_t = 1.75$ il valore minimo assoluto del picco. Il significato di questo risultato in termini di dissipazione di energia connessa alla risposta idrologica è tuttora oggetto di ulteriori approfondimenti, tendenti anche ad analizzare l'eventuale incidenza di situazioni climatiche diverse.

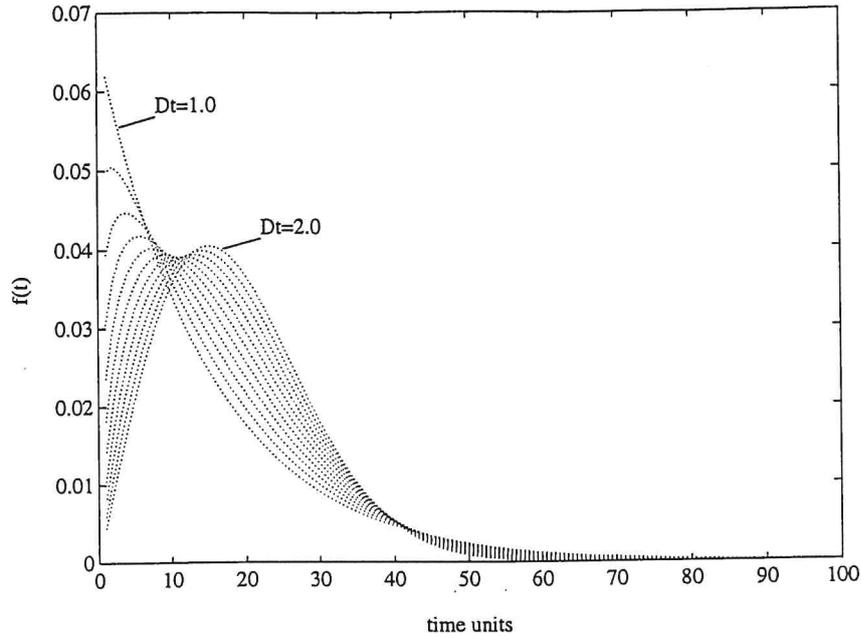


Fig. 7. Funzione di risposta di reticoli frattali con dimensione frattale D_t variabile tra 1 e 2 con incremento pari a 0.1. Le lunghezze dei segmenti e le velocità sono state assunte unitarie. Il valore assunto per il diametro topologico è pari a $\Delta=30$.

L'applicazione del principio di massima entropia per la ricerca del valore più probabile di D_t richiede che sia nota la funzione di entropia informativa (Shannon, 1948) della distribuzione dei tempi di arrivo. Questa funzione è fornita dalla

$$I[x] = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \ln[f(x)] dx \quad (20)$$

che, sostituendo la $f(x)$ con l'espressione fornita dalla (14), conduce nel caso in esame a

$$I(D_t) = 1 + \ln\left(\frac{b^{D_t}}{D_t}\right) - (D_t - 1) \cdot \left[\frac{1}{D_t} \psi(1) + \ln(b) \right] \quad (21)$$

avendo indicato con ψ la funzione speciale digamma. L'andamento della (21) è rappresentato, in fig. 8, in funzione di D_t . Come può osservarsi, l'entropia della distribuzione dei tempi di arrivo è massima per un valore di D_t pari all'incirca ad 1.5. Si può ancora notare che sono da ritenersi più probabili i valori di D_t maggiori di 1.5 che non quelli minori.

Questo risultato spiega su di una base statistica con un'interpretazione fisica tutta una serie di osservazioni condotte su reticoli reali ed assume un significativo valore se si fa riferimento alle stime di D_t condotte da Claps et al. (1993a) con riferimento a 8 reticoli dell'Italia meridionale, seguendo la procedura di stima basata sull'uso dell'entropia informativa delle reti frattali descritta in altra parte di questo lavoro.

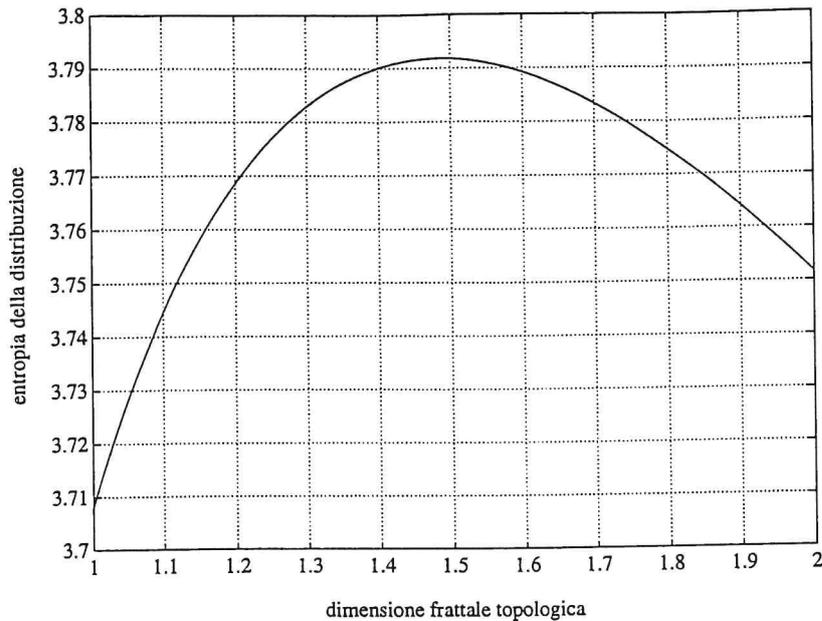


Fig. 8. Entropia della funzione di risposta in funzione di valori di D_t variabili tra 1 e 2.

CONCLUSIONI

Una rete idrografica può essere schematizzata con un modello di rete perfettamente frattale che tiene conto dei processi di ramificazione e di sinuosità alla base della evoluzione di una rete di drenaggio fluviale. La rete che si ottiene ha dimensione frattale globale che, in alcuni casi, si particolarizza in quella a cui sono pervenuti *La Barbera e Rosso* (1990) sulla base di un approccio hortoniano. In generale l'espressione della dimensione frattale è più complessa e differisce alquanto da quella comunemente usata in letteratura ($D=D_t D_s$).

Questo modello di rete dà luogo ad una risposta idrologica che, in condizioni di massima probabilità, condizionata alla conoscenza della lunghezza totale del reticolo idrografico (proporzionale all'area contribuente alla formazione del deflusso superficiale), è fornita dalla legge di Weibull con parametro di forma pari a D_t e parametro di scala anch'esso dipendente da D_t . Il significato idrologico di questa dimensione frattale viene così ad essere fortemente evidenziato.

L'applicazione del principio di massima entropia induce inoltre a ritenere che il valore più probabile di D_t è circa pari ad 1.5.

APPENDICE A: MOMENTI DELLA FUNZIONE DI LARGHEZZA DI UN RETICOLO FRATTALE

1. Momento del primo ordine

Caratteristiche del generatore (L=lunghezza dell'asta principale =1)

$\tau_1^{(1)}$: momento del primo ordine;

Δ_1 : diametro topologico;

M_1 : numero di elementi;

Caratteristiche della rete frattale ottenuta all' n-esimo livello di moltiplicazione

$\tau_1^{(n)}$: momento del primo ordine;

Δ_n : diametro topologico;

M_n : numero di elementi;

Nel passare dal primo al secondo livello di moltiplicazione si ha:

$$\tau_1^{(2)} = \frac{M_1}{\Delta_1 M_2} \tau_1^{(1)} + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \frac{M_1}{\Delta_1 M_2} \cdot (\tau_1^{(1)} + 1) \quad \text{per } \Delta_1 = 2$$

$$\tau_1^{(2)} = \frac{M_1}{\Delta_1 M_2} \tau_1^{(1)} + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \frac{M_1}{\Delta_1 M_2} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1^{(1)} + k) \quad \text{per } \Delta_1 > 2$$

Al terzo livello di sostituzione si ha:

$$\tau_1^{(3)} = \frac{M_2}{\Delta_1 M_3} \tau_1^{(2)} + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \frac{M_2}{\Delta_1 M_3} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1^{(2)} + k)$$

Pertanto, all' n-esimo livello di moltiplicazione, essendo inoltre $M_{n-1}/M_n = 1/M_1$, si ha:

$$\begin{aligned} \tau_1^{(n)} &= \frac{1}{\Delta_1 M_1} \left[\tau_1^{(n-1)} + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1^{(n-1)} + k) \right] = \frac{1}{\Delta_1 M_1} \left[M_1 \tau_1^{(n-1)} + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} k \right] = \\ &= \frac{\tau_1^{(n-1)}}{\Delta_1} + \frac{M_1 - 1}{2M_1} \end{aligned}$$

Per $n \rightarrow \infty$ $\tau_1^{(n)} = \tau_1^{(n-1)} = \tau_1$, e quindi:

$$\tau_1 \left(1 - \frac{1}{\Delta_1} \right) = \frac{M_1 - 1}{2M_1} \Rightarrow \tau_1 = \frac{M_1 - 1}{2M_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 - 1} \quad (\text{A.1})$$

che vale per L (lunghezza dell'asta principale) = 1; per L \neq 1 si ha:

$$\tau_1 = \frac{M_1 - 1}{2M_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 - 1} \cdot L$$

2. Momento di ordine $r \neq 1$ rispetto all'origine

Per $L=1$ si ha:

$$\tau_r^{(2)} = \frac{M_1}{M_2} \frac{\tau_r^{(1)}}{\Delta_1^r} + \frac{M_1}{M_2 \Delta_1^r} \cdot \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1^{(1)} + k)^r$$

$$\tau_r^{(n)} = \frac{1}{M_1 \Delta_1^r} \left[\tau_r^{(n-1)} + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1^{(n-1)} + k)^r \right]$$

Per $n \rightarrow \infty$, $\tau_r^{(n)} = \tau_r^{(n-1)} = \tau_r$, per cui:

$$\tau_r = \frac{1}{M_1 \Delta_1^r} \left[\tau_r + \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1 + k)^r \right] =$$

$$= \frac{1}{M_1 \Delta_1^r - 1} \cdot \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1 + k)^r$$

In particolare, per $r = D_i$ si ha:

$$\tau_{D_i} = \frac{1}{M_1^2 - 1} \cdot \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1 + k)^{D_i}$$

Sostituendo τ_1 mediante la (A.1),

$$\tau_{D_i} = \frac{1}{M_1^2 - 1} \cdot \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} \left(\frac{M_1 - 1}{2M_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 - 1} + k \right)^{D_i} =$$

$$= \frac{1}{(M_1 + 1) \cdot (\Delta_1 - 1)} \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} \left(\frac{M_1 - 1}{2M_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 - 1} + k \right)^{D_i}$$

che, esplicitando $M_1 = \Delta_1^{D_i}$ (Claps et al., 1993b) ed assumendo $\Delta_1 = 2$, diventa

$$\tau_{D_i} = \frac{1}{2^{D_i} + 1} \cdot \left(\frac{2^{D_i} - 1}{2^{D_i}} + 1 \right)^{D_i}$$

Per $L \neq 1$ occorre moltiplicare il secondo membro per L^r . In particolare si ha:

$$D_t = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_{D_t} = \tau_1 = \frac{1}{2} L$$

$$D_t = 2 \quad \Rightarrow \quad \tau_{D_t} = \tau_2 = 0.613 L^2$$

APPENDICE B: DERIVAZIONE DELLA RISPOSTA IDROLOGICA CON APPROCCIO MECCANICO-STATISTICO

Basandosi su un approccio di tipo meccanico-statistico, *Lienhard* (1964) e *Lienhard e Meyer* (1967), pervengono ad un'espressione dell'idrogramma unitario istantaneo del tipo:

$$f(t) = \left[\frac{c/b^a}{\Gamma(a/c)} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{a/c} \right] \cdot t^{a-1} \cdot \exp\left[-\frac{a}{c} \left(\frac{t}{b}\right)^c\right] \quad t \geq 0 \quad \dots \quad (B.1)$$

in cui a, b, e c sono i parametri della distribuzione.

Nell'ipotesi in cui a e c siano eguali la (B.1) si specializza in una distribuzione di Weibull:

$$f(t) = \frac{a}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{b}\right)^a\right] \quad (B.2)$$

i cui parametri sono solo a e b.

Alla (B.1) si perviene ricercando la funzione f(t) più probabile soggetta ai seguenti vincoli:

1) principio di conservazione della massa:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i = N \quad (B.3)$$

dove con N_i si è indicato il numero di particelle d'acqua che pervengono alla sezione di chiusura al tempo t_i e con N il numero complessivo delle particelle;

2) proporzionalità fra il numero di modi g_i secondo cui N_i particelle d'acqua possono pervenire alla sezione di chiusura nell'intervallo di tempo $[t_i-1, t_i]$ ed una specificata potenza di t_i :

$$g_i = c \cdot t_i^{a-1} \quad (B.4)$$

3) vincolo sul momento di ordine c rispetto all'origine:

$$E[t^c] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i}{N} \cdot t_i^c = b^c \quad (c > 0) \quad (B.5)$$

Analisi dei vincoli

Tenuto conto del fatto che il vincolo 1) è un vincolo banale, maggiore attenzione va posta circa i vincoli 2) e 3). Per quanto riguarda il vincolo 2), *Claps et al.* (1993b) hanno mostrato come, nell'ipotesi in cui il reticolo idrografico possa considerarsi perfettamente frattale, l'esponente è circa uguale alla dimensione frattale topologica D_t del reticolo stesso, per cui:

$$a = D_t \quad (B.6)$$

Il vincolo 3), nell'ipotesi in cui si voglia considerare la lunghezza totale Z del reticolo quale principale fattore condizionante la risposta idrologica di un bacino idrografico, si particolarizza nel modo seguente:

$$E[t^{D_t}] \propto Z \quad (B.7)$$

Circa i passaggi analitici che consentono di pervenire alla (B.7) occorre fare qualche precisazione. Come mostrato in Appendice A, il generico momento rispetto all'origine di ordine r diverso da 1 (τ_r) della funzione di larghezza W di un reticolo frattale risulta pari a:

$$\tau_r = \frac{1}{M_1 \Delta_1^r - 1} \cdot \frac{M_1 - 1}{\Delta_1 - 1} \cdot L^r \cdot \sum_{k=1}^{\Delta_1 - 1} (\tau_1 + k)^r \quad (B.8)$$

che, per $\Delta_1=2$ e per $r = D_t$ diventa

$$\tau_{D_t} = \frac{1}{2^{D_t} + 1} \cdot \left(\frac{2^{D_t} - 1}{2^{D_t}} + 1 \right)^{D_t} \cdot L^{D_t} \quad (B.9)$$

Nell'ipotesi in cui, per l'intero reticolo si possano ritenere costanti la velocità e la lunghezza dei segmenti ed indicando con ℓ la lunghezza del percorso che separa il nodo di monte del generico link dalla sezione di chiusura, può scriversi:

$$E[t^{D_t}] = E\left[\left(\frac{\ell}{v}\right)^{D_t}\right] = \frac{1}{v^{D_t}} E[\ell^{D_t}] = \frac{1}{v^{D_t}} \cdot \tau_{D_t} \quad (B.10)$$

e poiché per links di lunghezza unitaria vale (*Claps et al.*, 1993b):

$$L^{D_t} = Z \quad (B.11)$$

in definitiva si ottiene:

$$E[t^{D_t}] = \frac{1}{v^{D_t}} \cdot \frac{1}{2^{D_t} + 1} \cdot \left(\frac{2^{D_t} - 1}{2^{D_t}} + 1 \right)^{D_t} \cdot Z \propto Z \quad (B.12)$$

BIBLIOGRAFIA

- Beer, T. and M. Borgas, Horton's laws and the fractal nature of streams, *Water Resour. Res.*, 29 (5), 1475-1487, 1993.
- Claps, P., Fiorentino and G. Oliveto, The informational entropy of fractal river networks, submitted to *Journal of Hydrology*, 1993a.
- Claps, P., M. Fiorentino and G. Oliveto, The most probable hydrologic response of fractal river networks, Paper presented at the "International Conference on Hydrology and Water Resources", New Delhi, Dec. 20-22, 1993b.
- Feder J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- Fiorentino, M. e P. Claps, On what can be explained by the entropy of a channel network, in Singh e Fiorentino (Eds.) *Entropy and Energy Dissipation in Water Resources*, 139-154, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1992.
- Jaynes, E. T., Information theory and statistical mechanics, *I. Phys. Rev.*, 106, 620-630, 1957.
- La Barbera, P. and R. Rosso, On the fractal dimension of stream networks, *Water Resour. Res.*, 25(4), 735-741, 1989.
- La Barbera, P., and R. Rosso, Reply to comment on "On the fractal dimension of stream networks", by D.G.Tarboton, R.L.Bras and I.Rodriguez-Iturbe, *Water Resour. Res.*, 26(9), 2245-2248, 1990.
- Lienhard, J. H., A Statistical mechanical prediction of the dimensionless unit hydrograph. *J. Geophys. Res.*, Vol. 69, N.24, 5231-5238, 1964.
- Lienhard, J. H. and P.L. Meyer, A physical basis for the generalized Gamma distribution, *Quart. Appl. Math.*, 25, 330-334, 1967.
- Liu, T., Fractal structure and properties of stream networks, *Water Resour. Res.*, 28 (11), 2981-2988, 1992.
- Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New York, 1982.
- Marani, A., R.Rigon and A. Rinaldo, A note on fractal channel networks, *Water Resour. Res.*, 27 (12), 3041-3049, 1991.
- Nikora, V.I., and V.B. Sapozhnikov, River network fractal geometry and its computer simulation, *Water Resour. Res.*, 29(10), 3569-3575, 1993.
- Nikora, V.I., V.B. Sapozhnikov, and D.A.Noever, Fractal geometry of individual river channels and its computer simulation, *Water Resour. Res.*, 29(10), 3561-3568, 1993.
- Nikora, V. I., On self-similarity and self-affinity of drainage basins. *Water Resources Research*, (30), 1, 1994.
- Rigon, R., A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R.L. Bras, and E.Ijjasz-Vasquez, Optimal channel networks: A framework for the study of river basin morphology, *Water Resour. Res.*, 29(6), 1635-1646, 1993.

- Rinaldo, A., Marani, A. e R.Rigon, Geomorphological dispersion, *Water Resour. Res.*, **27** (4), 513-525,1991.
- Rinaldo, A, I. Rodriguez-Iturbe I., R.Rigon, R.L.Bras, E.Ijjasz-Vasquez and A.Marani, Minimum Energy and fractal structures of drainage networks, *Water Resour. Res.*, **28** (9), 2183-2195,1992.
- Rodriguez-Iturbe, I. and J.B. Valdés, The geomorphologic structure of the hydrologic response. *Water Resour. Res.*, **15**(6), 1409-1420, 1979.
- Rodriguez-Iturbe I., A.Rinaldo, R.Rigon, R.L.Bras, A.Marani and E.Ijjasz-Vasquez, Energy dissipation, runoff production and the 3-dimensional structure of river basins, *Water Resour. Res.*, **28** (4), 1095-1103,1992.
- Shannon, C. E., The mathematical theory of communications, I and II. *Bell System Tech. J.*, **27**, 379-423, 1948.
- Tarboton, D. G., R.L. Bras, and I. Rodriguez-Iturbe, The fractal nature river networks, *Water Resour. Res.*, **24**(8), 1317-1322, 1988.
- Tarboton, D. G., R.L. Bras and I. Rodriguez-Iturbe, Comment on "On the fractal dimension of stream networks", by La Barbera, P. and R. Rosso, *Water Resour. Res.*, **26**(9), 2243-2244, 1990.
- Troutman B. M. and M. B. Karlinger. Unit hydrograph approximation assuming linear flow trough topologically random channel networks, *Water Resour. Res.*, **21**(5), 743-754, 1985.