

MODELLI STOCASTICI DEI DEFLUSSI DEI CORSI D'ACQUA

Dissertazione presentata per il conseguimento del
DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA IDRAULICA

Pierluigi CLAPS

Visto, si attesta l'avvenuto deposito in
data odierna, presso l'ufficio Stampa
della Prefettura di Potenza, degli
esemplari d'obbligo.



Potenza, n. - 8 LUG. 1996

L'ADDETTO STAMPA
IL DIRETTORE DI SEZIONE
(Dott. L. Rotondi)

A handwritten signature in black ink, likely belonging to the stamp official mentioned in the text below.

Università di Napoli Federico II, Università di Palermo,
Università di Roma "La Sapienza"

Vorrei ringraziare innanzitutto il prof. Fabio Rossi, costante punto di riferimento in tutto il periodo del dottorato e soprattutto guida scientifica nel mio percorso di formazione.

La mia gratitudine va inoltre al prof. Cosimo Vitale, docente di Probabilità e Statistica alla Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli, alla cui disponibilità e pazienza devo gran parte del bagaglio di conoscenze acquisite nel campo dell'analisi statistica delle serie storiche.

Un sentito grazie va al Collegio dei Docenti del Corso di Dottorato, in particolare al coordinatore, prof. Arturo Ragone, per la sua preziosa e costante assistenza.

Ringrazio infine il Direttore ed i docenti del Dipartimento di Idraulica di Napoli, presso il quale ho lavorato negli anni del Corso di Dottorato, ed il Direttore del Centro di Specializzazione e Ricerche Economico-Agrarie per il Mezzogiorno di Portici, per avermi permesso di accedere alle risorse di calcolo ed alle fonti bibliografiche ivi disponibili.

INDICE

1	<u>INTRODUZIONE</u>	
1.0	Premessa	p. 1
1.1	Caratteristiche dei processi dei deflussi fluviali	p. 4
2	<u>LA MODELLAZIONE DELLE SERIE IDROLOGICHE CON APPROCCIO PURAMENTE STATISTICO: LA COSTRUZIONE DEI MODELLI ARMA</u>	
2.1	La classe dei modelli lineari Autoregressivi-Media Mobile: genesi dei modelli ARMA	p. 8
2.2	Modelli della classe ARMA per il processo dei deflussi annui	p. 11
2.3	Modelli della classe ARMA per il processo dei deflussi stagionali	p. 14
3	<u>APPROCCIO CONCETTUALE ALLA COSTRUZIONE DI UN MODELLO STOCASTICO DEI DEFLUSSI ANNUI</u>	
3.1	Rassegna della letteratura sui modelli stocastici a base concettuale	p. 22
3.2	Impostazione del modello concettuale dei deflussi annui	p. 25
3.3	Identificazione del modello stocastico dei deflussi annui	p. 30
3.4	Effetto della variabilita' dell'input netto all'in- terno dell'anno	p. 35
3.5	Ricostruzione su base annua dell'input netto e del deflusso di falda profonda	p. 39
4	<u>PROCESSO DEI DEFLUSSI ANNUI: STIMA DEL MODELLO STOCASTICO A BASE CONCETTUALE</u>	
4.1.	Caratteristiche delle serie storiche dei deflussi annui e metodi di stima.	p. 41
4.2	Validazione delle stime dei parametri concettuali con l'impiego di "indici fisici"	p. 43

5	<u>APPROCCIO CONCETTUALE ALLA COSTRUZIONE DI MODELLI STOCASTICI DEI DEFLUSSI MENSILI</u>	
5.1	Modello concettuale dei deflussi mensili	p. 47
5.2	Identificazione di un modello stocastico conciso per i deflussi mensili.	p. 51
5.3	Limitazioni all'applicabilita' del modello stocastico conciso per i deflussi mensili	p. 55
5.4	Identificazione di un modello stocastico a due stadi per i deflussi mensili.	p. 58
5.5	Modello concettuale dei deflussi mensili per bacini senza falda profonda	p. 63
6	<u>STIMA DEL MODELLO STOCASTICO A BASE CONCETTUALE DEI DEFLUSSI MENSILI</u>	
6.1	Fasi della stima del modello stocastico a due stadi dei deflussi mensili	p. 65
6.2	Valutazione delle prestazioni statistiche della metodologia proposta	p. 73
7	<u>APPLICAZIONE DEI MODELLI A BACINI DELL'ITALIA MERIDIONALE</u>	
7.1	Organizzazione dei dati e controlli di qualita' delle serie storiche	p. 75
7.2	Analisi statistica preliminare	p. 77
7.3	Applicazioni del modello dei deflussi annui	p. 80
7.4	Applicazioni del modello dei deflussi mensili	p. 84
7.5	Confronto con il modello PAR(1)	p. 86
8	<u>ANALISI DELL'INPUT NETTO STIMATO</u>	
8.1	Analisi della periodicit�.	p. 88
8.2	Distribuzione di probabilita' degli input netti.	p. 90
9	<u>CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE</u>	p. 96

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

APPENDICI

- A 1.1 Modelli stocastici non della classe ARMA proposti
per la rappresentazione dei deflussi a scala
temporale annua e mensile p.a 1
- A 2.1 La costruzione dei modelli ARMA p.a 9
- A 2.2 La trasformazione dei dati p.a16
- A 2.3 Analisi della periodicità dei parametri nelle serie
temporali p.a18
- A 3.0 Riepilogo delle equazioni del bilancio di massa
per l'invaso lineare p.a20
- A.3.1 Controllo di identità delle medie dei modelli
concettuale e stocastico dei deflussi annui p.a24
- A.3.2 Campo di esistenza dei dei parametri del modello
stocastico dei deflussi annui p.a27
- A 3.3 Determinazione del coefficiente di esaurimento
della ricarica con varie ipotesi sulla
distribuzione dell'input p.a28
- A.3.4 Ricostruzione del deflusso di falda profonda p.a34
- A 5.0 Modello ARMA(1,1) concettualmente basato a residuo
strettamente stazionario per i deflussi mensili p.a36
- A.5.1 Proprietà del modello ARMA(2,2) p.a38
- A 5.2 Campo di esistenza dei parametri autoregressivi del
modello ARMA(2,2) a base concettuale p.a41
- A 7.1 Analisi statistica preliminare delle serie
temporali p.a45

SOMMARIO

Si prende in considerazione il processo dei deflussi fluviali alle scale di aggregazione annua e mensile, con lo scopo di identificare per essi modelli stocastici a partire da una schematizzazione idrologica del fenomeno.

L'osservazione dei deflussi relativi a bacini appenninici in cui si possa trascurare l'apporto dovuto allo scioglimento delle nevi consente di individuare a scala mensile tre componenti principali: una prima componente e' dovuta al contributo di falde ad esaurimento pluriennale, una seconda ai deflussi provenienti da falde ad esaurimento plurimensile o stagionale mentre la parte rimanente e' una componente a ritardo submensile che costituisce il deflusso diretto.

Su questa base si puo' impostare un modello concettuale dei deflussi mensili considerandoli l'uscita di un sistema lineare costituito da due invasi in parallelo piu' una traslazione senza ritardo. I parametri del sistema concettuale sono quattro, costanti da mese a mese: due sono relativi all'esaurimento delle falde e due alla loro ricarica.

Le equazioni di bilancio di massa scritte per il sistema considerato conducono ad una equazione avente forma Autoregressiva-Media Mobile, attraverso la quale i parametri del modello concettuale sono messi in corrispondenza biunivoca con i quattro parametri di un modello stocastico ARMA(2,2).

Il residuo del modello stocastico, di tipo pseudo-periodico, corrisponde al deflusso diretto o, a meno di una costante di proporzionalita', all'afflusso netto al bacino, che rappresenta la quantita' in ingresso al sistema lineare.

Nel caso in cui manchi o sia trascurabile l'apporto della falda ad esaurimento pluriennale, il modello ARMA(2,2) si riduce ad un modello ARMA(1,1).

I parametri concettuali non sono tuttavia risultati stimabili attraverso i parametri del modello stocastico ARMA(2,2) i quali, a causa dei vincoli di natura concettuale a cui sono sottoposti, possono assumere valori compresi in una regione molto ridotta dello spazio dei parametri. Cio' sottintende che a livello

mensile non e' possibile stimare simultaneamente i parametri relativi alle due falde.

Si sono perciò identificati un modello "a due stadi" ed una procedura iterativa di stima che consentono di stimare separatamente i parametri relativi ai due elementi concettuali di invaso, ognuno considerato alla scala temporale più appropriata.

Il modello stocastico identificato e' un doppio ARMA(1,1); il primo dei quali e' relativo alla scala temporale annua e consente di stimare i parametri della falda ad esaurimento pluriennale, mentre il secondo e' relativo ai deflussi mensili di un "sottosistema stagionale" composto dalla falda ad esaurimento stagionale e dal deflusso diretto. I deflussi di questo sottosistema sono ottenuti sottraendo dai deflussi mensili totali la stima del contributo della falda profonda.

Poiché quest'ultimo apporto e' ricavabile solo attraverso la stima dell'afflusso netto, il quale e' un prodotto terminale dell'applicazione del modello dei deflussi mensili, la stima del secondo ARMA(1,1) ha carattere iterativo.

Alla variabile afflusso netto, intesa come proporzionale al deflusso diretto che e' il residuo del modello stocastico, risultano applicabili criteri di similitudine idrologica che consentono di limitare il numero di parametri della relativa distribuzione di probabilita'.

ABSTRACT

The streamflow process at the annual and monthly scale of aggregation is considered, in order to identify stochastic models using an hydrological schematization of the phenomenon.

In basins where the hydrologic year shows only two distinct climatic seasons (such as basins of the Appennini Mountains, in Italy), if the snowmelt runoff is negligible monthly streamflows exhibit three main components: one is due to groundwater contributes from aquifers with over-year recession (called "deep" groundwater runoff), another is due to groundwater contributes from aquifers with over-month recession (called "seasonal" groundwater runoff) and the last one is due to the remaining components having under-month time-lag, representing the direct runoff

A monthly flows conceptual model can be conceived from the above considerations, where every component is represented as a linear element outlet, so that the monthly runoff is regarded as the output of a linear system having two linear reservoirs in parallel and a pure translation with no lag. This conceptual linear system has four time-independent parameters: two are related to the groundwater recharge while two represent the groundwater recession.

The system mass-balance equations lead to an AutoRegressive-Moving Average form of equation, which allows to relationships between the conceptual parameters and the four parameters of an ARMA(2,2) stochastic model. The stochastic model has pseudo-periodic residual corresponding to the direct runoff, which is proportional to the system net input.

If the deep groundwater runoff misses or can be neglected, the ARMA stochastic model become of order (1,1).

The limitations induced in the ARMA(2,2) model parameter space from the conceptual constraints showed that conceptual parameters cannot be correctly estimated using the above stochastic model. This denotes that a simultaneous estimate of the conceptual parameters referred to the two aquifers is not feasible at monthly time scale.

A "two-stage" model and an iterative estimation procedure have therefore been identified in order to disconnect the estimation stages of the two aquifer parameters and to perform each stage at the appropriate time scale.

The "two-stage" stochastic model is composed by two ARMA(1,1) models: the first one is related to the annual time scale and allows to estimate the deep aquifer parameters while the second one is to be applied to a "seasonal subsystem" composed by the seasonal aquifer and the direct runoff. The seasonal subsystem runoff have to be derived by subtracting the estimated deep aquifer contribution from the whole monthly runoff.

The deep aquifer monthly runoff evaluation is performed conceptually by making use of net input estimates, resulting in turn from the second ARMA(1,1) model estimation. All this justifies the iterative character of the second ARMA(1,1) model.

A regional analysis is performed on the net input random variable, in order to reduce the required parameters of the associated probability distribution function.

1 INTRODUZIONE

1.0 PREMESSA

Le problematiche di gestione delle risorse idriche hanno assunto importanza sempre piu' rilevante in virtu' della stretta relazione che esiste tra disponibilita' di acqua e sviluppo economico. La creazione di schemi idrici sempre piu' complessi ha reso necessario il ricorso a tecniche di ottimizzazione che potessero essere di supporto sia alla fase di dimensionamento degli invasi che alla gestione dei sistemi idrici.

L'impiego delle tecniche di ottimizzazione presuppone la definizione di modelli probabilistici del regime dei corsi d'acqua. Questi modelli possono essere adoperati sia per generare sequenze sintetiche, cioe' artificiali, di deflussi fluviali (necessarie alle fasi di dimensionamento e di controllo di affidabilita' degli schemi), sia per effettuare previsioni a supporto delle fasi di gestione. E' cosi' nata e si e' sviluppata una branca dell'Idrologia, denominata "idrologia sintetica" o "idrologia operativa".

Lo studio del regime dei deflussi fluviali e' condotto attraverso la costruzione di modelli stocastici, strutturati in modo da conseguire per lo piu' i seguenti obiettivi:

- finalita' descrittiva, rivolta alla individuazione alla riproduzione di caratteristiche statistiche eventualmente presenti nelle serie temporali dei deflussi
- finalita' previsiva, la quale, a seconda delle scale temporali considerate, puo' avere un interesse a medio e breve termine, fino ad assumere le caratteristiche di previsione in tempo reale
- generazione di serie "sintetiche" di lunghezza qualsiasi, riproducenti le caratteristiche della serie storica osservata in modo da essere statisticamente indistinguibili dalla serie originaria.

Sulla scorta di questi obiettivi, il processo dei deflussi fluviali e' stato indagato, in passato, prevalentemente con i criteri dell'analisi statistica delle serie storiche, secondo i

quali sono le serie temporali stesse a dover suggerire il modello stocastico piu' adatto. In particolare, si e' privilegiato l'obiettivo della generazione di serie sintetiche, per raggiungere il quale e' sufficiente che le serie originarie e quelle generate presentino le stesse caratteristiche statistiche, rispetto a quello di dare una interpretazione del processo.

L'impiego dei metodi dell'analisi statistica presuppone un sostanziale disinteresse per le informazioni a priori disponibili sul processo indagato, mentre vengono sottolineati i caratteri statistici specifici delle singole serie, allo scopo di ottenere per esse una descrizione ottimale.

E' l'esatto contrario di quanto dovrebbe essere fatto nello studio di un fenomeno fisico secondo il metodo scientifico:

- tendere alla sintesi delle conoscenze empiriche e teoriche al livello minimo di scala, temporale o spaziale, con le conoscenze empiriche basate sull'osservazione dei fenomeni alla scala di interesse ed a quelle superiori; sintesi che si concreta nella formulazione di ipotesi che possano essere verificate - [KLEMES, 1983].

Il processo dei deflussi fluviali e' l'unico tra i fenomeni idrologici che consente l'individuazione della scala piu' appropriata per l'osservazione di una data struttura idrologica, poiche' consente l'aggregazione degli eventi fino a scale superiori a quelle osservabili con l'esperienza umana diretta.

Rappresentando il processo in forma concettuale risulta quindi possibile seguire una struttura idrologica, identificata alla sua base temporale caratteristica, alle scale temporali inferiori e tentare cosi' di collegare le rappresentazioni dei fenomeni su grande scala con i fenomeni osservabili alla scala minima.

Nello studio del processo dei deflussi e' percio' particolarmente adatto l'impiego di modelli idrologici concettuali, i quali, tra l'altro, consentono di verificare le ipotesi di base controllando la compatibilita' dei valori assunti dai parametri rispetto al significato idrologico che hanno.

1.0.1 Obiettivi dello studio

Le considerazioni sopra esposte sottintendono la necessita' di dare maggiore importanza alle basi fisiche del fenomeno dei deflussi nell'ambito della loro caratterizzazione stocastica. Ci si e' pertanto posti l'obiettivo di studiare il processo dei deflussi, in particolare a scala mensile, mediante modelli stocastici fondati su basi idrologiche, cioe' identificati a partire da una interpretazione concettuale del fenomeno fisico.

Considerando il deflusso come la variabile in uscita da un sistema concettuale lineare, si istituisce una corrispondenza tra le relazioni che descrivono il sistema e le espressioni di modelli stocastici lineari, in particolare modelli della classe ARMA (AutoRegressive - Moving Average), che sono peraltro preferiti anche nella modellazione stocastica empirica dei processi idrologici. Oltre a costituire il mezzo attraverso il quale si raggiunge l'identificazione del modello stocastico, con l'approccio proposto ci si prefigge l'obiettivo di assegnare significato concettuale ai parametri del modello stocastico. I vantaggi dell'impiego di modelli a base fenomenologica rispetto a quelli a base puramente statistica si evidenziano infatti in diversi aspetti. Un modello a base fenomenologica:

- consente di utilizzare informazioni a priori, fondamentali per operare in situazioni di scarsita' o mancanza di dati
- rende quindi piu' semplice il trasferimento della informazione idrologica tra bacini idrologicamente simili
- consente un "controllo di qualita'" a posteriori sulla serie storica, attraverso una valutazione di congruenza dei parametri

Sostanzialmente, pero', un modello stocastico a base fenomenologica si propone finalita' interpretative per il processo indagato, come sottolineato da KLEMES [1974]:

"The purpose of a physically oriented model is to improve our understanding of the process, to uncover its inherent regularities and uncertainties and their causes, and thereby to enable us to use operational models with intelligence"

anche a costo di peggiorare l'efficienza statistica rispetto a modelli identificati statisticamente; prosegue infatti Klemes:

"The rather paradoxical result is that a better understanding of the physical nature of historical processes may lead to simpler and 'less accurate' operational models".

1.1 CARATTERISTICHE DEI PROCESSI DEI DEFLUSSI FLUVIALI

1.1.1 Concetto di processo stocastico, processo stazionario e non stazionario

Definiamo innanzitutto il processo aleatorio, o stocastico, x_t , come una "famiglia di variabili casuali descritte da un parametro t appartenente ad un insieme parametrico T " [PICCOLO & VITALE, 1984]. Esso è caratterizzato dalla distribuzione di probabilità multipla (congiunta) per qualsiasi sottoinsieme di T .

La classe di processi stocastici di maggiore interesse per i problemi idrologici è quella dei processi CONTINUI (i valori della variabile variano in modo continuo, cosa che avviene sempre nei processi fisici) a PARAMETRO DISCRETO (l'indice può assumere solo valori interi, corrispondenti ad altrettanti intervalli temporali): $\{x_t; t=1,2,\dots\}$. È possibile anche la rappresentazione a parametro CONTINUO, dove l'indice varia in un intervallo di numeri reali, ma è meno comoda.

Si definisce poi SERIE TEMPORALE o SERIE STORICA una "parte finita di una realizzazione di un processo stocastico", dove per realizzazione si intende un campione osservato (infinito, perché tale è T), ovvero una "traiettoria", tra le tante possibili, di un processo aleatorio. Una serie storica è quindi un insieme limitato di dati rilevati sequenzialmente nel tempo ad un fissato intervallo temporale, per cui l'indice dell'intervallo si identifica col parametro della variabile aleatoria: x_t è l'osservazione rilevata nell'istante o nell'intervallo t .

Nell'ambito delle serie idrologiche, piuttosto che effettuare un campionamento (cioè una misura) in un dato istante, si cumula la grandezza sull'intervallo di tempo, per cui quando si

parla di serie storiche annue o mensili ci si riferisce a sequenze di dati cumulati, o mediati, sull'anno o sul mese. Le grandezze di riferimento usate per la misura dei deflussi possono essere:

- portate medie nell'intervallo di tempo di riferimento, in mc/s
- volume di deflusso, in milioni di metri cubi (Mmc o $mc \cdot 10^6$)
- altezza di deflusso sulla superficie del bacino sotteso, in mm.

Definiamo ora un processo STRETTAMENTE STAZIONARIO come quel processo le cui proprietà non dipendono da t , il che avviene quando la distribuzione di probabilità congiunta di un gruppo qualsiasi di variabili $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}\}$ non dipende da K .

Diciamo invece che un processo è CICLO-STAZIONARIO o PERIODICO o STAGIONALE se la distribuzione di probabilità si ripete identicamente per $k=S$, con S fissato e pari al periodo della componente ciclica.

Si dice, ancora, che un processo è DEBOLMENTE STAZIONARIO se la media e la varianza non dipendono dal tempo e la funzione di autocovarianza dipende solo dal ritardo (Lag). Se un processo è debolmente stazionario e Gaussiano è anche strettamente stazionario.

Si definisce, infine, PSEUDO-PERIODICO un processo in cui la funzione di autocorrelazione ha un andamento periodico, ma smorzato in ampiezza e fase [BOX & JENKINS, 1976]. Esso corrisponde ad un processo in cui è presente una componente periodica di tipo stocastico invece che deterministica; in particolare, se la componente periodica viene caratterizzata da una mistura di seni e coseni, i rispettivi coefficienti ed angoli di fase sono delle variabili casuali.

All'aumentare o diminuire dell'intervallo t di riferimento possono emergere o diventare meno evidenti alcune delle caratteristiche del processo fisico e, di conseguenza, può cambiare la sua struttura in senso stocastico: ciò spiega l'importanza di definire la scala temporale di interesse.

1.1.2 Caratteristiche fisiche dei processi idrologici

I processi idrologici possono considerarsi generati od influenzati da fattori astronomici, fattori e processi relativi all'ambiente terrestre e fattori antropici [YEVJEVICH, 1987].

Gli effetti di questi fattori causali sono rilevabili a scale temporali diverse. Per esempio, da una serie di deflussi annui non e' possibile rilevare gli effetti dovuti alla ciclicita' che caratterizza l'irraggiamento solare, mentre, e' possibile scoprire eventuali disomogeneita' della serie (nonstazionarieta' in media o varianza, variazioni improvvise dei parametri), per esempio dovute alle attivita' umane quali possono essere regolazioni dei deflussi, captazioni ecc.

Dal punto di vista dei soli fattori causali propri dell'ambiente terrestre (atmosfera, che attraverso i processi che avvengono in essa "trasmette" la periodicita' dei fattori astronomici ed ambiente geologico, costituito dal bacino idrografico) si puo' tentare una caratterizzazione dei processi idrologici alle varie scale temporali, esaminandone le componenti non puramente casuali che vi si rilevano.

Si puo' operare una schematizzazione del deflusso fluviale considerandolo somma di contributi dovuti a processi fisici distinti, ognuno dei quali assume particolare evidenza ad una data scala temporale.

Per bacini nei quali si possa trascurare l'apporto dovuto allo scioglimento delle nevi questi contributi sono:

- DEFLUSSO PROFONDO, a ritardo pluriennale, dovuto al contributo della falda sotterranea ad esaurimento pluriennale
- DEFLUSSO SOTTERRANEO STAGIONALE, a ritardo plurimensile, dovuto al contributo della falda sotterranea ad esaurimento plurimensile (stagionale)
- DEFLUSSO DIRETTO , a ritardo plurigiornaliero, somma del deflusso ipodermico o subsuperficiale, dovuto al contributo di drenaggio del suolo, e di quello superficiale, a ritardo orario, dovuto al ruscellamento dei versanti.

A seconda della base temporale Dt che si considera (annuale, mensile, settimanale, giornaliera, oraria) ognuna di queste componenti si puo' riguardare come:

- uscita da un invaso lineare se il ritardo e' superiore a Dt
- urto casuale se il ritardo e' inferiore a Dt .

1.1.3 Caratteristiche statistiche dei processi idrologici.

L'esigenza di utilizzare i deflussi fluviali e quindi di intervenire sul regime dei corsi d'acqua ha portato ad indagare le relative sequenze temporali alla ricerca di meccanismi che consentissero di caratterizzare il fenomeno in senso statistico.

A partire dagli anni '60 da questa sforzo di ricerca nascevano l'effetto Hurst, l'effetto Noah, l'effetto Joseph, e cosi' via, i quali dovevano rappresentare altrettante prerogative delle serie idrologiche, non sempre verificabili a causa della difficolta' di reperire serie storiche sufficientemente lunghe (LAWRANCE & KOTTEGODA, [1977], FRANCHINI & TODINI [1981]).

La caratteristica piu' importante nelle serie temporali idrologiche e', in ogni caso e ad ogni scala temporale, la dipendenza -o persistenza- che e' misurabile statisticamente con la correlazione seriale o autocorrelazione. L'autocorrelazione su base temporale annua ha preso storicamente il nome di "persistenza a lungo termine" mentre l'autocorrelazione su base temporale mensile, o inferiore, e' stata qualificata come "persistenza a breve termine".

Dei vari aspetti riguardanti le caratteristiche indicate e delle classi di modelli che sono stati proposti per riprodurle verra' piu' diffusamente riferito nell'appendice A 1.1.

Un discorso a parte meritano le caratteristiche di frequenza dei valori inferiori al valore medio (magre) e quelle di lunghezza dei periodi di deficit. Per questi indici si pone, piu' che altro, la necessita' di preservarli nei modelli di generazione di serie sintetiche, mentre non vengono in generale considerate caratteristiche peculiari delle serie idrologiche.

Un elenco di statistiche delle serie temporali dei deflussi significative dal punto di vista idrologico potrebbe essere il seguente :

MEDIA

VARIANZA

COEFFICIENTE DI ASIMMETRIA

CORRELAZIONE TEMPORALE (E SPAZIALE)

MASSIMO DEFICIT CUMULATO STARDARDIZZATO (Rescaled Adjusted Range)

COEFFICIENTE DI HURST

DURATA DEI PERIODI CRITICI (Run Length)

DEFICIT E SURPLUS CUMULATI (Run Sums)

PROPRIETA' DEGLI ATTRAVERSAMENTI [della linea del deflusso medio] (Crossing Properties)

FREQUENZA DEI VALORI SUPERIORI OD INFERIORI AD UNA SOGLIA

PROPRIETA' AGGREGATIVE (aggregation properties).

2 LA MODELLAZIONE DELLE SERIE IDROLOGICHE CON APPROCCIO PURAMENTE STATISTICO: LA COSTRUZIONE DEI MODELLI ARMA

2.1 LA CLASSE DEI MODELLI LINEARI AUTOREGRESSIVI-MEDIA MOBILE: GENESI DEI MODELLI ARMA

Si fa qui riferimento allo schema riportato in PICCOLO & VITALE [1984] caratterizzato dai seguenti passi:

a) Il processo lineare:

Il teorema di Wold afferma: ogni processo stocastico x_t stazionario puo' sempre decomporre in due processi stocastici stazionari e mutuamente incorrelati:

$$X_t = Z_t + V_t$$

$$V_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos \Omega_j t + \beta_j \sin \Omega_j t)$$

$$Z_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_2 a_{t-2} + \dots, \quad \sum \phi_i^2 < \infty$$

$$\mu = E[X_t]$$

dove:

$a_t = WN(0, \sigma_a^2) =$ variabili incorrelate ed identicamente distribuite: "Rumore Bianco" (White Noise)

$V_t =$ componente deterministica = combinazione lineare infinita di onde periodiche con ampiezza e fase che sono variabili casuali ma con frequenza angolare (Ω_j) deterministica. Verificatosi un dato evento, le variabili α_j, β_j assumeranno i valori numerici a_j e b_j , per cui V_t sara' un'onda perfettamente periodica (deterministica).

$Z_t =$ processo lineare, componente puramente stocastica di X_t , combinazione lineare infinita di impulsi puramente casuali.

b) Il modello Media mobile (MA)

E' una approssimazione del processo lineare, ottenuta limitando il numero di termini della sommatoria:

$$\phi_j = -\theta_j \quad j = \{1, 2, \dots, q\}$$

$$\phi_j = 0 \quad \text{per } j > q$$

$$Z \sim \text{MA}(q) \Rightarrow Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Il processo media mobile di ordine q e' caratterizzato dai $q+1$ parametri $\{\theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_a^2\}$.

Introdotta l'operatore ritardo B tale che $B^j Z_t = Z_{t-j}$ si definisce l'operatore media mobile di ordine q :

$$\theta(B) = 1 - B\theta_1 - B^2\theta_2 - \dots - B^q\theta_q$$

per cui si puo' usare $\theta(B)$ come un filtro lineare, o funzione di trasferimento, per trasformare a_t in Z_t :

$$Z_t = \theta(B)a_t$$

$\theta(B)$, fornendo la combinazione lineare degli shocks passati, costituisce la memoria degli urti casuali sul sistema a meno di uno shock a_t , imprevedibile, al tempo t .

c) Il modello Autoregressivo (AR)

Se il processo media mobile $Z_t \sim \text{MA}(q)$ e' "invertibile" (si veda PICCOLO & VITALE, 1984), si puo' scrivere:

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \dots + \pi_k Z_{t-k} + \dots + a_t$$

(Modello AR (∞)).

Si parla di modello AutoRegressivo perche' e' paragonabile ad una regressione della variabile Z_t su se stessa.

Limitando la sommatoria a p termini, ponendo: $\pi_j=0 \{j>p\}$, e considerando l'operatore:

$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \pi_j B^j$$

si ha il filtro lineare :

$$AR(P) : Z_t \pi(B) = a_t$$

caratterizzato dai p+1 parametri $(\pi_1, \pi_2 - \pi_p, \sigma_a^2)$

Il processo AR(P), al di la' di uno shock a_t , imprevedibile, costituisce quindi una regressione di Z_t sulla sua storia passata e rappresenta la memoria (di tipo deterministico) del sistema.

Si dimostra che se $Z_t \sim AR(P)$ e' stazionario [PICCOLO & VITALE, 1984] si ha : $Z_t \sim MA(\infty)$.

d) Il modello Autoregressivo-Media mobile (ARMA)

Si puo' concepire una mistura dei due modelli fin qui introdotti, pensando ad un processo $W_t \sim MA(q)$ a sua volta connesso ai valori passati di un processo $Z_t \sim AR(P)$, cosi' da avere:

$$\begin{aligned} W_t &= \theta(B) a_t \\ \Phi(B) Z_t &= W_t \end{aligned}$$

Risulta cosi' un modello AutoRegressivo di ordine p e Media Mobile di ordine q: $Z_t \sim ARMA(p,q)$

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Esso opera sulla storia del processo Z_t (parte AR) e per "spiegare" il residuo di questa operazione (W_t) interviene sulla storia del processo rumore bianco a_t (parte MA).

Se il processo ARMA e' stazionario ed invertibile, il processo $Z_t \sim ARMA(p,q)$ equivale sia ad un processo $AR(\infty)$ che ad uno $MA(\infty)$; l'utilita' di arrivare ad un modello misto si spiega,

quindi, con la sua capacita' di descrizione di un processo attraverso un numero molto basso di parametri.

Pur essendo le strutture AR ed MA risolvibili l'una nell'altra sotto le ipotesi di stazionarieta' ed invertibilita', esse sono interpretazioni molto diverse del processo che descrivono.

La parte AR nasce da un postulato essenzialmente deterministico secondo il quale Z_t e' funzione di Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p} mentre l'aggiunta di a_t distingue il processo stocastico Z_t da una funzione matematica $Z_t=f(t)$.

Per contro, il processo MA nasce da considerazioni essenzialmente non deterministiche, in quanto il processo Z_t e' la risultante degli effetti delle variabili casuali a_t definite incorrelate, incontrollabili ed imprevedibili [PICCOLO, 1981].

L'apporto delle due strutture nel modello ARMA non puo' pertanto considerarsi paritario: infatti PICCOLO [1981] afferma la superiorita' della componente AR rispetto a quella MA, in un processo ARMA, dal punto di vista della capacita' statistica di descrivere il processo.

Lo stesso discorso vale nell'ambito dei metodi di stima, dove si riscontra una maggiore stabilita' delle stime dei coefficienti della parte autoregressiva rispetto a quelle dei coefficienti media mobile.

Nelle appendici A 2.1 - A 2.3 si riferisce estesamente in merito alle procedure di costruzione dei modelli della classe ARMA ed alle problematiche statistiche che piu' di frequente si incontrano nell'analisi delle serie idrologiche.

2.2 MODELLI DELLA CLASSE ARMA PER IL PROCESSO DEI DEFLUSSI ANNUI

Anche molto tempo prima dell'apparire del lavoro di BOX & JENKINS [1976], i modelli lineari, Autoregressivi o Media Mobile che fossero, venivano largamente adoperati (si veda l'appendice A 1.1). Ci si riferisce, in particolare, oltre che ai lavori di THOMAS & FIERING [1962] e poi FIERING [1967], a quelli di YEVJEVICH [1963],[1964] e MATALAS [1967]. Dal punto di vista dei modelli strettamente Autoregressivi, l'apporto della metodologia BOX & JENKINS e' stato fondamentale piu' che altro per cio' che riguarda i metodi di stima ed i metodi di valutazione della bonta' di adattamento.

A partire dal 1970 apparirono le prime applicazioni della metodologia ARMA alle serie idrologiche [CARLSON et al.,1970], [O'CONNELL, 1971].

O'Connell applica il modello ARMA(1,1) alle serie dei deflussi annui dimostrandone l'efficienza nel descrivere le caratteristiche di persistenza sia a breve che a lungo termine. In particolare l'autore esamina la capacita' da parte del modello ARMA(1,1) di generare serie sintetiche che presentano l'effetto Hurst. Individua cosi' una zona dello spazio dei parametri ϕ e θ del modello "particolarmente idonea alla riproduzione della persistenza a lungo termine". Le serie sintetiche generate col modello ARMA(1,1) i cui parametri appartengano alla zona individuata dalle condizioni:

$$\theta > 0 \quad ; \quad \phi > \theta > 0$$

presentano infatti piu' o meno marcatamente l'effetto Hurst. Anche serie piuttosto brevi mostrano un comportamento simile quando ϕ assume valori vicini all'unita', il che comporta che il processo generato e' vicino alla condizione di non stazionarieta' [PICCOLO & VITALE, 1984].

Questa ed altre considerazioni hanno fatto si' che in seguito si e' tentato di riprodurre l'effetto Hurst anche con la variabilita' (nonstazionarieta') della media del processo [KLEMES, 1974], [BOES & SALAS, 1978].

In realta' la persistenza a lungo termine, e con essa l'effetto Hurst, e' dovuta essenzialmente alla presenza degli invasi profondi, i quali esercitano una funzione di regolazione a carattere pluriennale.

Si vedra' piu' avanti quali considerazioni di carattere idrologico giustifichino la validita' del modello ARMA(1,1) per la rappresentazione dei deflussi annui. Per quanto riguarda l'analisi statistica empirica, invece, conferme all'idoneita' del modello sono venute da LETTENMAIER & BURGES [1977], che propongono pero' una variante (modello ARMA-Markov) per inglobare come parametro il coefficiente di Hurst, HIPEL & MCLEOD [1978] e SALAS et al.[1980] per quanto riguarda la capacita' dei modelli ARMA in generale di preservare il Rescaled Adjusted Range e SALAS & OBEYSEKERA [1982] che adoperano procedure automatiche di identificazione dell'ordine del modello; infine VECCHIA ET AL.[1983] E OBEYSEKERA & SALAS [1986] ottengono il modello ARMA(1,1) per i deflussi annui aggregando deflussi mensili ottenuti da modelli a parametri periodici.

2.3 MODELLI DELLA CLASSE ARMA PER IL PROCESSO DEI DEFLUSSI STAGIONALI

2.3.1 modelli a parametri periodici

Costituiscono la classe di modelli piu' diffusa in campo idrologico per la rappresentazione dei processi periodici [NOAKES et al. 1985], pur presentando importanti limitazioni. Il concetto su cui si basano i modelli a coefficienti periodici e' quello di rappresentare il fenomeno periodico con uno o piu' parametri per ogni stagione. Con questa impostazione si intende riprodurre la stagionalita' di media, varianza, covarianza ed eventualmente asimmetria considerando la serie come la realizzazione di un processo multivariato, in cui i dati di ogni stagione vengono considerati come una singola variabile.

Le limitazioni di questa impostazione sono connesse principalmente all'elevato numero di parametri richiesto. Infatti, la presenza di almeno un parametro per stagione rende necessario il ricorso a modelli di ordine limitato (tipicamente AR(1) ed ARMA(1,1)) e porta a grosse difficolta' operative quando si scende a scale temporali inferiori al mese. A questo proposito YEVJEVICH & HARMANCIOGLU [1989] suggeriscono di parametrizzare i coefficienti relativi alle diverse stagioni per mezzo delle serie di Fourier, anche nel caso di dodici stagioni per anno, allo scopo di minimizzare eventuali effetti di distorsione in fase di generazione di serie sintetiche.

Si vedra' piu' avanti che una consistente riduzione nel numero dei parametri si ha concentrando la periodicita' nel processo degli afflussi netti, cosa che avviene fornendo una interpretazione concettuale al processo dei deflussi.

Modello AR(1) periodico: PAR(1)

Si e' gia' parlato del contributo di THOMAS & FIERING [1962] alla riproduzione della persistenza che si osserva nelle serie idrologiche. Essi si sono occupati di serie periodiche, per le

quali hanno proposto il modello Markoviano Multistagionale a Lag-1, (AR(1) a parametri periodici), formulato come segue:

$$Q_{t+1} = E[Q_{j+1}] + b_j(Q_t - E[Q_j]) + e_t \sigma_{j+1} \sqrt{(1-r_j^2)}$$

dove:

j = indice della stagione nell'anno : $j=1, \dots, ns$

t = intervallo di tempo considerato : $t=1, \dots, \infty$

Q_t = deflusso nell'intervallo t

b_j = coefficiente autoregressivo della stagione j = coefficiente della regressione di Q_{j+1} su Q_j , cioè dei deflussi nella stagione $j+1$ rispetto a quelli nella stagione j .

e_t = processo random stazionario (a media 0 e varianza 1)

r_j = coefficiente di correlazione tra Q_{j+1} e Q_j

σ_{j+1} = varianza dei deflussi nella stagione $j+1$

Standardizzando la variabile Q si ottiene:

$$Z_t = \frac{Q_t - E[Q_j]}{\sigma_j}$$

e ritroviamo :

$$Z_{t,j} = \phi_{1,j} Z_{t-1,j} + e_t$$

cioè un modello AR(1) a coefficienti periodici.

Considerando serie mensili, i parametri del modello sono:

b_j , $\{j=1, \dots, 12\}$; $E[Q_j]$, $\{j=1, \dots, 12\}$; σ_j , $\{j=1, \dots, 12\}$

per un totale di 36 .

La semplicità della struttura, l'assenza di una fase di identificazione e l'immediatezza delle stime fanno di questo modello un importante punto di riferimento soprattutto in sede applicativa.

Modello AR(p) periodico: PAR(p)

E' una estensione del modello precedente e presenta la caratteristica di poter avere ordine (p) variabile da mese a mese. I miglioramenti in termini di efficienza rispetto al PAR(1) sembrano consistenti, in particolare riguardo alla previsione [NOAKES et al., 1985]. I criteri di identificazione suggeriti per l'ordine p, relativo ad ogni mese, sono di tipo "automatico" (AIC o BIC, modificati per il caso stagionale) oppure basati sull'interpretazione della funzione di autocorrelazione parziale (PACF), procedura piu' adeguata, anche se piu' soggettiva.

Modelli ARMA a parametri periodici: PARMA

Sono stati proposti inizialmente da TAO & DELLEUR [1976] per tentare di eliminare l'autocorrelazione di tipo stagionale mostrata dai residui dei modelli ARMA a parametri costanti. L'espressione standard del modello PARMA(p,q) e':

$$z_{t,\tau} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} z_{t,\tau-j} - \sum_{j=1}^q \theta_{j,\tau} \epsilon_{t,\tau-j} + \epsilon_{t,\tau}$$

con p,q = ordine del modello ARMA.

Il numero di parametri e' pari a (p+q) Ω , dove Ω e' il numero di stagioni considerate. Per deflussi a base temporale mensile difficilmente si va oltre l'ordine (1,1).

Tra le varie applicazioni condotte con questa classe di modelli, ricordiamo il lavoro di HIRSCH [1979], che fa variare con la stagione il solo coefficiente della media mobile, di SALAS et al. [1972], che suggeriscono stimatori di ϕ_{τ} e θ_{τ} col metodo dei momenti, VECCHIA et al. [1983] e OBEYSEKERA & SALAS [1986].

L'inefficienza delle stime operate col metodo dei momenti, le difficolta' nell'impostazione di stime di Massima Verosimiglianza per la non linearita' della parte Media Mobile e l'eccessivo numero di parametri da stimare rendono, secondo

NOAKES et al. [1985], non vantaggiosa l'estensione PARMA rispetto al modello PAR.

2.3.3 Modelli ARIMA ed ARIMA stagionali

La denominazione ARIMA sta ad indicare modelli Auto Regressive Integrated Moving Average [BOX & JENKINS, 1976] e contraddistingue una classe di modelli Non Stazionari. Essi vengono infatti costruiti in modo da operare sulle "differenze" tra i dati. Definito l'operatore differenza come :

$$D_s = (1-B^s) , \quad \text{tale che:} \quad D_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

la serie $D_s X_t$ viene privata delle sue caratteristiche periodiche, oltre che del trend. La natura non stazionaria del modello si spiega con il fatto che l'operazione di integrazione, necessaria per ricostruire il processo originario, non riesce a ripristinare il livello medio del processo. Se l'indice s della differenza e' piccolo a piacere, si parla di modello ARIMA non stagionale. Piu' comunemente, invece, s e' pari al periodo del processo, per cui il modello viene definito SARIMA (Seasonal ARIMA).

Una generalizzazione dei modelli Integrati e' costituita dagli ARIMA moltiplicativi. Il loro impiego consiste nell'applicare un nuovo modello ARIMA, questa volta non stagionale, ai residui del modello ARIMA stagionale [BOX & JENKINS, 1976]. Tra gli esempi di applicazione di modelli di questa classe si menzionano i lavori di MCKERCHAR & DELLEUR [1974] e RAO et al. [1982].

I modelli ARIMA sono caratterizzati da una estrema parsimonia nei parametri, ma va detto che la rimozione della periodicit  della serie tramite differenze, soprattutto se ottenuta con modelli non stagionali, ha conseguenze piuttosto pesanti sul processo di base [KAVVAS & DELLEUR, 1975], [TAO & DELLEUR, 1976]. Gli "effetti collaterali" della differenziazione sono:

- rimozione delle caratteristiche di dipendenza a breve termine (con differenze di ordine s basso)

- introduzione di correlazioni spurie a lag multipli dell'ordine di differenziazione

- variazione delle caratteristiche spettrali anche a frequenze lontane da quelle corrispondenti al periodo.

I modelli Integrati non sembrano inoltre particolarmente adatti alla modellazione delle serie idrologiche, soprattutto per la non adattabilità alla previsione che non sia quella a breve termine. Infatti, essendo il modello non stazionario, la varianza della previsione non dipende dalla stagione (ragion per cui non si riesce a dare struttura periodica alla serie generata) ed inoltre cresce proporzionalmente al lag previsivo.

2.3.4 Modelli ARMA a coefficienti costanti

Nell'analisi statistica delle serie storiche questa metodologia occupa un posto di rilievo ed è senz'altro tra le più semplici da usare. Lo schema tipico che si adopera prevede la destagionalizzazione parametrica (con serie di Fourier, per basi temporali inferiori al mese) o non parametrica (tanti coefficienti quanti sono gli intervalli del periodo, per intervalli uguali o superiori al mese) della serie storica e l'applicazione di un modello ARMA alla serie stazionaria così ottenuta. Salas et al. [1980] suggeriscono per le serie mensili la standardizzazione della serie $X_{n,\tau}$ con metodo non parametrico: detto n l'indice dell'anno e τ l'indice della stagione, la serie stazionaria $Z_{n,\tau}$ si ottiene con:

$$Z_{n,\tau} = \frac{X_{n,\tau} - \mu_\tau}{\sigma_\tau}$$

dove μ_τ e σ_τ sono la media e lo scarto dei dati appartenenti alla stagione τ .

In alternativa (si veda Noakes et al., 1985) si può applicare la sola destagionalizzazione: $Z_{n,\tau} = X_{n,\tau} - \mu_\tau$.

Se $X_{n,\tau}$ è trasformato, la media e lo scarto sono calcolati sui dati trasformati.

Tra le applicazioni più significative di questo tipo di modelli, si segnalano quelle di DELLEUR et al. [1976] e

soprattutto BATTAGLIA [1986] quale esempio particolarmente significativo di impiego della metodologia ARMA, sia pure riferito ai deflussi giornalieri. Per quanto riguarda i criteri di identificazione dell'ordine del modello si rimanda ai lavori di RAO et al. [1982], SALAS et al. [1980] ed ancora a BATTAGLIA [1986].

L'applicazione dei modelli ARMA a parametri costanti alle serie periodiche sposta sulla destagionalizzazione tutto il peso della riproduzione degli effetti periodici caratteristici delle serie stagionali. La rimozione degli effetti stagionali, come si riferisce in appendice A 2.3, da un lato porta alla rimozione di caratteristiche non di tipo periodico e dall'altro puo' non essere sufficiente dal punto di vista statistico. Per questi motivi nell' approccio che piu' avanti si propone si e' ritenuto vantaggioso rispettare strettamente lo schema concettuale applicando i modelli ARMA a parametri costanti sulle serie non standardizzate.

L'obiezione fondamentale posta alla classe di modelli in oggetto e' l'incapacita' di descrivere le variazioni stagionali del coefficiente di autocorrelazione (di cui riferiscono MOSS & BRYSON [1974] e, per esempio, YEVJEVICH & OBEYSEKERA [1985]) per cui si e' arrivati alla proposta dei modelli PARMA [TAO & DELLEUR, 1976]. Anche nei riguardi di questo aspetto si ritiene che lo schema ARMA a residuo pseudo-periodico che verra' proposto in questo lavoro, sia adatto a spiegare la natura delle variazioni periodiche. Infatti la variabilita' del coefficiente di autocorrelazione risulta determinata dalla periodicita' della grandezza (afflusso netto) che alimenta le falde acquifere (che sono la causa dell'autocorrelazione) piuttosto che da variazioni nella costante d'invaso delle falde stesse.

2.3.5 Modelli ARMA non gaussiani

Un approccio non convenzionale al problema della riproduzione dell'asimmetria delle serie idrologiche e' quello che si ha con i modelli GAMMA-ARMA.

Proveniente dall'ambito degli studi di "teoria delle code", questa classe di modelli e' stata recentemente riproposta in

relazione alle serie idrologiche da FERNANDEZ & SALAS [1986], i quali ricavano modelli lineari e non lineari con distribuzione marginale Gamma e strutture correlative AR(1) a parametri costanti o periodici. SIM [1987] fornisce invece una proposta analoga applicata al modello ARMA(1,1).

Il senso della proposta e' di tentare la descrizione dei caratteri di asimmetria dei processi idrologici imponendo una distribuzione marginale asimmetrica (appunto la Gamma) i cui parametri sono parte del modello stocastico. In questo modo si evitano gli inconvenienti delle trasformazioni con il vantaggio di rendere piu' oggettive le applicazioni.

L'interesse dell'argomento e' pero' attenuato dalla complessita' matematica delle strutture e dalla necessita' di formalizzare tutti quegli strumenti di stima e di controllo statistico di cui sono invece abbondantemente dotati i modelli ARMA tradizionali.

3. APPROCCIO CONCETTUALE ALLA COSTRUZIONE DI UN MODELLO STOCASTICO DEI DEFLUSSI ANNUI

3.1 RASSEGNA DELLA LETTERATURA SUI MODELLI STOCASTICI A BASE CONCETTUALE

Secondo KLEMES [1978] le difficoltà e la lentezza con cui progrediva la ricerca nella descrizione del processo dei deflussi come processo stocastico continuo, in base alle formulazioni matematiche dei modelli concettuali di bacino, erano principalmente dovute alla preferenza accordata ai modelli stocastici (discreti) identificati empiricamente osservando le serie storiche delle portate fluviali.

Questa considerazione vale tutto sommato ancora oggi, non fosse altro che per la netta contrapposizione metodologica che esiste tra l'approccio idrologico e l'approccio statistico di tipo empirico.

Nell'approccio statistico, analisi moderna delle serie storiche significa far "parlare le serie per se stesse" in modo che sia la serie storica ad orientare verso il modello, il quale, quindi, deve essere neutrale rispetto ai dati [BOX & JENKINS, 1970].

L'approccio idrologico è quindi l'esatto contrario di quanto avviene nell'analisi statistica moderna delle serie temporali, dato che sottintende necessariamente un modello di base del fenomeno, costruito a prescindere dall'osservazione dei dati.

I primi passi nello stabilire relazioni tra modelli stocastici e sistema fisico sono stati fatti da YEVJEVICH [1963],[1964], che ha usato prima un modello MA(1) e poi un AR(1) per modellare il deflusso annuo a partire dalla precipitazione effettiva, considerata un white noise.

FIERING [1967] ha considerato invece un "sistema bacino idrografico" nel quale la precipitazione annua è suddivisa in evaporazione, infiltrazione e deflusso superficiale. Proponendo una struttura di processo indipendente o autoregressivo a lag-1 per la precipitazione, ha espresso poi la funzione di autocorrelazione teorica del deflusso annuo ipotizzando che

potesse corrispondere a quella dei modelli autoregressivi con ordine superiore al primo.

QUIMPO [1971] ottiene una interpretazione fisica diretta del modello markoviano a lag-1 osservando che il legame tra un processo autoregressivo del primo ordine ed il deflusso in uscita da un serbatoio lineare alimentato da un processo indipendente puo' ricavarsi eguagliando le espressioni delle rispettive funzioni di autocorrelazione. In questo modo giunge all'espressione:

$$\rho_1 = e^{-1/K}$$

dove ρ_1 e' il coefficiente autoregressivo a lag-1 e K e' la costante d'invaso del serbatoio.

SPOLIA & CHANDER [1974] e poi O'CONNOR [1976] ricavano la formulazione ARMA dalla discretizzazione delle equazioni che descrivono l'output da una cascata di serbatoi lineari (modello di NASH). Cio' che SPOLIA & CHANDER mostrano e' che, dati N serbatoi lineari in serie alimentati da un white noise, la struttura stocastica dell'output e' ARMA(N,N-1), per cui se ad esempio si considerano 2 serbatoi in serie, si ha un ARMA(2,1).

I contributi finora citati sono riassunti e commentati nella rassegna di KLEMES [1978].

ROSSI & SILVAGNI [1980] e SALAS & SMITH [1981] mostrano come il processo dei deflussi annui possa essere descritto con un modello ARMA(1,1) partendo da una schematizzazione concettuale del bacino idrografico.

I primi sottolineano l'importanza dell'entita' del deflusso profondo nei riguardi della presenza o meno di una componente autoregressiva, cosicche' per bacini completamente impermeabili il modello stocastico dei deflussi annui e' un white noise. I secondi arrivano ad una espressione ARMA partendo dal modello concettuale di bacino di FIERING [1967], fornendo in questo modo un supporto formale alle relazioni tra rappresentazione fisica (concettuale) e stocastica del processo dei deflussi annui.

Per quanto riguarda piu' specificamente la base temporale sub-annuale, fondamentale e' il lavoro di MOSS & BRYSON [1974] dal punto di vista della impostazione del modello concettuale

(dei deflussi mensili, nel caso particolare) e della sua formulazione in termini di modello ARMA.

Per costruire la struttura correlativa del deflusso mensile gli autori considerano il deflusso M_n nel periodo n come somma del deflusso diretto $r_n P_n$, del deflusso di base G_n determinato da invaso "over-period", cioè che non si esaurisce all'interno del periodo, e deflusso di base F_n causato dalla precipitazione "interperiod".

F_n è quindi la parte di volume di infiltrazione che defluisce prima della fine del periodo considerato, mentre G_n è la parte di volume iniziale V_0 che defluisce nel periodo.

La quantità P_n è la precipitazione effettiva nel periodo n , e r_n è il rapporto tra deflusso diretto e precipitazione effettiva, pari al complemento ad 1 della percentuale di infiltrazione a_n .

Dall'espressione $M_n = G_n + F_n + r_n P_n$, considerato che:

$$G_n = V_{n-1} (1 - e^{-K}) \quad \text{con } K = \text{costante d'invaso}$$

$$F_n = a_n P_n \{1 - \exp[-K(T_n - 1)]\}$$

dove T_n è il tempo di occorrenza della precipitazione netta (considerata uno shock puntuale all'interno del periodo), gli autori ottengono una forma ARMA(1,1).

Un apporto recente e non convenzionale è quello di VANDERWIELE & DOM [1989] nel quale il modello stocastico dei deflussi stagionali è non ARMA e non Gaussiano. Il processo è caratterizzato da shocks casuali, non white noise e stagionali, che vengono ottenuti dalla serie originaria depurandola da due fattori di attenuazione esponenziale, responsabili del decadimento dello shock. Gli impulsi hanno struttura markoviana del secondo ordine, con probabilità di transizione specificate ad hoc per tener conto della probabilità finita in corrispondenza del valore zero (distribuzione di probabilità non continua). La stima (simultanea) dei parametri è ottenuta con una tecnica di ottimizzazione che massimizza la funzione di verosimiglianza.

3.2 IMPOSTAZIONE DEL MODELLO CONCETTUALE DEI DEFLUSSI ANNUI

3.2.1 premesse

L'interpretazione del processo dei deflussi fluviali con un modello concettuale, quale che sia la base temporale di interesse, terra' necessariamente conto della situazione geofisica nella quale e' inquadrato il bacino idrografico.

Se ci limitiamo a considerare i bacini appenninici italiani, in essi ritroviamo un solo minimo ed un solo massimo annuo per la temperatura e la piovosita'. Scegliendo di far iniziare l'anno alla fine della stagione secca (per convenzione si sceglie come inizio il 1° ottobre) si seleziona un anno idrologico, il quale inizia e termina con valori di piovosita' sempre prossimi a zero.

Su base temporale annua e' quindi possibile riferirsi a dati di piovosita' indipendenti da un anno all'altro: i deflussi annui verranno percio' sempre presi in considerazione nell'anno idrologico.

Dal punto di vista idrogeologico, nei bacini appenninici e' importante la presenza di massicci carbonatici fortemente permeabili per fessurazione. Le falde acquifere che si trovano in corrispondenza di questi massicci funzionano come grandi serbatoi naturali e sono responsabili dei contributi sorgentizi piu' consistenti. Tali falde hanno tempi di esaurimento dell'ordine degli anni, motivo per cui vengono denominate falde sotterranee ad esaurimento pluriennale o falde sotterranee ad invaso profondo, oppure, piu' semplicemente, falde profonde.

Una seconda componente di deflusso di falda, che generalmente si esaurisce entro la fine della stagione secca, e' dovuto alle falde acquifere non di tipo carbonatico, definite falde sotterranee ad esaurimento stagionale o falde sotterranee ad invaso superficiale.

L'identificazione di questi due contributi e' possibile, qualitativamente, attraverso l'osservazione delle serie dei deflussi giornalieri, in particolare se posti in scala logaritmica (fig. 3.2.1). Il contributo della falda ad invaso profondo e' identificabile con la quasi totalita' del deflusso

alla fine della stagione secca. In primavera, invece, dall'andamento all'incirca rettilineo dei deflussi in carta semilogaritmica si nota l'esaurimento della falda ad invaso superficiale. La caratteristica che consente l'individuazione della presenza di falde sotterranee e' quindi la dipendenza temporale che si nota nelle serie dei deflussi.

Il fatto che in scala logaritmica l'andamento delle curve di esaurimento dei due acquiferi sia pressappoco rettilineo (l'esaurimento della falda profonda e' osservabile in anni particolarmente poco piovosi) e' alla base dell'ipotesi che gli invasi di falda abbiano comportamento lineare, ipotesi che consente di riferirsi, come vedremo, a modelli concettuali lineari dei processi di deflusso.

Laddove le serie annuali non presentino effetti apprezzabili di dipendenza, si procede unicamente all'analisi del modello probabilistico. A tale proposito [ROSSI & SILVAGNI, 1980] selezionano, per serie appartenenti a bacini dell'Italia meridionale, una distribuzione di probabilita' che e' quella Normale delle radici cubiche, in quanto porta simultaneamente alla minima varianza delle serie ed al minimo valore del coefficiente di asimmetria.

3.2.2 modello concettuale dei deflussi annui

Il deflusso nell'anno idrologico puo' considerarsi somma di due soli contributi: apporto della falda ad esaurimento pluriennale e deflusso diretto.

L'apporto della falda ad esaurimento stagionale, infatti, non e' distinguibile dal deflusso subsuperficiale e superficiale poiche' tutti hanno ritardo sub-annuale, per cui su base annua concorrono a costituire la componente di deflusso diretto.

Il deflusso diretto e' considerato proporzionale all'afflusso netto o efficace, mentre la falda profonda e' schematizzata come un invaso lineare.

Su questa base si puo' impostare un modello concettuale dei deflussi annui costituito da due soli elementi funzionali: un invaso lineare ed una traslazione con ritardo sub-annuale, cioe' senza ritardo (relativamente alla scala temporale annua).

Su uno schema simile e' basato il modello concettuale di bacino di Thomas-Fiering [1967]. In esso si assume che della precipitazione x_t nell'anno t una quantita'

$(1 - c_1 - c_2)x_t$ si trasforma in deflusso diretto ,
 c_1x_t e' l'aliquota che si infiltra, mentre
 c_2x_t e' l'aliquota che va in evapotraspirazione.

Il deflusso annuo si ottiene quindi dalla somma del deflusso diretto con il contributo di falda

c_3V_{t-1} ,
dove V_{t-1} e' il volume immagazzinato in falda all'inizio dell'anno t .

La schematizzazione che verra' qui adoperata e' abbastanza diversa:

Il deflusso annuo viene considerato l'uscita di un sistema lineare costituito da un invaso lineare e da una traslazione con ritardo sub-annuale, che forniscono rispettivamente il deflusso di falda ed il deflusso diretto. La quantita' in ingresso al sistema e' l'afflusso netto (differenza tra l'afflusso totale e l'evapotraspirazione) (fig. 3.2.2).

Dell'afflusso netto, che verra' chiamato I_t , l'aliquota aI_t si infiltra, mentre la quantita' $(1-a)I_t$ defluisce direttamente. Tra deflusso diretto e afflusso netto c'e' proporzionalita' diretta perche' la traslazione con ritardo sub-annuale non ha nessun effetto, su base annua, sull'aliquota $(1-a)I_t$ che non si infiltra.

Della quantita' aI_t che si infiltra, chiamata ricarica, la parte $f_K aI_t$ defluisce entro l'anno mentre la parte $(1-f_K)aI_t$ rimane invasata e costituisce la vera e propria ricarica della falda.

Il contributo di falda $C_K V_{t-1}$, dovuto all'esaurimento del volume V_{t-1} invasato all'inizio del periodo, costituisce il deflusso di falda in assenza di ricarica.

Le grandezze e le variabili che verranno considerate nel modello concettuale sono elencate di seguito. (Ci si riferisce ad un intervallo generico $[t-1, t]$).

P_t = precipitazione

eP_t = evapotraspirazione

I_t = $(1-e)P_t$ = afflusso netto al bacino

aI_t = ricarica alla falda ad invaso profondo (pluriennale)

$(1-a)I_t$ = deflusso diretto

D_t = deflusso totale

V_{t-1} = volume invasato in falda all'inizio del periodo
(= volume invasato alla fine dell'intervallo precedente)

$C_K V_{t-1}$ = deflusso di falda profonda in assenza di ricarica

$aI_t f_K$ = deflusso di falda profonda dovuto alla sola ricarica

a = coefficiente di ricarica alla falda profonda

K = costante d'invaso della falda profonda

Definiamo inoltre :

$r_K = (1 - f_K)$ = coefficiente di esaurimento della ricarica

$c_K = (1 - C_K)$ = coefficiente di esaurimento dell'invaso profondo

C_K = fattore di esaurimento dell'invaso profondo

f_K = fattore di esaurimento della ricarica

I coefficienti di esaurimento rappresentano il rapporto tra le portate alla fine ed all'inizio dell'intervallo e sono definiti dalla relazione:

$$Q_t = c_K Q_{t-1}$$

I fattori di esaurimento si riferiscono invece ai volumi, secondo la relazione:

$$D_t = C_K V_{t-1}$$

La costante d'invaso K e' espressa in numero di intervalli temporali ed indica il tempo occorrente ad una riduzione di portata tra inizio e fine intervallo nel rapporto $1/e = 0.37$.

Infatti, essendo, per l'invaso lineare, $Q_t = Q_0 e^{-t/K}$, (appendice 3.0), per $t=K$ si ha: $Q_t/Q_0 = e^{-1} = 1/e$

3.3 IDENTIFICAZIONE DEL MODELLO STOCASTICO DEI DEFLUSSI ANNUI

3.3.1 Equazioni del bilancio dei volumi e scrittura del modello stocastico

L'equazione che regge il sistema lineare introdotto nel paragrafo precedente e' ottenibile a partire dalle equazioni di bilancio dei volumi dell'intero sistema e del solo invaso profondo.

Per quanto esposto in appendice A 3.0, se aI_t e' l'ingresso all'invaso lineare (ricarica), la corrispondente uscita e':

$$C_K V_{t-1} + I_t a f_K$$

risulta percio':

Bilancio di volumi del sistema

$$D_t = C_K V_{t-1} + I_t a f_K + I_t (1-a)$$

deflusso di falda deflusso diretto

Bilancio di volumi della falda (invaso)

$$V_t = V_{t-1} (1-C_K) + I_t a (1 - f_K)$$

volume residuo ricarica effettiva

combinando le due relazioni come in SALAS & SMITH [1981] e facendo riferimento ai coefficienti $c_K=1-C_K$ e $r_K=1-f_K$ di esaurimento dell'invaso e della ricarica, si ottiene una

rappresentazione in forma ARMA:

$$D_t - c_K D_{t-1} = (1 - ar_K) I_t - (c_K - ar_K) I_{t-1} \quad (*)$$

Il processo D_t viene, in questo modo, spiegato dai suoi stessi valori precedenti (primo membro, parte Autoregressiva) e dai valori attuali e precedenti della variabile I_t (secondo membro, parte Media Mobile).

Va specificato che in questo modo si e' ottenuta una rappresentazione concettuale deterministica del processo, che ha la forma di una relazione lineare tra l'input I_t e l'output D_t del sistema. A partire da questa formulazione ci si propone di arrivare ad un modello stocastico univariato del processo D_t , il che significa considerare il deflusso D_t come unica variabile del modello.

Il processo I_t non e' quindi una variabile del modello, ma un termine proporzionale al deflusso diretto il quale, come vedremo, corrisponde al residuo del modello stocastico. Per questa ragione si ritiene opportuno definire la variabile I_t input netto piuttosto che afflusso netto.

Affinche' la relazione (*) possa ritenersi corrispondente ad un modello stocastico univariato della classe ARMA, il termine $(1 - ar_K) I_t$ deve poter assumere il significato di White Noise, cioe' deve essere un processo incorrelato ed indipendente, con distribuzione di probabilita' unimodale. Queste condizioni possono senz'altro considerarsi soddisfatte con riguardo al deflusso diretto e quindi alla variabile $(1 - ar_K) I_t$. Sotto questa ipotesi il modello stocastico avra' la forma:

$$D_t - \phi D_{t-1} = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$$

sara' cioe' un modello **ARMA(1.1)**, autoregressivo di ordine 1, con parametro ϕ , e media mobile di ordine 1, con parametro θ .

Una rappresentazione piu' concisa del modello e' ottenibile introducendo il "Backward coefficient" B , un operatore lineare definito da:

$$BD_t = D_{t-1} .$$

La rappresentazione risulta:

$$D_t[1-B\phi] = \epsilon_t[1-B\theta]$$

I parametri stocastici ϕ e θ sono in corrispondenza con i parametri concettuali a e K tramite le relazioni:

$$\phi = c_K = e^{-1/K} =$$

$$\theta = \frac{c_K - ar_K}{1 - ar_K} = \frac{e^{-1/K} - ar_K}{1 - ar_K}$$

mentre ϵ_t , che e' il RESIDUO del modello stocastico, cioe' la parte di processo non spiegata dal modello stesso, corrisponde al deflusso diretto, poiche' ha espressione:

$$\epsilon_t = I_t(1-ar_K)$$

Infatti, poiche' $r_K = 1-f_K$, si ha $\epsilon_t = I_t [1-a(1-f_K)]$ e cioe'

$$\epsilon_t = I_t(1-a) + I_t af_K$$

il che significa che il residuo equivale al deflusso diretto a meno del contributo di falda profonda dovuto alla sola ricarica.

Dai coefficienti ϕ e θ stimati col modello ARMA(1,1) sulle serie dei deflussi annui possono essere quindi ottenute le stime dei parametri concettuali a e K attraverso le relazioni:

$$a = \frac{\phi - \theta}{r_K(1-\theta)} \quad K = - \frac{1}{\ln \phi}$$

mentre dalla serie dei residui ϵ_t si puo' ricavare la serie del deflusso diretto con la relazione:

$$(1-a)I_t = \frac{(1-a) \epsilon_t}{(1-ar_K)}$$

Per comodita' di rappresentazione e per l'uso che si fara' nel seguito della grandezza I_t , e' preferibile riferire la serie dei residui all'input netto piuttosto che al deflusso diretto, per cui verra' adoperata l'espressione:

$$I_t = \frac{\epsilon_t}{(1-ar_K)}$$

Va infine messo in evidenza che il coefficiente r_K e' un parametro il cui valore non puo' essere stimato dai dati ma va assegnato in maniera deterministica in base ad assunzioni a priori sulla forma della legge di ricarica all'interno dell'anno; varia inoltre in funzione della costante d'invaso K , come vedremo nel paragrafo seguente.

Il modello stocastico che si e' cosi' identificato puo' essere riguardato sotto due aspetti:

- sotto l'aspetto descrittivo (della serie storica) costituisce un modello stocastico della classe ARMA, il cui ordine e' stato identificato su base concettuale;
- sotto l'aspetto interpretativo (del fenomeno) costituisce lo strumento attraverso il quale si possono stimare i parametri a e K del modello concettuale e si puo' ricavare la stima della serie dell'input netto.

L'aspetto descrittivo interessa rispetto al confronto con altri modelli stocastici, mentre quello interpretativo concerne, come vedremo, le possibilita' di validazione dei parametri, le possibilita' di regionalizzazione della metodologia e di "trasporto" di una data informazione a diverse scale temporali.

In appendice A 3.1 si specificano le modalita' della relazione tra I_t ed ϵ_t . Se D_t e I_t sono a media zero, la relazione

$$I_t = \frac{\epsilon_t}{(1-ar_K)} \quad (+)$$

vale a rigore, altrimenti ci si dovrebbe riferire all'espressione del modello concettuale :

$$(D_t - \mu) - c_K (D_{t-1} - \mu) = (1-ar_K)(I_t - \mu) - (c_K - ar_K)(I_{t-1} - \mu)$$

con $\mu =$ media del processo $D_t =$ media del processo I_t ed, analogamente alla seguente espressione del modello stocastico:

$$(D_t - \mu)[1-B\Phi] = \epsilon_t[1-B\Theta]$$

con $E[\epsilon_t]=0$.

per comodita' ci riferiremo tuttavia nel seguito alla relazione (+), dando per scontato che le serie sono a media nulla.

In appendice A 3.2 e' ricavata la regione di spazio dei parametri nella quale possono variare i parametri Φ e Θ in conseguenza delle relazioni che li legano ai parametri concettuali.

3.4 EFFETTO DELLA VARIABILITA' DELL'INPUT NETTO ALL'INTERNO DELL'ANNO

In dipendenza dell'entita' dell'invaso profondo, che si ritrova nel valore della costante d'invaso, puo' essere piu' o meno importante precisare l'ipotesi sulla forma che puo' assumere mediamente la legge di ricarica all'interno dell'anno.

Infatti, vedremo che il peso che puo' avere questa ipotesi sui valori assunti dal coefficiente r_K di esaurimento della ricarica, dipende soprattutto dal valore della costante d'invaso. Se K e' molto grande, la distribuzione della ricarica avra' una influenza debole sul deflusso della falda profonda, mentre se K ha valori di poco superiori ad 1 anno, e' importante definire qual'e' l'effettiva aliquota di ricarica. Definita $p(\tau)$ la ricarica per unita' di tempo, mentre R_t e' la ricarica complessiva nell'intervallo t , il coefficiente r_K e' determinabile a partire dalla seguente espressione (appendice A 3.0):

$$f_K = \frac{\int_0^1 \frac{1}{K} e^{-t/K} \int_0^t p(\tau) e^{\tau/K} d\tau dt}{\int_0^1 p(t) dt}$$

tenendo presente che

$$R = \int_0^1 p(t) dt$$

e che $r_K = 1 - f_K$

Si riassumono di seguito le espressioni di r_K calcolate nei casi in cui $p(\tau)$ ha forma semplice (si rimanda all'appendice A.3.3 per gli sviluppi). Per comodita' di calcolo, l'anno e' stato

schematizzato come un intervallo di estremi 0 ed 1 e ci si riferisce alla ricarica nel generico intervallo t , omettendo il pedice:

input concentrato nell'origine

$$p(\tau) = \delta(0)R \quad (\delta \text{ di Dirac})$$

$$r_K = e^{-1/K}$$

input concentrato nell'istante T, compreso tra 0 e 1

$$p(\tau) = \delta(T)R$$

$$r_K = e^{-(1-T)/K}$$

input uniforme su tutto l'intervallo [0,1]

$$p(\tau) = R/1$$

$$r_K = K(1 - e^{-1/K})$$

input uniforme di durata d (< 1) ed avente inizio al tempo T

$$p(\tau) = R/d$$

$$r_K = \frac{K}{d} (1 - e^{-d/K}) (1 - (1 - e^{-(1-T-d)/K}))$$

Quest'ultimo e' lo schema piu' generale, al quale tutti quelli precedenti possono ricondursi come casi particolari.

3.4.1 input concentrato equivalente all'input distribuito

A partire da una legge di ricarica $p(\tau)$ qualsiasi, il coefficiente r_K puo' essere calcolato in maniera semplificata. E' possibile infatti determinare un istante T_{eq} interno all'intervallo $[0,1]$ in corrispondenza del quale, immettendo la

ricarica come volume concentrato, si ottiene un valore del coefficiente r_K uguale a quello alla calcolato con la legge $p(\tau)$.

Per determinare l'istante T_{eq} corrispondente al caso di ricarica uniformemente distribuita, eguagliamo le espressioni di r_K definite nel paragrafo precedente per le due modalita' di alimentazione:

$$r_{Ku} = K(1-e^{-1/K}) = e^{-(1-T_{eq})/K} = r_{Kc}(T_{eq})$$

$$\text{risulta : } \ln[K(1-e^{-1/K})] = -(1-T_{eq})/K$$

$$T_{eq} = 1 + K \ln[K(1-e^{-1/K})]$$

Si puo' notare che la posizione T_{eq} dipende da K in ragione inversa, come si puo' vedere dalla figura 3.4.1: quanto maggiore e' K tanto piu' T_{eq} si avvicina alla meta' dell'intervallo.

In via approssimata, si puo' adoperare la relazione tra T_{eq} e K per ricarica uniforme come una equivalenza di momenti, allo scopo di calcolare r_K con ingresso di forma qualsiasi. Ammettiamo quindi che la relazione tra il baricentro bR della legge di alimentazione e T_{eq} sia lineare a pari K , e cioe' che il rapporto T_{eq}/bR :

$$\frac{T_{eq}}{R \int_0^1 p(\tau) \tau d\tau}$$

sia costante e pari a

$$T_{eq}/bR = \frac{1 + K \ln[K(1-e^{-1/K})]}{0.5}$$

dove 0.5 rappresenta il baricentro della di ricarica uniforme. Dato quindi un ingresso ad istogramma, con 12 dati r_j che rappresentano i valori di input netto medio nel mese,

riferendoci ad un intervallo di estremi 0 ed 1, si avrebbe:

$$bR = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{12} r_j [(j-0.5)/12]$$

e quindi :

$$T_{eq} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{12} r_j [(j-0.5)/12] \frac{1 + K \ln[K(1-e^{-1/K})]}{0.5}$$

In questo modo, nel caso di r_j comunque variabile con j , si puo' usare l'espressione:

$$r_K = e^{-(1-T_{eq})/K}$$

3.5 RICOSTRUZIONE SU BASE ANNUA DELL'INPUT NETTO E DEL DEFLUSSO DI FALDA PROFONDA

a. Ricostruzione dell'input netto.

L'input netto annuo puo' essere determinato dalla serie dei residui del modello ARMA(1,1) senza la necessita' di ipotizzare una sua distribuzione interannuale. Infatti, la precisazione del coefficiente r_K e' necessaria unicamente per calcolare il coefficiente di ricarica alla falda profonda, a , mentre, per quanto riguarda la ricostruzione dell'input netto possiamo far riferimento alla grandezza:

$$\alpha = a r_K = (\phi - \theta) / (1 - \theta)$$

L'espressione di I_t in funzione del residuo ϵ_t del modello ARMA(1,1) si puo' quindi scrivere:

$$I_t = \epsilon_t / (1 - \alpha)$$

Poiche' la relazione vale cosi' come e' scritta se ϵ_t ed I_t sono a media zero (appendice A.3.1), andrebbe precisata, detta μ la media del processo, nella forma:

$$I_t = \mu + \epsilon_t / (1 - \alpha)$$

b. Ricostruzione del deflusso di falda profonda.

Le equazioni del bilancio dei volumi e della ricarica relative al solo invaso profondo sono rispettivamente:

$$DF_t = C_K V_{t-1} + I_t a f_K$$

$$V_t = V_{t-1} (1 - C_K) + I_t a (1 - f_K)$$

Da queste puo' ottenersi una espressione unica sotto forma di rappresentazione ARMA(1,1) (appendice A 4) con la parte media mobile vincolata al coefficiente autoregressivo.

Messo sotto forma di transfer function, piu' significativa in questo caso, l'equazione del sistema invaso assume la forma:

$$DF_t = \phi DF_{t-1} + aI_t(1-r_K) + aI_{t-1}(r_K - \phi)$$

L'espressione cosi' ottenuta cambia, ovviamente, al variare della scala temporale, a patto di adeguare i coefficienti ϕ ed r_K che sono dimensionali perche' dipendenti da K, costante di tempo espressa in unita' di periodo base.

La ricostruzione della serie DF_t si opera a partire da un valore iniziale, che su base annua non e' possibile ricavare da alcun indice fisico climatico . La scelta va fatta, pertanto, basandosi sull'assunto che il contributo medio di falda rispetto al deflusso totale sia pari ad a e quindi, per esempio, il primo valore della serie puo' essere il prodotto tra a ed il deflusso totale nel primo anno. In generale l'errore che si commette sul valore iniziale diventa trascurabile a distanza di qualche Lag, ma per la ridotta lunghezza delle serie normalmente disponibili e' difficile poter trarre vantaggio da questa circostanza.

In ultima analisi, il valore iniziale puo' essere stimato operando una previsione "al passato", mediante tecniche di Backcasting .

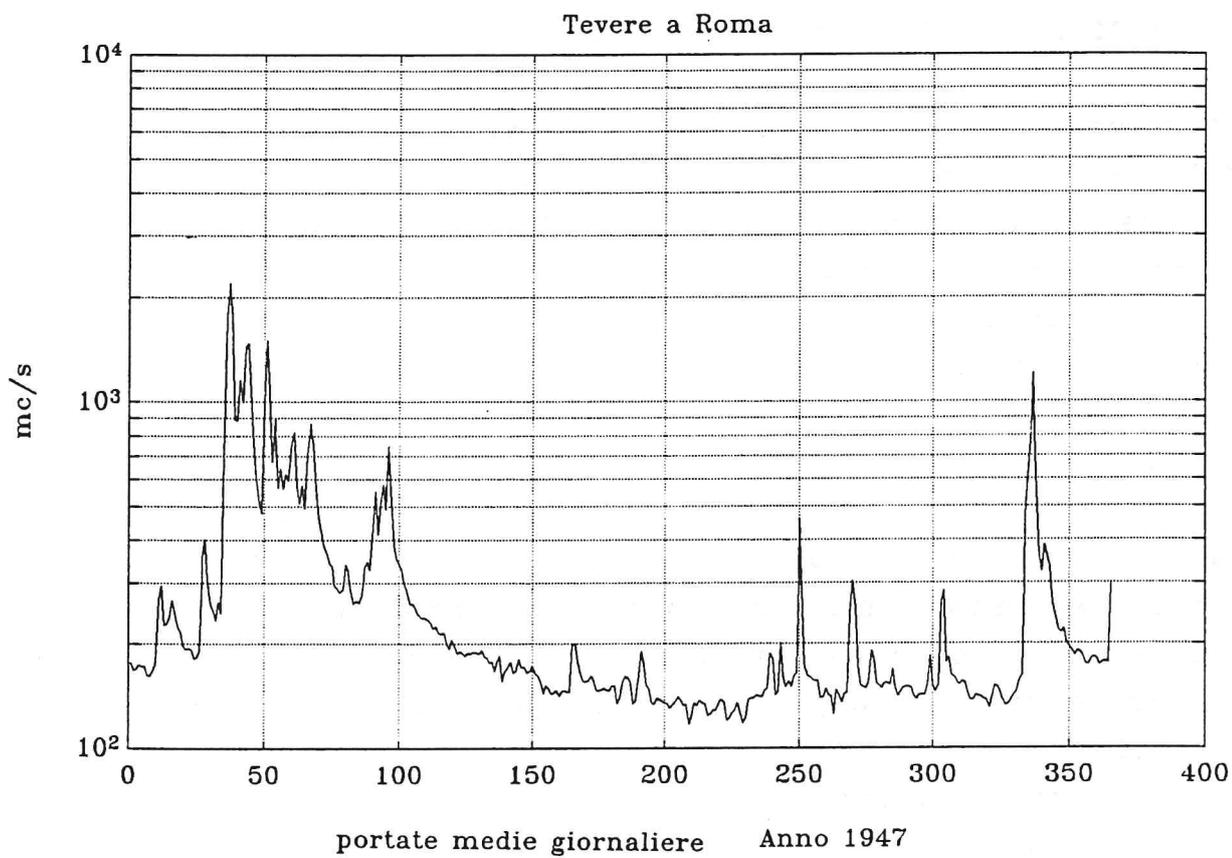


figura 3.2.1

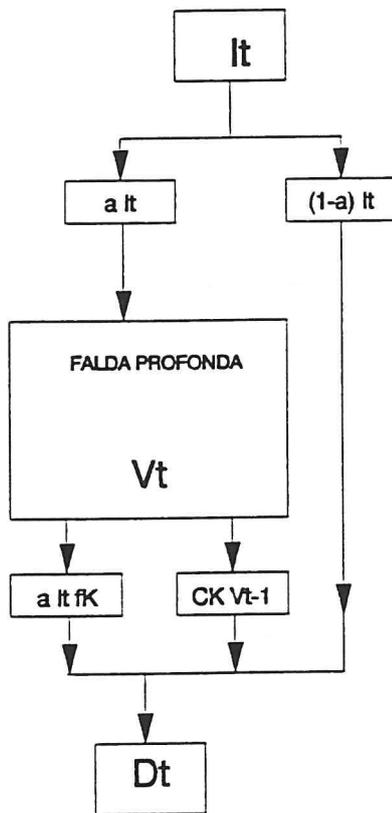


figura 3.2.2 Modello concettuale dei deflussi annui

Tempo di occorrenza equivalente al variare della costante d'invaso

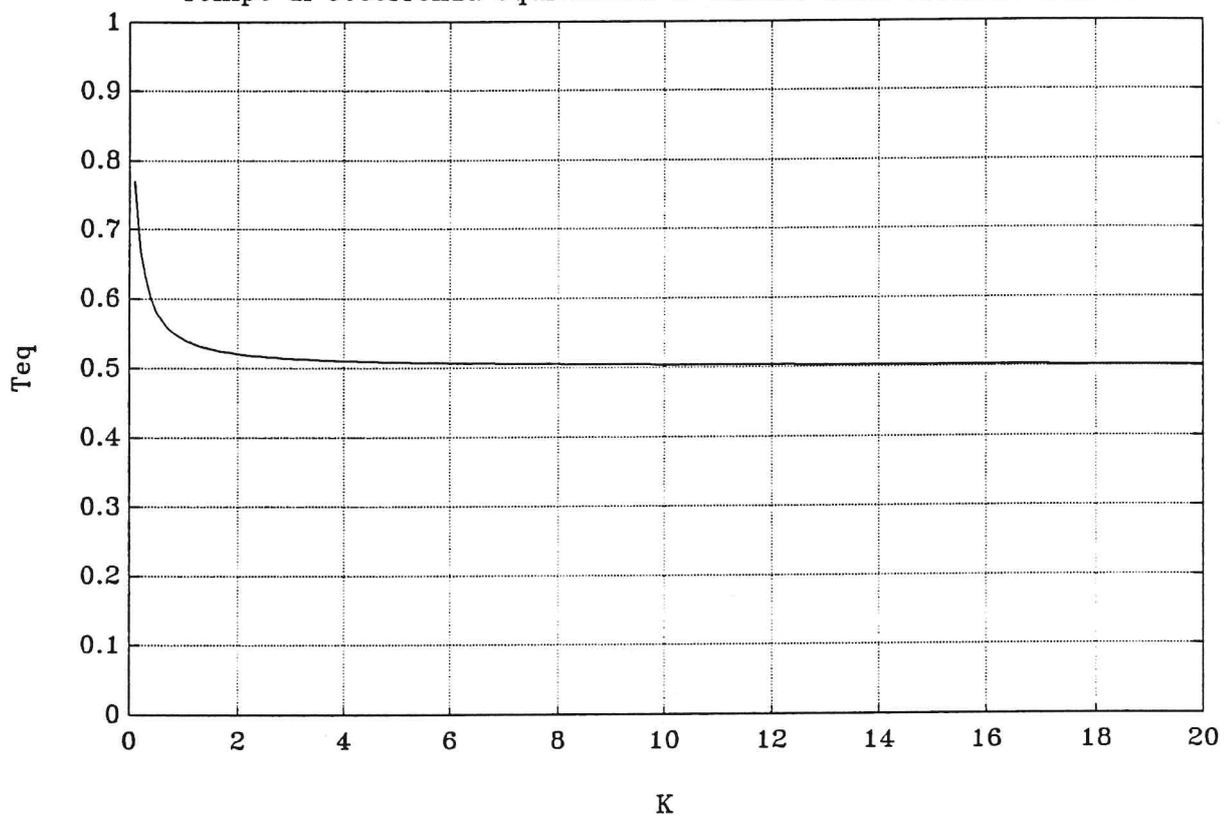


figura 3.4.1

4. PROCESSO DEI DEFLUSSI ANNUI: STIMA DEL MODELLO STOCASTICO A BASE CONCETTUALE

4.1. CARATTERISTICHE DELLE SERIE STORICHE DEI DEFLUSSI ANNUI E METODI DI STIMA.

Le valutazioni e le osservazioni che verranno fatte sui metodi e le modalita' delle stime dei parametri dei modelli stocastici non potranno non risentire dell'impostazione concettuale che ha condotto all'identificazione del modello. Infatti, l'esistenza di un modello concettuale di base fa si' che il modello statistico identificato sia necessariamente "adeguato" al processo in esame, per cui il metodo di stima deve, in un certo senso, "assecondare" le ipotesi di base. Si puo' dire, piu' correttamente, che nella stima dei parametri di un modello identificato su basi fisico-concettuali e' possibile tollerare che un parametro risulti poco significativo, dal momento che e' possibile verificarne l'attendibilita' anche sotto l'aspetto concettuale.

Riguardo al caso in esame, un certo calo di efficienza nelle stime dei parametri ϕ e θ del modello ARMA(1,1) puo' essere determinato dall'asimmetria che caratterizza la distribuzione di probabilita' dei deflussi annui. Un eventuale conseguente ricorso alla trasformazione dei dati avrebbe l'effetto di impedire l'impostazione basata sul modello concettuale, che e' lineare e quindi valido limitatamente al processo non trasformato. Vanno inoltre ricordati gli inconvenienti esposti in appendice A 2.2 connessi alla trasformazione dei dati. Per questo motivo, per quanto riguarda sia i deflussi annui che quelli mensili, il modello stocastico verra' applicato su dati non trasformati.

La maggior parte delle difficolta' che si incontrano nell'analizzare il processo dei deflussi annui sono dovute al fatto che generalmente le serie temporali che si hanno a disposizione sono piuttosto brevi. Questa circostanza risulta particolarmente sfavorevole quando si adottino gli usuali

procedimenti statistici di tipo empirico. Può accadere infatti che gli scarti campionari associati alla stima dei coefficienti di autocorrelazione risultino talmente alti da rendere difficile accertare l'esistenza di una tendenza autoregressiva della serie. Tanto per fare un esempio, per stabilire con buona approssimazione, anche visiva, l'esistenza di un fattore AR nella serie analizzata sarebbe necessario esaminare la funzione di autocorrelazione stimata almeno fino ai lag 6-8; per una sufficiente attendibilità statistica, è necessario che la serie contenga dati per almeno quattro volte il lag massimo, per cui servirebbero serie di durata non inferiore a 24 anni.

Sotto questo aspetto, i metodi di identificazione a base idrologica hanno l'indubbio vantaggio, rispetto ai criteri statistici, di permettere l'impiego di conoscenze a priori sulle caratteristiche del processo, per esempio ricavate dall'analisi dei deflussi a scale temporali diverse.

Mentre le difficoltà di identificazione del modello possono essere superate mediante l'approccio concettuale, meno semplice si presenta l'effettuazione delle stime dei parametri quando si ha a che fare con serie brevi. In questi casi è opportuno limitare, per quanto possibile, il numero dei parametri da stimare (nel nostro caso avendo cura di effettuare le stime sulla serie a media zero, mentre in generale la media può essere calcolata come parametro del modello ARMA).

Quando non si pone il problema della limitatezza dei dati a disposizione, le ipotesi idrologiche di base costituiscono un importante supporto al riscontro statistico poiché consentono un riscontro sui valori stimati dei parametri, dato che possono essere messi in relazione diretta con le caratteristiche del fenomeno.

Nell'ambito delle serie considerate, che appartengono a bacini idrografici non molto grandi e per lo più a carattere torrentizio, il processo dei deflussi annui mostra caratteristiche di elevata variabilità. Questa impressione è ricavata dall'esame delle funzioni di autocorrelazione, degli elevati errori standard sulle stime e dai valori bassi di varianza spiegata, come si vedrà meglio nel cap.7. È perciò fondamentale affiancare alle valutazioni statistiche di

significativita' delle stime criteri di validazione a base idrologica, di cui si trattera' nel paragrafo seguente.

4.2 VALIDAZIONE DELLE STIME DEI PARAMETRI CONCETTUALI CON L'IMPIEGO DI "INDICI FISICI"

In fase di verifica delle stime, la differenza sostanziale tra un modello statistico di tipo empirico ed uno a base concettuale e' che mentre il primo puo' considerarsi ben specificato se vengono superati i test sui parametri, il modello a base concettuale e' soddisfacente quando risultano verificate le ipotesi idrologiche di base. Nel caso del modello dei deflussi annui, la verifica va fatta sulla presenza di una eventuale falda sotterranea ad esaurimento pluriennale e sulla convalida delle stime dei parametri concettuali attraverso dati di vario genere, anche non appartenenti alla serie temporale adoperata per la stima.

La verifica di esistenza della falda ad esaurimento pluriennale corrisponde all'individuazione di persistenza a lungo termine nella serie osservata. Affinche' dalla serie dei deflussi annui possa essere riconosciuta la presenza della componente in questione, essa deve infatti avere un certo "peso" rispetto al valor medio dei deflussi.

In altri termini, se in un bacino e' presente una falda profonda, ma il valor medio del deflusso sorgentizio stimato (o calcolato) e' basso rispetto alla media del deflusso totale, la correlazione tra i deflussi di anni successivi risulta debole poiche' l'invaso costituito dall'acquifero non ha la capacita' di far dipendere in maniera sensibile i deflussi di un certo anno da quelli dell'anno precedente, cioe' ha costante d'invaso K inferiore ad 1 anno. Cio' lascia supporre che tra il valore di k e quello di a (misura del deflusso profondo rispetto al totale) ci sia in generale una corrispondenza piuttosto stretta, pur nella consapevolezza delle differenti dimensioni che possono avere il bacino superficiale ed il bacino profondo.

Oltre a comportare bassi valori della funzione di autocorrelazione cio' si ripercuote sulle stime dei parametri stocastici, che risultano debolmente significative. Risultano inoltre scarsamente affidabili i parametri concettuali ricavati dalle stime di ϕ e θ del modello ARMA(1,1).

A questo tipo di considerazioni si e' arrivati attraverso lo studio di serie temporali relative a bacini sui quali la presenza di consistenti deflussi estivi e' stata verificata a livello mensile e giornaliero. Nei casi in cui la funzione di autocorrelazione non evidenzia la presenza di una componente autoregressiva (e' il caso del Tanagro a Polla), pur in presenza di deflussi estivi, si sono adoperate anche le procedure di stima basate sul metodo dei momenti, descritte nel paragrafo precedente, che partono dal presupposto che la funzione di autocorrelazione stimata abbia andamento esponenziale decrescente. Ma pur riuscendo a definire un coefficiente accettabile per la parte AR, non si e' riusciti a portare a termine le stime dei parametri concettuali, data l'inattendibilita' delle stime del coefficiente MA.

Indici fisici dei parametri concettuali

Si e' dato questo nome a grandezze che possono essere considerate approssimazioni dei parametri del modello concettuale proposto. Ai fini di un discorso di regionalizzazione, ovvero di applicazione del modello a bacini dove siano disponibili pochi dati, una valutazione del coefficiente α di ricarica alla falda profonda puo' essere fatta calcolando il rapporto tra le superfici del bacino ricoperte da aree carbonatiche fratturate, o assimilabili ad esse dal punto di vista della capacita' di immagazzinamento, e la superficie totale del bacino. Per quanto attiene il coefficiente di esaurimento $c_K = e^{-1/K}$, e' sufficiente esaminare l'andamento dei deflussi per un numero limitato di anni e rifarsi ai procedimenti di stima proposti in letteratura [BAKO & HUNT, 1988], [INSTITUTE OF HYDROLOGY - WALLINGFORD, 1980], peraltro applicati tipicamente su basi temporali inferiori al mese.

In alternativa a questo tipo di stime ed in particolare per il coefficiente di ricarica alla falda profonda, si e' pensato di adoperare un indicatore di piu' semplice valutazione .

Si puo' definire infatti un "Indice di Deflusso Profondo" I_p , analogo al Base Flow Index [INSTITUTE OF HYDROLOGY - WALLINGFORD, 1980] per rappresentare approssimativamente il rapporto tra il deflusso attribuibile alla falda pluriennale ed il deflusso totale. Il modo piu' veloce per valutare il deflusso di falda profonda, per esempio misurato in mc/s, e' quello di calcolare la media della serie del deflusso mensile minimo nell'anno idrologico (espresso sempre in mc/s).

Come si vede in (fig. 4.2.1), calcolare la media di questa serie corrisponde ad ipotizzare che il deflusso di falda sia lineare tra un anno e l'altro e che il minimo mensile di ogni anno idrologico costituisca una stima del deflusso profondo di quel particolare mese. La validita' dell'indice I_p come misura del deflusso di falda profonda puo' essere riconosciuta se si considera che, mentre e' certo che i deflussi profondi nella stagione piovosa sono superiori a quelli ipotizzati dall'andamento lineare, e' pur vero che il minimo del deflusso mensile e' sistematicamente maggiore del minimo della portata giornaliera (il quale costituisce una misura di portata sorgentizia). E' lecito percio' aspettarsi che il sommarsi di errori di segno opposto sia sufficiente per accettare l'indice I_p quale misura approssimata di a .

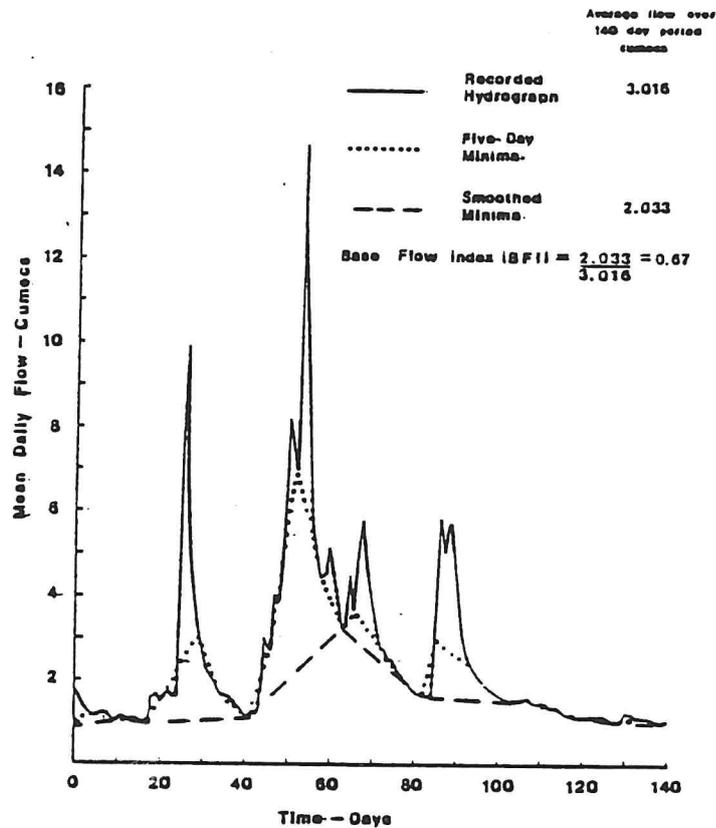
L'impiego del coefficiente I_p per la validazione del coefficiente a del modello concettuale puo' essere di supporto all'individuazione di una soglia al di sotto della quale la presenza della falda profonda non e' correttamente rilevabile attraverso indagini statistiche e consente di evidenziare caratteristiche particolari delle serie che possano metterne in dubbio la naturalita'.

Allo stesso modo puo' risultare utile esaminare la variabile "minimo annuo del deflusso giornaliero" la cui media, divisa per la media totale da' luogo ad un indice che possiamo chiamare I_s =indice di deflusso sorgentizio.

La valutazione della "qualita'" della serie, cioe' della presenza o meno di regolazione del regime dei deflussi, e' stata effettuata in vari modi. Si e' controllato innanzitutto

l'andamento delle serie a scala annua, verificando che non vi fossero anomalie nella funzione di autocorrelazione. La presenza di autocorrelazione negativa al Lag-1, su serie temporali in cui e' apprezzabile la presenza di deflussi di falde profonde, e' senz'altro indice di "regime innaturale" (si e' valutata la presenza ed il peso dei deflussi profondi sempre attraverso l'indice Ip).

Nei casi dubbi si e' passati all'osservazione delle serie dei deflussi giornalieri, dove l'effetto delle regolazioni e' piu' evidente, perche' risulta in brusche cadute di portata o in periodi di deflusso innaturalmente costante. A conclusione di questa analisi va rilevata l'importanza del controllo sul regime del corso d'acqua, soprattutto perche' e' molto difficile disporre di serie temporali di deflussi sui quali non sono state effettuate regolazioni di alcun genere, specie se si tratta di serie appartenenti a bacini nei quali sono presenti falde profonde. L'importanza di basare il modello statistico su presupposti concettuali sta anche nel consentire di valutare il "peso" degli effetti antropici sulla serie storica, rendendone possibile l'analisi anche in presenza di regolazioni o captazioni di entita' non significativa.



CALCULATION OF BASE FLOW INDEX FROM DATA

figura 4.2.1 Esempio di calcolo del Base Flow Index (tratto da Low Flow Studies (1980))

5 APPROCCIO CONCETTUALE ALLA COSTRUZIONE DI MODELLI STOCASTICI DEI DEFLUSSI MENSILI

5.1 MODELLO CONCETTUALE DEI DEFLUSSI MENSILI

Alla scala temporale mensile, l'osservazione delle serie storiche dei deflussi dei corsi d'acqua a regime appenninico consente l'individuazione di tre contributi fondamentali.

Il primo e' quello dovuto alla falda sotterranea ad esaurimento pluriennale, quando esiste, ed e' evidente alla fine della stagione secca, cioe' nei mesi di Agosto e Settembre. Nei bacini appenninici, in altri termini, si puo' ritenere con buona approssimazione che il valor minimo del deflusso annuo e' costituito interamente da apporti sorgentizi di falde profonde.

Il secondo contributo e' relativo alla falda sotterranea ad invaso plurimensile, o "stagionale". L'apporto di questo acquifero e' riconoscibile alla fine della stagione piovosa, quando la curva dei deflussi assume un andamento di decrescita esponenziale. Poiche' il deflusso proveniente dalla falda stagionale si esaurisce nel giro di due-tre mesi la sua presenza e' sicuramente piu' evidente su base giornaliera, come gia' accennato nel paragrafo 3.2.

I deflussi provenienti dalla falda stagionale sono caratterizzati da una spiccata periodicita', presentandosi sempre praticamente nulli nella stagione secca e con andamento crescente in autunno e decrescente in primavera.

L'ultimo contributo rilevabile a livello mensile e' costituito dagli apporti aventi ritardo sub mensile, quali il deflusso subsuperficiale (ipodermico), e superficiale, i quali formano, a scala mensile, il deflusso diretto .

Il deflusso diretto e' considerato proporzionale all'afflusso netto o efficace e rappresenta un processo puramente casuale avente parametri variabili da mese a mese. Le falde sono invece considerate invasi lineari poiche' introducono dipendenza temporale nelle sequenze dei deflussi.

In base a queste considerazioni si puo' impostare un modello concettuale dei deflussi mensili considerando il deflusso D_t come l'uscita di un sistema lineare, formato da due invasi in parallelo ed una traslazione con ritardo sub-mensile, il cui l'ingresso e' costituito dall'afflusso netto I_t (fig. 5.1.1).

L'afflusso netto I_t si suddivide nelle aliquote:

aI_t = ricarica alla falda pluriennale, che avviene nella proporzione determinata sulla base temporale annua

bI_t = ricarica alla falda stagionale

$(1-a-b)I_t$ = deflusso diretto.

I coefficienti a e b sono considerati per semplicita' costanti, cioe' indipendenti dalla stagione.

In analogia con lo schema adoperato su base annua, il contributo degli acquiferi si puo' distinguere in due aliquote.

Una e' dovuta all'esaurimento dell'invaso proprio della falda, ed e' pari rispettivamente a $C_k V_{t-1}$ per l'invaso pluriennale e $C_q W_{t-1}$ per quello stagionale. C_k e C_q sono i fattori di esaurimento dell'invaso pluriennale e di quello plurimensile, di significato corrispondente al C_K definito per i deflussi annui. k e q sono ovviamente le costanti d'invaso.

La seconda aliquota corrisponde all'esaurimento del volume di ricarica ed ha a sua volta significato ed espressione corrispondenti a quelli introdotti nel capitolo 3:

$f_k a I_t$ per la falda pluriennale

$f_q b I_t$ per la falda plurimensile

dove f_k ed f_q sono rispettivamente fattori di esaurimento delle falde pluriennale e stagionale.

La costante k e' relativa alla falda pluriennale ma e' valutata a scala mensile e corrisponde al valore K , in anni, moltiplicato per 12. Volendo ricalcolare su base mensile i coefficienti di esaurimento relativi alla falda pluriennale bastera' sostituire

k con $12K$ nelle rispettive espressioni. In particolare, per C_k si avra':

$$C_k = (1-c_k) = (1-e^{-1/k}) = (1-e^{-1/12K}) = (1-(e^{-1/K})^{1/12}) =$$

$$C_k = (1-(c_K)^{1/12})$$

Riassumendo, le grandezze concettuali necessarie alla descrizione dei contributi dei due invasi sono:

a = coefficiente di ricarica alla falda profonda

b = coefficiente di ricarica alla falda stagionale

V_{t-1} = volume invasato nella falda profonda all'inizio del periodo (= volume invasato alla fine dell'intervallo precedente)

W_{t-1} = volume invasato nella falda stagionale all'inizio del periodo

k = costante d'invaso della falda profonda

q = costante d'invaso della falda stagionale

$c_k=(1-C_k)$ = coefficiente di esaurimento dell'invaso profondo

$c_q=(1-C_q)$ = coefficiente di esaurimento dell'invaso stagionale

$r_k=(1-f_k)$ = coefficiente di esaurimento della ricarica alla falda profonda

$r_q=(1-f_q)$ = coefficiente di esaurimento della ricarica alla falda stagionale

C_k = fattore di esaurimento dell'invaso profondo

C_q = fattore di esaurimento dell'invaso stagionale

f_k = fattore di esaurimento della ricarica alla falda profonda

f_q = fattore di esaurimento della ricarica alla falda stagionale

Per quanto riguarda i coefficienti di esaurimento della ricarica, $r_k (=1-f_k)$ ed $r_q (=1-f_q)$, va precisato che sono da calcolarsi esclusivamente con l'espressione relativa ad input uniforme all'interno del periodo, poiche' non sembra ragionevole nessuna altra ipotesi. Sara' quindi:

$$r_k = k(1 - e^{-1/k}) \quad \text{e} \quad r_q = q(1 - e^{-1/q}).$$

Poiche' i valori assunti dalla costante d'invaso della falda profonda sono molto alti se espressi in mesi, il valore di r_k tende ad 1, per cui si potrebbe anche trascurare, nel bilancio di massa, il contributo $f_k a I_t$ che e' molto piccolo.

I parametri del modello concettuale sono quindi:

a , b = coefficienti di ricarica alla falda pluriennale e stagionale

k , q = costanti d'invaso delle falde pluriennale e stagionale

In alternativa alle costanti d'invaso, possono essere considerati parametri concettuali i coefficienti di esaurimento delle due falde, c_k e c_q .

Esplicitando V_t e W_t rispettivamente nella seconda e terza equazione e sostituendone le espressioni nella prima, si ottiene una rappresentazione ARMA del tipo:

$$D_t - [c_k + c_q]D_{t-1} + [c_k c_q]D_{t-2} = (1 - ar_k - br_q)I_t - [c_k + c_q - ar_k(1+c_q) - br_q(1+c_k)]I_{t-1} - [ar_k c_q + br_q c_k - c_k c_q] I_{t-2}$$

Da questa relazione e' ottenibile un modello stocastico univariato ARMA(2,2), che puo' esprimersi sinteticamente, tenendo presente che $B^2 D_t = D_{t-2}$, nella notazione:

$$D_t[1-B\phi_1-B^2\phi_2] = \epsilon_t[1-B\theta_1-B^2\theta_2]$$

La corrispondenza tra i parametri concettuali a, b, c_k e c_q , (si considerano per la maggiore sinteticita' c_k e c_q , dai quali k e q sono ottenibili con le relazioni $k=-1/\ln(c_k)$ e $q=-1/\ln(c_q)$) e quelli stocastici $\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2$, si realizza con le espressioni:

$$\phi_1 = c_k + c_q$$

$$\phi_2 = -c_k c_q$$

$$\theta_1 = \frac{c_k + c_q - ar_k(1+c_q) - br_q(1+c_k)}{(1 - ar_k - br_q)}$$

$$\theta_2 = \frac{ar_k c_q + br_q c_k - c_k c_q}{(1 - ar_k - br_q)}$$

Analogamente a quanto visto nel caso del modello dei deflussi annui, il residuo ϵ_t del modello stocastico ha il significato di deflusso diretto. Viene tuttavia anche in questo caso piu' comodo ricavare da ϵ_t l'input netto I_t , che prende questo nome, si ricorda, dal momento che rappresenta una quantita' direttamente proporzionale al deflusso diretto invece che una variabile idrologica esterna.

$$\epsilon_t = I_t(1 - ar_k - br_q)$$

Affinche' possa considerarsi valida la corrispondenza tra modello concettuale e modello stocastico ARMA(2,2), il termine $I_t(1 - ar_k - br_q)$ deve avere le caratteristiche di un processo stazionario ed incorrelato.

Il deflusso diretto su scala mensile e' senz'altro un processo indipendente ed unimodale nella distribuzione di probabilita', ma presenta variabilita' stagionale nei parametri. D'altra parte, i parametri relativi ad un dato mese sono caratterizzati da forte variabilita' di tipo stocastico, per cui si puo' parlare di processo pseudo-periodico (aleatorio, stazionario) invece che di processo periodico (deterministico, non stazionario) e si possono considerare rispettate le ipotesi di base.

Di conseguenza, il modello stocastico appena identificato puo' definirsi un ARMA(2,2) a residuo pseudo-periodico.

relazioni tra parametri concettuali e stocastici

Dalle stime dei coefficienti $\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2$ del modello stocastico e' quindi possibile ricavare i parametri del modello concettuale, attraverso le relazioni:

$$\left. \begin{array}{l} c_k \\ c_q \end{array} \right\} = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{(\phi_1^2 + 4\phi_2)}}{2}$$

Per scrivere le relazioni tra a, b e $\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2$, conviene adoperare le posizioni:

$$M = (1 - \theta_1 - \theta_2)$$

$$N = (1 - \phi_1 - \phi_2)$$

dalle quali si ottiene:

$$a = \frac{M - N - Mbr_q}{Mr_k}$$

$$b = \frac{-(\theta_1 - \theta_2)N + (\phi_1 - \phi_2)M + (1 + 2c_q)(N-M)}{2M(c_k - c_q)r_q}$$

Risulta infine, se le serie sono a media zero (appendice 5.1):

$$I_t = \frac{\epsilon_t}{(1 - ar_k - br_q)}$$

5.3 LIMITAZIONI ALL'APPLICABILITA' DEL MODELLO STOCASTICO CONCISO PER I DEFLUSSI MENSILI

Come già accennato nel cap. 3, l'approccio fenomenologico all'analisi statistica dei deflussi ha lo scopo di identificare modelli stocastici in grado di soddisfare due requisiti:

- l'efficienza descrittiva, che si misura in termini di pure e semplici prestazioni statistiche del modello
- l'efficienza interpretativa, che è necessaria per stimare i parametri concettuali con la necessaria affidabilità.

Pertanto la valutazione delle prestazioni di un modello stocastico identificato su basi fenomenologiche deve essere fatta necessariamente sulla base di entrambi gli aspetti citati.

A questo proposito va subito segnalato che il modello stocastico appena identificato si presenta con grosse limitazioni sulle condizioni di stima.

Da quanto riportato in appendice A 5.2, infatti, si può evincere che lo spazio "utile" dei parametri Φ_1 e Φ_2 , a causa delle ipotesi concettuali di base, assume dimensioni molto ridotte e soprattutto si presenta a ridosso della regione di nonstazionarietà, in corrispondenza della quale le stime diventano molto variabili.

Riguardo all'effetto che possono avere sulla stima le caratteristiche periodiche delle serie mensili, va ricordato che le procedure di destagionalizzazione (appendice A 2.3) provocano la scomparsa degli effetti esercitati dall'invaso ad esaurimento stagionale (risulta significativa una sola componente AR). D'altro canto, la presenza di pseudo-periodicità nel residuo accentua la variabilità delle stime dei parametri AR ed MA effettuate sulla serie non destagionalizzata.

Una verifica empirica delle considerazioni fatte fin qui è venuta dalle stime effettuate sulle serie mensili dei deflussi relative a bacini nei quali sono sicuramente presenti contributi di falde ad esaurimento pluriennale.

In tab. 5.3.1. si riportano i risultati delle stime dei parametri stocastici e dei conseguenti valori dei parametri concettuali per le serie del Tevere a Roma e del Nera a Torre

Orsina, contrassegnate rispettivamente con i codici 7 ed 8 come riferito nel cap. 7.

Nel caso della stazione 7 non e' possibile ricavare il valore dei parametri c_k e c_q poiche' risulta negativo il determinante dell'equazione di secondo grado ottenuta con le posizioni:

$$\Phi_1 = c_k + c_q \quad e \quad \Phi_2 = -c_k c_q$$

mentre per la stazione 8 si ritrova un valore negativo per il coefficiente c_q .

Anche volendo imporre il rispetto dei valori del parametro c_k calcolati su base annuale (modello dei deflussi annui), tenendo presente che $c_k = c_K^{1/12}$, non si raggiungono risultati compatibili in termini di valori di c_q e ar_k , come risulta dalla tabella 5.3.2.

Una ulteriore verifica della impraticabilita' delle stime dei parametri concettuali effettuate col modello ARMA(2,2) e' venuta dall'effettuazione di procedimenti di stima vincolata. Questi sono stati applicati utilizzando il dato annuo della costante d'invaso della falda profonda, e quindi il c_K annuo, per calcolare il valore c_k mensile ($c_k = c_K^{1/12}$) e con esso impostare un vincolo tra Φ_1 e Φ_2 basato sulle relazioni che hanno con c_k e c_q :

$$\Phi_1 = c_k - \frac{\Phi_2}{c_k}$$

L'applicazione di questo schema di stima non ha fatto altro che spostare le inconsistenze sui parametri θ_1 e θ_2 portando cosi' ancora a valori negativi di a o b .

La conclusione che si trae dalle premesse teoriche e dalle verifiche effettuate e' che la scala mensile e' troppo piccola per consentire la stima dei parametri della falda ad esaurimento pluriennale.

Non risulta percio' possibile stimare simultaneamente i parametri della falda profonda e di quella stagionale.

TABELLA 5.3.1

stazione 7		stazione 8	
=====		=====	
$R^2 =$	0.369	$R^2 =$	0.715
$\theta_1 =$	0.770	$\theta_1 =$	-0.305
$\theta_2 =$	-0.030	$\theta_2 =$	-0.090
$\phi_1 =$	1.377	$\phi_1 =$	0.585
$\phi_2 =$	-0.504	$\phi_2 =$	0.180
$(\phi_1^2 + 4\phi_2) =$	-0.112	$(\phi_1^2 + 4\phi_2) =$	1.06
		$c_k =$	0.808
		$c_q =$	-0.223

TABELLA 5.3.2

stazione 7		stazione 8	
=====		=====	
c_K	0.744		0.788
c_k	0.976		0.980
$c_q (= \phi_1 - c_k)$	0.404		-0.395
ar_k	0.036		

5.4 IDENTIFICAZIONE DI UN MODELLO STOCASTICO A DUE STADI PER I DEFLUSSI MENSILI.

Per riassumere quanto si e' esposto nel paragrafo precedente si puo' dire che il modello stocastico ARMA(2,2) non risulta efficiente sotto l'aspetto interpretativo, perche' non consente di stimare correttamente i parametri del modello concettuale sulla cui base e' stato identificato.

Senza questo requisito l'aspetto di efficienza descrittiva assume scarso significato, dato che viene a mancare il supporto di verifica delle stime costituito dalla interpretazione concettuale dei parametri. Inoltre, come vedremo, il conseguimento di una buona efficienza interpretativa e' presupposto anche di una maggiore efficienza descrittiva, quantificabile dai valori assunti dalla statistica R^2 (varianza spiegata).

5.4.1 modello concettuale dei deflussi mensili a componenti separate

I problemi che si pongono nella stima simultanea dei parametri concettuali sono dovuti al fatto che gli elementi concettuali di invaso profondo ed invaso stagionale sono caratteristici di scale temporali diverse. La relativa soluzione dovrebbe venire da uno schema che consenta la stima di ogni parametro concettuale alla sua scala di aggregazione caratteristica.

A questo scopo si rende necessario separare, innanzitutto concettualmente, i contributi relativi alla falda profonda da quelli di falda stagionale e di deflusso diretto. Il sistema lineare costituito dai due invasi in parallelo piu' la traslazione va quindi riguardato come un sistema costituito da due sottosistemi in parallelo (fig. 5.4.1).

Il primo dei due, che chiameremo sottosistema pluriennale, e' costituito solo da un invaso lineare, che rappresenta la falda ad esaurimento pluriennale; il secondo (sottosistema stagionale)

comprende invece un invaso lineare (falda stagionale) ed una traslazione a ritardo submensile.

L'ingresso al sistema generale, I_t , che chiameremo direttamente input netto, si divide quindi in un'aliquota aI_t che alimenta il sottosistema pluriennale ed in una $(1-a)I_t$ ($=I_t^*$), che costituisce l'ingresso al sottosistema stagionale.

I parametri concettuali del sistema generale sono sempre i coefficienti a e b di ricarica e c_k e c_q di esaurimento delle due falde. Solo quando si considera separatamente il sottosistema stagionale conviene, come vedremo, adoperare il parametro b^* , proporzionale a b .

I parametri concettuali dei singoli sottosistemi vanno stimati separatamente attraverso i relativi modelli stocastici, riferiti alla scala temporale opportuna. Lo schema stocastico complessivo sarà costituito dall'insieme dei due modelli relativi ai sottosistemi.

5.4.2 Identificazione del modello stocastico per il sottosistema pluriennale

Come si è verificato nel paragrafo 5.3, il parametro di esaurimento dell'invaso pluriennale è da stimare su base annua.

Se si riguarda il sistema generale di fig. 5.4.1 riferendolo alla scala annuale, ci si rende conto che equivale al modello concettuale proposto per i deflussi annui. Infatti, alla falda pluriennale si affianca un sistema che opera sull'ingresso $(1-a)I_t$ una distorsione con ritardo subannuale, effetto che su base annuale corrisponde appunto ad una traslazione senza ritardo.

Per questo motivo i parametri a e k (o c_k) del sottosistema pluriennale vanno stimati con il modello stocastico ARMA(1,1) dei deflussi annui, adoperando le relazioni, riportate nel cap. 3, tra essi ed i parametri stocastici ϕ e θ .

Per tornare alla scala mensile basta solo riportare il parametro K , espresso in anni, al valore k , espresso in mesi.

5.4.3 Identificazione del modello stocastico per il sottosistema stagionale

Poiche' l'ingresso reale al sottosistema e' costituito dalla quantita' $(1-a)I_t$, per evidenziare la corrispondenza formale tra esso ed il sistema introdotto per i deflussi annui (a sua volta costituito da un invaso lineare ed una traslazione senza ritardo) conviene adoperare parametri opportunamente riscaldati in base al fattore $(1-a)$. Indicheremo, quindi con il simbolo D^* il deflusso del sottosistema stagionale, che corrisponde alla frazione $(1-a)D_t$ del deflusso totale, ed in maniera analoga le altre grandezze (come riportato in fig. 5.4.1):

$$D_t^* = D_t(1-a)$$

$$b^* = b / (1-a)$$

$$I_t^* = I_t(1-a)$$

Le equazioni del bilancio dei volumi per il sottosistema stagionale sono quindi:

Bilancio di volumi del sottosistema

$$D_t^* = c_q W_{t-1} + I_t^* b^* f_q + I_t^* (1-b^*)$$

Bilancio di volumi dell'invaso

$$W_t = W_{t-1} (1-c_q) + I_t^* b^* (1 - f_q)$$

Da esse si ricava la forma ARMA:

$$D_t^* - c_q D_{t-1}^* = (1-b^* r_q) I_t^* - (c_q - b^* r_q) I_{t-1}^*$$

In analogia con lo schema considerato per i deflussi annui, a questa rappresentazione corrisponde un modello stocastico **ARMA(1,1)**. I requisiti necessari per poter considerare $(1-b^* r_q) I_t^*$ un white noise sono da ritenersi soddisfatti per quanto

esposto nel paragrafo 5.2 a proposito delle caratteristiche dell'input netto, per cui in questo caso si puo' parlare qui di modello ARMA(1,1) a residuo pseudo-periodico:

$$D_t^* - \phi D_{t-1}^* = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$$

La corrispondenza tra modello concettuale e modello stocastico e' assicurata dalle posizioni:

$$\phi = c_q = e^{-1/q} =$$

$$\theta = \frac{c_q - b^* r_q}{1 - b^* r_q} = \frac{e^{-1/q} - b^* r_q}{1 - b^* r_q}$$

$$\epsilon_t = I_t^* (1 - b^* r_q)$$

per cui, stimati i parametri del modello stocastico, quelli concettuali si ottengono con le relazioni:

$$b^* = \frac{\phi - \theta}{r_q (1 - \theta)}$$

$$q = - \frac{1}{\ln \phi}$$

$$I_t^* = \frac{\epsilon_t}{(1 - b^* r_q)}$$

Si ricorda che che la relazione tra I_t^* ed ϵ_t vale come sopra specificato solo se D_t^* ed I_t^* sono a media zero, cioe' per l'espressione seguente del modello concettuale:

$$(D_t^* - \mu^*) - c_q (D_{t-1}^* - \mu^*) = (1 - b^* r_q) (I_t^* - \mu^*) - (c_q - b^* r_q) (I_{t-1}^* - \mu^*)$$

e per il modello stocastico:

$$(D_t^* - \mu^*)[1 - B\Phi] = e_t[1 - B\theta]$$

dove vale $E[e_t] = 0$.

In appendice 5.0 e' riportata una formulazione alternativa, ma meno efficiente, del modello stocastico ora identificato, ottenuta esplicitando la struttura del residuo e_t sulla base di una ipotesi di struttura su I_t .

5.4.4 Modello stocastico a due stadi dei deflussi mensili

Lo schema stocastico che risulta dalla impostazione seguita si presenta costituito da due stadi di applicazione.

- Il primo stadio consiste nella stima dei parametri relativi al sistema pluriennale, e si e' visto che il modello stocastico dei deflussi annui consente di ottenere stime dirette di a e k .

- Il secondo stadio e' quello in cui si stimano i parametri del sottosistema stagionale. In questa fase non e' possibile procedere a stime dirette, poiche' va prima di tutto stimata la variabile D^* (deflusso di sottosistema), che non e' un dato del problema.

Il secondo stadio del modello consiste percio' in una procedura iterativa costituita da:

- fase di separazione delle componenti del deflusso, che porta alla stima della serie D^*
- stima dei parametri b^* e q del sottosistema stagionale sulla serie D^* stimata
- verifica delle ipotesi alla base della stima di D^*

Per determinare il deflusso D^* si richiede una stima a scala mensile del contributo della falda profonda, allo scopo di sottrarlo al deflusso totale.

In letteratura si trovano varie metodologie per la separazione delle componenti di deflusso, per lo piu' basate su

tecniche di filtraggio numerico della serie [es. Hino & Hasebe, 1986], tecniche in genere applicate a deflussi orari. Nel nostro caso, invece, la presenza di un sistema concettuale di base consente di effettuare la separazione adoperando gli stessi parametri concettuali stimati.

Nel prossimo capitolo ci si soffermerà sulle modalità di stima del modello a due stadi ed in particolare sulla applicazione della stima iterativa dei parametri del sottosistema stagionale.

5.5 MODELLO CONCETTUALE DEI DEFLUSSI MENSILI PER BACINI SENZA FALDA PROFONDA

In Italia meridionale nella maggior parte dei casi i contributi di falde ad esaurimento pluriennale nelle serie dei deflussi non si ritrovano o sono trascurabili. Rispetto a queste serie presenta poi maggiore difficoltà la modellazione, su base stagionale, con approccio puramente statistico.

La principale difficoltà che si incontra nella modellazione statistica empirica di queste serie è la possibilità che nella stagione secca presentino degli zeri, o comunque valori molto bassi. Questa circostanza ha come primo effetto quello di accrescere notevolmente il coefficiente di asimmetria rispetto alle serie che presentano dipendenza a lungo termine. All'incremento dell'asimmetria si aggiungono però le difficoltà di applicare la trasformata logaritmica, in genere la più usata, che in questo caso sarebbe più che mai necessaria. Anche volendo "shiftare" i dati per calcolarne i logaritmi, non si risolve completamente il problema, dato che lo shift induce effetti secondari sulle serie.

Le serie di questo tipo non si prestano perciò ad assumere una distribuzione di probabilità Gaussiana, poiché presentano un valore finito di probabilità intorno allo zero, cosa che, come vedremo nel cap. 8, suggerisce di ricorrere a distribuzioni di probabilità composte, in grado cioè sia di adattarsi con

continuita' al fenomeno che di riprodurre la probabilita' finita sul valore zero.

L'ultima osservazione sulla modellazione stocastica empirica applicata alle serie in oggetto riguarda le classi di modelli che potrebbero prestarsi ad essere applicati su di esse. Trattandosi di serie sulle quali si ha solo persistenza a breve termine, qualsiasi destagionalizzazione finirebbe per privarle dell'effetto della falda superficiale; i modelli che meglio si prestano al caso sono quindi quelli a parametri periodici, che non necessitano di destagionalizzazione. Per essi rimangono tuttavia le difficolta' di trasformazione e le perplessita' sugli effetti esercitati dai valori zero sulla struttura correlativa dei mesi nei quali compaiono. Ulteriori commenti accompagneranno l'applicazione di uno di questi modelli sulle serie esaminate.

Per quanto detto finora dovrebbe essere evidente che l'impiego della concettualizzazione puo' dare un contributo notevole all'analisi di queste serie, a causa della possibilita' di beneficiare delle conoscenze a priori sul fenomeno. Rispetto alle serie dei deflussi che non presentano caratteristiche di dipendenza a lungo termine, risultano abbastanza semplici sia la fase di identificazione (su base fenomenologica) che la fase di stima del relativo modello stocastico.

Infatti, eliminando l'invaso ad esaurimento pluriennale da entrambi i sistemi introdotti in questo capitolo, cio' che rimane e' l'equivalente del sottosistema stagionale (invaso + traslazione senza ritardo) per il quale e' stato identificato un modello stocastico ARMA(1,1).

Valgono quindi le stesse relazioni tra parametri concettuali e stocastici riportate per il sottosistema citato, ma riferite alle grandezze I_t , D_t , b , invece che a I_t^* , D_t^* , b^* .

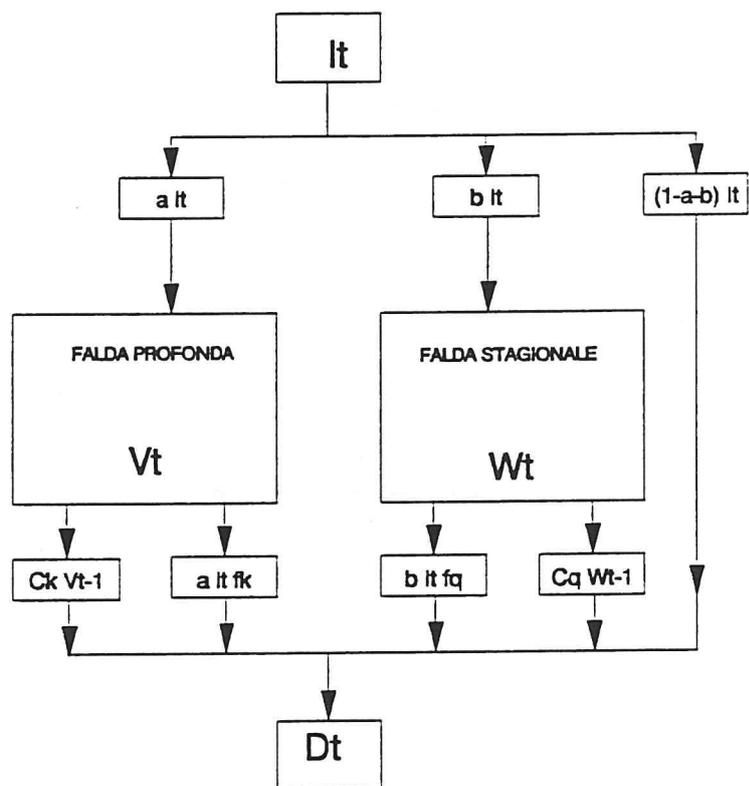


figura 5.1.1 Modello concettuale conciso dei deflussi mensili

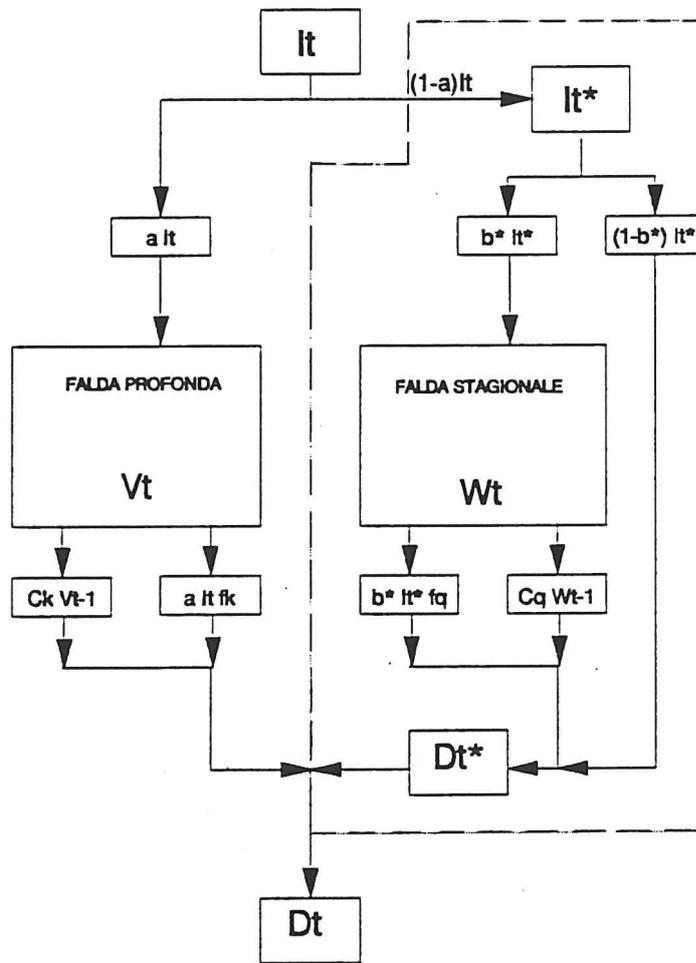


figura 5.4.1 Modello concettuale a due stadi dei deflussi mensili

6 STIMA DEL MODELLO STOCASTICO A BASE CONCETTUALE DEI DEFLUSSI MENSILI

6.1 FASI DELLA STIMA DEL MODELLO STOCASTICO A DUE STADI DEI DEFLUSSI MENSILI

La particolare struttura assunta dal modello stocastico a due stadi identificato nel capitolo precedente suggerisce di riferire la stima ai parametri concettuali piuttosto che a quelli stocastici.

Le stime definitive dei parametri del modello stocastico possono essere infatti ricavate solo dopo aver effettuato la separazione delle componenti, attraverso la quale si isola il deflusso del sottosistema stagionale; pertanto la stima del modello stocastico e' composta non solo dalle normali procedure statistiche, ma comprende anche le operazioni di separazione delle componenti, che sono condotte su basi idrologiche.

L'intera fase di stima risulta cosi' centrata sui parametri del modello concettuale, che vengono adoperati intesi sia in senso statistico che idrologico.

La separazione delle componenti si realizza ricostruendo il deflusso mensile di falda profonda attraverso una struttura iterativa di operazioni. La ricostruzione viene cioe' resa possibile ponendo la serie dell'input netto mensile in ingresso all'invaso profondo; l'input netto mensile non puo' essere noto al momento di separare le componenti, poiche' viene ricavato dal residuo del modello stocastico, per cui se ne richiede una stima iniziale a partire dalla quale e' possibile procedere per via iterativa alla stima dei parametri stocastici.

Le iterazioni si fermano nel momento in cui la serie dell'input netto a partire dalla quale si e' realizzata la separazione delle componenti e' praticamente coincidente con la serie ottenuta dal residuo del modello stocastico .

La sequenza dei passi della procedura, che verra' commentata nelle diverse fasi, e' esposta nello schema che segue.

PROCEDURA DI STIMA DEL MODELLO A DUE STADI DEL DEFLUSSO MENSILE

1. stima dei parametri stocastici e concettuali della falda pluriennale dal modello dei deflussi annui
2. disaggregazione dell'Input Netto annuo alla base mensile
3. calcolo della serie dei deflussi di falda pluriennale
4. separazione delle componenti; calcolo della serie dei deflussi del sottosistema stagionale
5. stima dei parametri stocastici e concettuali della falda stagionale dal modello del sottosistema stagionale
6. calcolo della serie degli Input Netti per il passo i -esimo
7. controllo di "stabilità" dell'Input Netto
8. fine della procedura se Input netto stabile o ritorno al passo

3

1. stima dei parametri concettuali della falda profonda dal modello dei deflussi annui

Cio' che interessa del modello dei deflussi annui in questa sede applicativa e' che consente di calcolare da un lato i parametri concettuali relativi alla falda profonda, $k = K^{1/12}$ ed a , dall'altro produce una stima dell'input netto relativo all'anno idrologico, quantita' a partire dalla quale puo' essere effettuata la disaggregazione necessaria per calcolo di prima approssimazione del deflusso di falda profonda.

2. disaggregazione dell'input netto stimato su base annua in input netto mensile

La prima ricostruzione del deflusso di falda profonda, necessaria per il calcolo del deflusso del sottosistema stagionale D^* , viene ricavata da una ipotesi sulla forma della ricarica nei diversi mesi dell'anno.

Il procedimento adottato per calcolare gli afflussi netti a scale mensile e' basato su una tecnica disaggregativa semplificata, con la quale si vincolano solo le medie mensili e non le varianze.

Assegnate le dodici medie mensili μ_τ , dividendole per la media generale si stabilisce una legge di variazione $g(\tau)$, $\{\tau=1, \dots, 12\}$, in modo che si abbia:

$$\sum_{\tau=1}^{12} g(\tau) = 1$$

Se I_T e' la serie degli input netti annui, la serie $I_{T,\tau}$ degli input netti mensili e' calcolata ponendo:

$$I_{T,\tau} = I_T g(\tau)$$

Rimane quindi da stabilire la legge $g(\tau)$ piu' opportuna.

Piuttosto che ipotizzare forme semplificate per $g(\tau)$ (rettangolare, triangolare, Gamma), puo' convenire ipotizzare che l'andamento delle medie degli afflussi segua quello delle medie dei deflussi:

$$g(i) = \frac{E[D_{T,\tau=i}]}{E[D_t]}$$

dove $t=T,\tau$ con $[T=1, \dots, n]$, $[\tau=1, \dots, 12]$

E' possibile, d'altra parte, utilizzare come informazione a priori l'andamento delle medie degli input netti stimati su stazioni contigue o su base regionale. Cio' potrebbe consentire di migliorare le stime delle serie di input netto sulle le serie

provenienti da bacini con consistenti apporti da falde profonde. In esse, come vedremo, si osserva una minore variabilità delle medie da mese a mese rispetto a quella mostrata dalle serie relative ai bacini praticamente impermeabili.

3. calcolo della serie dei deflussi di falda pluriennale

Nel capitolo 3 si è ricavato il modello concettuale della falda profonda nell'espressione a funzione di trasferimento:

$$DF_t = \phi DF_{t-1} + aI_t(1-r_K) + aI_{t-1}(r_K - \phi)$$

Questa espressione vale per qualsiasi base temporale, salvo definire i valori parametri $\phi (=c_k)$ ed r_k relativi alla scala considerata. Posto che $k = 12K$, per c_k si avrà l'espressione

$$c_k = c_K^{1/12} = e^{-1/k}$$

mentre il coefficiente di esaurimento della ricarica r_k , assumerà l'espressione

$$r_k = k(1 - e^{-1/k})$$

relativa ad ingresso uniforme all'interno del mese. Rimane ovviamente invariato il coefficiente a di ricarica alla falda profonda.

Per completare il discorso, va solo precisato che il coefficiente di esaurimento della ricarica r_k è da calcolarsi esclusivamente con l'espressione relativa ad input uniforme all'interno del periodo, poiché non sembra ragionevole nessuna altra ipotesi.

Sarà quindi: $r_k = k(1 - e^{-1/k})$, con k in mesi.

Definita "iterazione 0" quella nella quale si ha il primo calcolo dei deflussi di falda profonda, avremo:

$$DFP_{0t} = DFP_{0t-1} (1 - c_k) + I_{0t} a(1 - r_k) - I_{0t-1} a[(1 - c_k) - r_k]$$

Dall'espressione si vede subito che per ricavare la serie DFP_{0t} sono necessari i valori iniziali del deflusso di falda e dell'input netto. Iniziando la ricostruzione della serie dall'intervallo $t=2$ si potrebbe adoperare il dato $I_{0t=1}$, ma non si avrebbe ugualmente a disposizione $DFP_{0t=1}$.

Mantenendo anche su base mensile la sequenza dei mesi dell'anno idrologico (inizio ad Ottobre e termine a Settembre) e' possibile ipotizzare che l'input netto e' nullo per $t=0$ (cioe' a settembre, mese che precede l'inizio dell'anno idrologico), mentre $DFP_{0t=0}$ potrebbe essere pari alla portata di magra misurata dal Servizio Idrologico (minimo della portata giornaliera) o alla portata mensile minima nell'anno precedente.

La determinazione dei valori iniziali e' abbastanza importante, specie se le serie non sono molto lunghe. Cio' e' dovuto al fatto che la notevole inerzia indotta dal contributo della falda profonda fa si' che il dato iniziale eserciti una influenza sulle serie del deflusso del sottosistema stagionale e dell'input netto stimato che puo' estendersi per qualche anno.

Una possibilita' alternativa di stima dei valori iniziali e' offerta dalle tecniche statistiche di previsione al passato (backcasting).

4. separazione delle componenti (calcolo della serie del deflusso di sottosistema stagionale)

Il deflusso costituito dalla somma del deflusso di falda stagionale e del deflusso diretto, componenti il "sottosistema stagionale" introdotto nel capitolo precedente, e' calcolato ad ogni iterazione del procedimento sottraendo dalla serie originaria del deflusso la ricostruzione del deflusso di falda pluriennale effettuata all'iterazione corrispondente. La stima all'iterazione numero 1 verra' indicata con D_{0t}^* .

5. stima dei parametri stocastici e concettuali della falda stagionale dal modello dei deflussi del sottosistema stagionale

Sulla serie D_t^* calcolata al passo precedente si stima il modello ARMA(1,1) a residuo pseudo periodico. Il residuo calcolato alla prima iterazione sarà ϵ_{0t} .

L'algoritmo di stima adoperato è basato sul calcolo del minimo della somma dei residui al quadrato, quindi un algoritmo ai minimi quadrati (Least Squares). Si è scelto questo algoritmo soprattutto in considerazione del fatto che il modello da stimare non rientra nella norma dal punto di vista della stazionarietà e della distribuzione di probabilità dei residui. L'algoritmo LS viene anzitutto adoperato per ragioni di semplicità e poi perché, non essendo i residui Gaussiani, non necessariamente le stime di massima verosimiglianza (ML, Maximum Likelihood) sono migliori.

Di norma si è adoperata la routine LS del pacchetto statistico TSP, mentre per rendere più agevole il procedimento iterativo si è fatto ricorso anche alla routine ARMAX del pacchetto MATLAB, basata su un algoritmo equivalente.

La diagnostica delle stime effettuate, basata sull'osservazione della funzione di autocorrelazione dei residui, mostra una autocorrelazione apprezzabile a ritardo 12 a fronte di valori trascurabili ai lag più bassi. Ciò è dovuto alla presenza di fattori periodici nella variabilità dei parametri e non a caratteristiche di dipendenza. La variabilità casuale dei fattori periodici fa sì che il residuo sia comunque classificabile come stazionario (pseudo-periodico), cioè non caratterizzato da periodicità deterministica.

Si ricorda infine che il coefficiente di ricarica alla falda stagionale è chiamato b^* quando è calcolato sulla serie del deflusso del sottosistema stagionale. Il coefficiente b propriamente detto si calcola con la relazione $b = b^*(1-a)$, dove a è il parametro analogo relativo alla falda pluriennale.

6. stima dell'input netto

Essendo ϵ_{0t} il residuo a media zero del modello ARMA(1,1) stimato sulla serie D_{0t}^* del deflusso depurato alla prima iterazione e $E[D_{0t}^*]$ la media di D_{0t}^* , l'input netto al sottosistema si ricava con la relazione:

$$I_{0t}^* = \{ \epsilon_{0t} / (1 - b^* r_q) \} + E[D_{0t}^*]$$

dove I_{0t}^* e ϵ_{0t} sono ovviamente a media zero.

Questa in realta' e' solo la piu' semplice delle operazioni con le quali si puo' ottenere la corrispondenza dei momenti tra residuo ed input netto. Alla stessa corrispondenza, che si puo' schematizzare con:

$$(\mu_{ID+D^*} = \mu_{\epsilon} \quad , \quad \sigma_{I^*} = \sigma_{\epsilon} / (1 - b^* r_q))$$

si puo' arrivare con altre trasformazioni, che possano magari consentire di evitare il permanere di dati negativi. L'input netto totale si ricava semplicemente ripristinando media e varianza con la posizione:

$$I_{0t} = \frac{ID_{0t}^* - E[D_{0t}^*]}{(1-a)} + \frac{E[D_{0t}^*]}{(1-a)}$$

Si ricorda che ID_{0t}^* e' un vettore, mentre $E[D_{0t}^*]$ e' una costante, per cui i due addendi non possono mettersi a comun denominatore

In linea generale, l'input netto stimato e' somma di una componente periodica e di una componente puramente casuale, appartenenti strettamente al processo, piu' un errore legato alla stima. La presenza dell'errore e soprattutto il fatto che di esso e' evidente solo la parte di segno negativo (perche' porta a valori negativi di afflusso netto), rende di particolare importanza l'analisi probabilistica. Infatti soltanto a partire da una distribuzione di probabilita' e' possibile analizzare l'errore come variabile a se' stante.

7. controlli ed iterazione del procedimento

La stima della serie di input netto dal residuo del modello stocastico effettuata alla prima iterazione del procedimento consente di effettuare il primo confronto con la serie di input ipotizzata per calcolare il deflusso di falda profonda.

Per ritenere concluso il procedimento si deve arrivare ad una serie di input netto stimato che si possa considerare equivalente a quella con la quale e' stato calcolato il deflusso del sottosistema stagionale. La stima dell'input netto puo' essere ritenuta definitiva se la differenza tra lo scarto quadratico medio σ della serie attuale e quello σ_p della serie relativa all'iterazione precedente e' non superiore al 5% dello scarto σ della serie attuale.

Ricavato l'input netto, si puo' esaminare la serie ricostruita del deflusso mensile, con i contributi di falda superficiale, profonda e deflusso diretto, allo scopo di controllare la consistenza delle ipotesi fatte.

Il procedimento descritto non si presenta di facile applicazione quando si voglia adoperare le routines di stima contenute nei pacchetti statistici specifici per l'analisi delle serie temporali, i quali in genere non si prestano molto all'implementazione di procedure iterative.

stima del modello stocastico per bacini privi di falda profonda

Dal punto di vista operativo, l'applicazione della metodologia proposta ai deflussi mensili relativi a bacini privi di falda pluriennale comporta difficolta' molto minori, dato che non e' necessario effettuare l'iterazione del procedimento. Si tratta infatti di applicare esattamente lo schema introdotto per modellare il deflusso del sottosistema stagionale e ricavare parametri stocastici, concettuali ed input netto.

6.2 VALUTAZIONE DELLE PRESTAZIONI STATISTICHE DELLA METODOLOGIA PROPOSTA

La valutazione della capacita' da parte di un modello di "spiegare" la serie alla quale viene applicato, puo' essere fatta in diversi modi. In genere, sono gli stessi obiettivi dell'analisi che suggeriscono i criteri di valutazione, nel senso che di solito si esegue un confronto tra modelli nei riguardi della capacita' descrittiva o previsiva o della generazione di serie sintetiche.

Poiche' lo scopo della presente analisi e' l'identificazione (su base fenomenologica) di modelli stocastici che consentano una interpretazione del fenomeno dei deflussi, la determinazione del grado di affidabilita' di questi modelli va fatta su due livelli:

- da un lato sono da applicare gli usuali criteri dell'analisi statistica, perche' un modello interpretativo deve avere anche la capacita' di "descrivere" la serie in senso statistico;
- dall'altro vanno verificate le ipotesi idrologiche di base, verificando che i valori assunti dai parametri siano congruenti con il loro significato fisico.

In generale, pero' e' da aspettarsi che un modello statistico costruito sulla base di una interpretazione a priori del processo abbia delle prestazioni superiori a quelli identificati empiricamente, a parita' di coefficienti impiegati. Una verifica di questo tipo e' facilmente eseguibile attraverso il confronto sulla varianza spiegata.

La varianza spiegata dal modello "a due stadi" e' funzione della varianza del residuo "definitivo" della procedura, variabile puramente aleatoria che si identifica col residuo del modello ARMA(1,1) dei deflussi depurati, dal quale siano state eliminate le mesie mensili.

In altri termini, i residui ϵ_i sui quali si calcola la varianza ordinaria $\sigma_\epsilon = (\sum \epsilon_i^2) / (N-1)$ sono privi di qualsiasi carattere di dipendenza, per cui nel nostro caso la determinazione delle caratteristiche periodiche che non si effettua sulla serie originaria si realizza sulla serie dei residui pseudo-periodici.

Eliminato questo carattere facendo uso delle dodici medie mensili o con onde seno-coseno, si calcola la varianza corretta:
 $\sigma_{\epsilon C} = (\sum \epsilon_i^2) / (N-p-q)$.

Gli indici p e q si riferiscono agli ordini del modello ARMA e possono conservare questo significato se tutti i modelli interessati nel confronto richiedono la stima delle medie mensili; in caso contrario, in p e q saranno compresi anche i coefficienti relativi a medie e varianze mensili.

Una applicazione di questi concetti e' contenuta nel capitolo seguente.

7.1 ORGANIZZAZIONE DEI DATI E CONTROLLI DI QUALITA' DELLE SERIE STORICHE

La base di dati sulla quale e' stata condotta l'analisi preliminare e' costituita da un gruppo di 30 serie (tab. 7.1) di deflussi giornalieri, costituite da non meno di 8 anni consecutivi di osservazioni. La fase iniziale dell'analisi e' quindi consistita nell'organizzazione di un database per mezzo del quale poter effettuare controlli di tipo preliminare sui dati, consistenti in:

- esame visivo delle serie, che consente l'individuazione di errori di immissione dei dati, e la valutazione della congruenza dei valori zero (per escludere le eventualita' di dati mancanti od errori materiali).
- correzione degli errori di immissione ed eventuale ricostruzione dei dati mancanti.
- definizione delle serie ininterrotte.

In un secondo tempo si e' proceduto ad un esame piu' approfondito della qualita' "idrologica" dei dati, volto ad accertare l'eventuale presenza di fattori di alterazione del regime dei deflussi.

L'analisi della qualita' dei dati riveste una importanza fondamentale nello studio delle serie idrologiche e costituisce un compito gravoso nell'ambito delle applicazioni pratiche per la difficolta' di reperire dati di deflussi indisturbati. Dato il carattere metodologico dello studio, l'accertamento della qualita' dei dati e' stato indirizzato a stabilire che non vi fossero alterazioni importanti del regime. Percio' i controlli, oltre che basati sulle indicazioni contenute nella Pubblicazione n.17 del Servizio Idrografico Italiano ("Dati Caratteristici dei Corsi d'Acqua Italiani"), sono stati prevalentemente di carattere statistico ed eseguiti a priori ed a posteriori dell'applicazione del modello.

I controlli citati hanno avuto lo scopo di verificare i caratteri di omogeneita' delle serie, cioe' di stabilire se esistono variazioni apprezzabili nella media all'interno del periodo analizzato. Si e' controllato poi che periodi di magra si ritrovassero negli stessi anni su stazioni appartenenti a bacini diversi, e soprattutto si e' esaminato l'andamento dei minimi annui della portata giornaliera in relazione alle serie delle portate medie annue (un esempio e' mostrato in figura 7.1.1), per verificare che a massimi e minimi della portata sorgentizia (presunta) corrispondessero uguali oscillazioni nella portata media annua.

Le analisi a posteriori sono consistite nel controllare la consistenza dei valori stimati per il coefficiente di ricarica a , come accennato nel capitolo 4, e nella verifica di attendibilita' delle serie dei deflussi profondi ricostruite a partire dall'input netto stimato (un esempio e' fornito nel paragrafo 7.4).

Si sono cosi' eliminate quelle stazioni che non davano le necessarie garanzie di assenza di regolazioni rendendo piuttosto ristretto il campo delle serie analizzabili, anche perche' si sono escluse anche le serie relative a stazioni di misura poste su corsi d'acqua gia' rappresentati.

Alle 8 serie cosi' selezionate, oltre al codice iniziale e' stata assegnata una numerazione che segue l'ordine del codice (tab. 7.1.2), alla quale si fara' riferimento nel seguito.

7.2 ANALISI STATISTICA PRELIMINARE

Obiettivo dell'analisi preliminare e' il controllo delle ipotesi di base per l'applicazione dei modelli stocastici, e la classificazione in senso statistico delle serie esaminate, allo scopo di evidenziare eventuali caratteristiche comuni o di sottolineare le differenze tra esse.

Per ragioni di comodita' e chiarezza si e' preferito fare riferimento a serie storiche relative all'anno idrologico sin dall'analisi preliminare, sia su scala di aggregazione annua che su scala mensile. Solo nella rappresentazione grafica delle serie mensili si e' preferito riportare tutti i dati a disposizione, cioe' le serie nell'anno solare. La convenienza della rappresentazione in anno idrologico e' stata discussa nel cap. 3 per quanto riguarda la scala annua, e nel cap. 6 riguardo alla scala mensile.

Tra le numerose caratteristiche statistiche determinabili preliminarmente sulle serie (si veda ad es BATTAGLIA, 1986) si sono prese in considerazione quelle elencate di seguito, calcolate prima sulle serie annuali, poi su quelle mensili, (le relative figure e tabelle sono riportate in appendice A 7.1.1.#):

- restituzione grafica delle serie (A. 7.1)

Si riportano i dati delle portate medie negli anni idrologici con l'orizzontale corrispondente al valor medio, ed i dati delle portate medie mensili.

- media, varianza ed asimmetria generali delle serie (A. 7.1.2)
- medie nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.3)
- varianze nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.4)
- coefficienti di variazione nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.5)
- coefficienti di asimmetria nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.6)

Va rimarcata la sostanziale omogeneita' che caratterizza i primi due momenti (media e varianza) delle serie calcolati mese per mese sui dati adimensionalizzati. Lo stesso non si puo' dire, invece, per il coefficiente di variazione ed il coefficiente di asimmetria.

- autocorrelazioni globale e parziale (A. 7.1.7)

L'osservazione delle funzioni di autocorrelazione stimate, su base mensile ed annua, sulla serie n.2 rispetto a quella stimata per le serie n.7 dimostra come soltanto alla scala annua sia possibile distinguere gli effetti della presenza della falda ad esaurimento pluriennale. Infatti, mentre per i deflussi annui le funzioni di autocorrelazione delle serie 2 e 7 presentano differenze sostanziali (quella relativa alla serie n.2 non mostra alcuna struttura correlativa), a scala mensile non si risultano differenze evidenti. Questo significa che l'effetto del deflusso profondo nella serie 7 non e' materialmente scindibile, alla scala mensile, da quello del deflusso di falda stagionale, perche' si comporta come una costante additiva sulla serie.

- esempi di correlazioni mese-mese(A. 7.1.8)

L'osservazione delle funzioni di cross-correlazione tra i deflussi di mesi diversi mette in evidenza i presupposti che sono alla base dei modelli autoregressivi a parametri periodici (PAR), con i quali ci si propone di riprodurre le strutture correlative tra i deflussi di un mese J e quelli del mese precedente (caso del modello PAR(1)) o dei mesi precedenti fino a J-p (caso del modello PAR(p)). Nell'esempio proposto si puo' notare come la correlazione tra i deflussi nel mese 7 e nel mese 1 sia ancora non trascurabile; cio' giustificherebbe un parametro $\phi_{j,j-6}$, e quindi i parametri $\phi_{j,j-1}$, $\phi_{j,j-2}$, ecc.

Si puo' quindi comprendere l'importanza dei criteri di identificazione dell'ordine del modello nel limitare il numero di parametri richiesto, che resta comunque molto alto.

- plottaggio delle serie in carta probabilistica Normale (A 7.1.9)

Consente il controllo visivo dell'asimmetria delle serie esaminate. In primo luogo si puo' constatare come i dati a scala mensile siano caratterizzati da asimmetria decisamente piu' alta che non a scala annua. La figura A 7.1.9.3, che riporta le frequenze cumulate dei dati raggruppati mese per mese (il numero si riferisce ai mesi dell'anno idrologico, con inizio ad Ottobre), mostra sotto un diverso aspetto le variazioni da mese a mese del coefficiente di asimmetria, gia' riportate in fig. A 7.1.6.

7.3 APPLICAZIONI DEL MODELLO DEI DEFLUSSI ANNUI

Nella fase preliminare, l'esame delle statistiche relative ai deflussi annui consente di stabilire se sia presente e con quale evidenza una falda ad esaurimento pluriennale.

A questo scopo si puo' fare uso della corrispondente serie mensile per stabilire quale consistenza degli apporti sorgentizi nei mesi estivi. Si esamina poi l'andamento della funzione di autocorrelazione stimata su base annua, $r(i)$. La presenza di forte autocorrelazione a lag-1, (relativamente all'ampiezza delle bande approssimate di confidenza, pari a $2/\sqrt{N}$, con N =numero di dati della serie) ed il suo lento decadimento al crescere del lag, e' indice di persistenza a lungo termine, da attribuire alle falde ad esaurimento pluriennale. Un valore di $r(1)$ non molto elevato, accompagnato pero' da un andamento di decrescita regolare della funzione $r(i)$, e' comunque indice di presenza di dipendenza pluriennale. Nel caso della stazione n. 3, per esempio, la brevità della serie fa si' che il margine di errore sull'ipotesi di dipendenza, misurato per esempio con $2/\sqrt{N}$, sia alto, per cui nonostante la presenza evidente di deflussi sorgentizi estivi, risulta $r(1) < 2/\sqrt{N}$, cioe' $r(1)$ trascurabile.

Un ultimo controllo sull'ipotesi di dipendenza a lungo termine, e' condotto nella fase di verifica dei valori dei parametri concettuali ottenuti con la stima del modello ARMA(1,1).

stime dei parametri del modello ARMA(1,1)

Sulle serie n. 3, 7 ed 8, le cui funzioni di autocorrelazione mostrano la presenza di falda pluriennale (tab. A 7.1.7.0), i parametri ϕ e θ del modello ARMA(1,1) sono stati stimati con la routine LS del pacchetto statistico TSP, basata sulla tecnica di minimizzazione iterativa della somma dei quadrati dei residui (Minimi Quadrati). Dei test riportati unitamente alla stima, per una spiegazione dei quali si puo' far riferimento a PICCOLO & VITALE [1984] e SALAS et al. [1980], commenteremo solo il T-Stat. (rapporto tra il valore del parametro ed il suo errore

standard), l' R-Squared (varianza spiegata) e l'Adjusted R-Squared (varianza spiegata corretta), ai quali si fa riferimento anche in appendice A 2.1.

Il modello stimato ha la forma:

$$SA\#_t(1-AR(1) B) = C + \epsilon_t(1+MA(1)B)$$

per cui nella colonna COEFFICIENT, i valori sono riportati nelle colonne corrispondenti ad ogni parametro. Rispetto ai coefficienti ϕ e θ relativi alla alla forma usualmente adottata, vale

$$\theta = -MA(1) \quad , \quad \phi = AR(1) \quad ,$$

mentre C rappresenta la stima della media generale della serie.

Per la serie n. 3, data la brevità della serie si e' reso necessario eliminare il parametro C dalla stima, per cui anche per le altre due serie si e' adoperato il modello nella forma:

$$(SA\#_t - \mu)(1-AR(1) B) = \epsilon_t(1+MA(1)B)$$

A commento dei risultati, riportati nelle tabelle 7.3.1, si possono fare diverse osservazioni:

- a) innanzitutto le funzioni di autocorrelazione stimate sembrano mostrare un andamento vagamente ciclico, presentando comunque una sensibile autocorrelazione negativa a ritardi alti. La circostanza fa venire in mente il "Joseph effect" (alternanza di periodi con deflussi abbondanti e periodi di magra), ma non e' certamente con serie così brevi che si puo' confermare questa interpretazione. Piuttosto, la brevità delle serie analizzate, in particolare la n. 3, spiega ampiamente i valori negativi delle autocorrelazioni con il fatto che l'errore su $r(i)$ e' notevole al crescere di i .
- b) Lo scarso peso che i fattori di dipendenza esercitano sulla variabilità del fenomeno complessivo e' testimoniato dai risultati non molto brillanti ottenuti in termini di test sui parametri e sul modello. Per tener conto della brevità delle serie analizzate, si puo' fissare un valore minimo del T-stat. pari ad 1, al di sotto del quale andrebbe rigettata l'ipotesi di significatività del parametro. Anche sotto questa ipotesi ci ritroveremmo a rifiutare l'ipotesi di validità del modello ARMA(1,1) due volte su tre, a causa della minore stabilità delle stime della parte MA. Queste

ultime, infatti, sono stime non lineari, cioè stime di stime, ed in quanto tali sono soggette ad essere mascherate dal "rumore" costituito dai fattori puramente aleatori. Che i fattori di casualità siano preponderanti nel fenomeno è testimoniato anche dai valori molto bassi dell' R^2 .

Cio' conferma la necessità di affiancare alla stima ed alla verifica statistica una interpretazione e dei criteri di validazione di tipo idrologico.

- c) L'analisi dei residui, effettuata col solo controllo di indipendenza a mezzo della funzione di autocorrelazione (tab. 7.3.1), non presenta aspetti degni di nota, ad eccezione del picco che si osserva al lag-8 sui residui delle serie 7 ed 8, che confermano l'anomalia descritta sulle funzioni di autocorrelazione. A questo proposito si fa notare che i deflussi della serie 8 provengono da un affluente del Tevere (staz. 7). Una verifica della compatibilità dell'ipotesi sul significato concettuale dei residui è riportata nel capitolo seguente sotto forma di verifica della proprietà aggregativa.

calcolo dei parametri concettuali e validazione.

I valori della costante d'invaso sono stati ritrovati ampiamente superiori all'anno, (tabella 7.3.1.0) e sono da ritenersi affidabili sin dalla fase di stima, poiché dipendono unicamente dal coefficiente ϕ del modello (parte autoregressiva), che è uno stimatore molto stabile.

Il calcolo del coefficiente di ricarica a è effettuato, a titolo indicativo, sia con l'ipotesi di distribuzione uniforme degli afflussi che con l'ipotesi di periodicità degli afflussi uguale a quella dei deflussi.

Dal confronto dei valori di a con quelli degli indici I_p e I_s (capitolo 4) si può concludere che la schematizzazione concettuale adottata si adatta bene alle manifestazioni osservabili del fenomeno, poiché un valore di a compreso tra I_p ed I_s , è da ritenersi fisicamente verosimile. Inoltre, la verifica idrologica vale anche da test sull'attendibilità delle stime dei coefficienti MA, che risultano pertanto accettabili.

7.4 APPLICAZIONI DEL MODELLO DEI DEFLUSSI MENSILI

Bacini con falda ad esaurimento pluriennale

Il primo passo dell'applicazione del modello dei deflussi mensili a queste serie consiste nel generare il deflusso di falda profonda calcolandolo dalle serie dell'input netto disaggregato. Per effettuare la disaggregazione degli input netti su base annua servono le medie mensili adimensionali, che vengono ricavate dalle serie degli stessi deflussi.

In fig 7.4.1 viene mostrata la ricostruzione del deflusso profondo ottenuta con l'input netto disaggregato e con la serie ricostruita alla fine del procedimento di stima. Data la netta differenza tra le due serie calcolate, si rimarca il fatto che risulta possibile portare a convergenza il procedimento di stima anche a partire da ipotesi molto semplici sulla forma dell'input netto, nonostante che la ricostruzione iniziale del deflusso profondo possa portare a dati negativi nella serie del deflusso depurato.

La figura 7.4.1 e' un esempio di come la ricostruzione del deflusso profondo possa costituire una verifica a posteriori della naturalita' della serie, poiche' puo' mettere in evidenza valori dubbi del minimo mensile.

Successivamente si ricava la serie del deflusso del sottosistema stagionale e su di essa si stima il modello ARMA(1,1) a residuo pseudo-periodico. Della fase di stima ha interesse la variabilita' dei parametri ϕ e θ con il passo di iterazione. A questo proposito si riportano come esempio le tabelle di stima delle prime tre iterazioni per la stazione 8 (tab 7.4.1). Mentre il coefficiente MA mostra una certa variabilita', piu' stabile risulta il coefficiente b^*r_q , il che vale da verifica di significativita' per i coefficienti ϕ e θ .

Sempre per la stazione 8 si riportano, in fig 7.4.2, le serie di input netto stimate nelle due ultime iterazioni e la serie ottenuta dalla differenza dei loro valori assoluti. Come si puo' notare, le iterazioni si bloccano quando la serie dell'input netto raggiunge una configurazione praticamente definitiva.

In tab. 7.4.2 vengono riportati i parametri stimati per le 3 serie di questo gruppo.

bacini senza falda ad esaurimento pluriennale

L'applicazione del modello a questi bacini si riduce alla stima del modello ARMA(1,1) sui dati indisturbati. Dalla tabella 7.4.3 si puo' notare come questi bacini siano caratterizzati da una notevole omogeneita', poiche' presentano valori della costante d'invaso q e del coefficiente di ricarica b compresi in un intervallo piuttosto ristretto. Va sottolineato inoltre il fatto che i coefficienti θ sono tutti negativi, il che fa ricadere il punto (ϕ, θ) in una regione dello spazio dei parametri alla quale corrisponde funzione di autocorrelazione parziale del tipo pseudo sinusoidale [BOX & JENKINS, 1976].

7.5 CONFRONTO CON IL MODELLO PAR(1)

Per una valutazione strettamente statistica dei risultati ottenuti con la metodologia proposta, si e' scelto di operare un confronto con un modello della classe maggiormente accreditata tra quelle a base puramente statistica [NOAKES et al., 1985]. In particolare, sui dati trasformati con il logaritmo (come suggerito in genere per le applicazioni), si e' impiegato il modello PAR(1), Autoregressivo di ordine 1 a parametri periodici (parag. 2.3). I coefficienti $\phi_{1,j}$ vengono qui definiti $\phi_{i,i-1}$ allo scopo di evidenziare il fatto che vengono calcolati sulla regressione dei dati di un mese rispetto a quelli del mese precedente.

In tab 7.5.1 si riportano le stime dei 12 coefficienti $\phi_{i,i-1}$ ottenute per le 8 serie, unitamente alla statistica del T-Student per ogni parametro (indicata con T-stat.). E' da notare che rispetto alla standardizzazione propriamente detta, definita nel parag. 2.3, la variabile Z_t si e' ottenuta con l'operazione:

$$Z_t = Q_t - E[Q_j]$$

come suggerito da [NOAKES et al., 1985].

In tab. 7.5.2 si riportano i dati dei coefficienti calcolati per le 8 serie con la metodologia proposta, ed i relativi T-stat.

Un primo metodo di valutazione sulle stime effettuate con le due metodologie puo' essere fatta tenendo presente i valori assunti dal T-stat.

Per il PAR(1), pur essendo complessivamente accettabile il livello di significativita' dei parametri va detto che nei casi in cui il T-stat. risulta molto inferiore a 2 e' difficile pensare di poter accettare ugualmente il valore stimato. Questo sia perche' non e' possibile giustificarlo per altra via (come potrebbe essere per una verifica su base concettuale), sia perche' si tratta pur sempre di parametri AR, per i quali le stime risultano di elevata stabilita', essendo stime lineari. Per il modello ARMA a parametri costanti proposto, invece, le ragioni per accettare le stime con T-stat. basso sono duplici:

- i parametri stocastici stimati sono congruenti con l'interpretazione concettuale, nel senso che danno luogo a valori dei parametri concettuali compatibili col loro significato e controllabili con indici di tipo idrologico;
- valori molto bassi del T-stat si ritrovano solo per le stime dei coefficienti MA, rispetto alle quali si e' gia' commentata la maggiore dipendenza dall' algoritmo di stima e dalla entita' della componente aleatoria presente nella serie.

Un metodo di confronto vero e proprio delle prestazioni statistiche dei modelli, come gia' riferito nel cap. 6, si basa sulla varianza spiegata. Andrebbe confrontata, in particolare, la varianza spiegata "corretta" in base al numero di parametri stimati (N =numero di dati, p =numero di parametri, σ^2 =varianza della serie):

$$R^2_c = 1 - (\sigma^2_{\epsilon_c} / \sigma^2) = 1 - [(\sum \epsilon_i^2) / (N-p) / \sigma^2]$$

$$R^2_c = 1 - (R^2 (N-1) / (N-p))$$

In termini di varianza spiegata (R^2) il modello proposto si comporta sistematicamente meglio del PAR(1) (tab. 7.5.3). Per effettuare una valutazione sulla varianza spiegata va ricordato che, escludendo sia i parametri relativi alle medie mensili sia quelli del modello probabilistico ci si riduce ad un numero di parametri pari a 12 per il PAR(1) e pari a 2 o 4 per il modello proposto.

La "correzione" da effettuare sulla varianza per tener conto del numero dei parametri da stimare penalizzerebbe quindi ulteriormente il PAR(1); infatti, il maggior numero di parametri del PAR(1) porta ad una riduzione dell' R^2 maggiore di quella che si ha per il modello proposto.

In fig. 7.4.3 sono riportate le curve di autocorrelazione dei residui per i due modelli. Si puo' notare come la rimozione delle medie mensili dal residuo, nel modello proposto, sia piu' avvertibile che non nel PAR(1) dove la destagionalizzazione e' fatta sulla serie originaria.

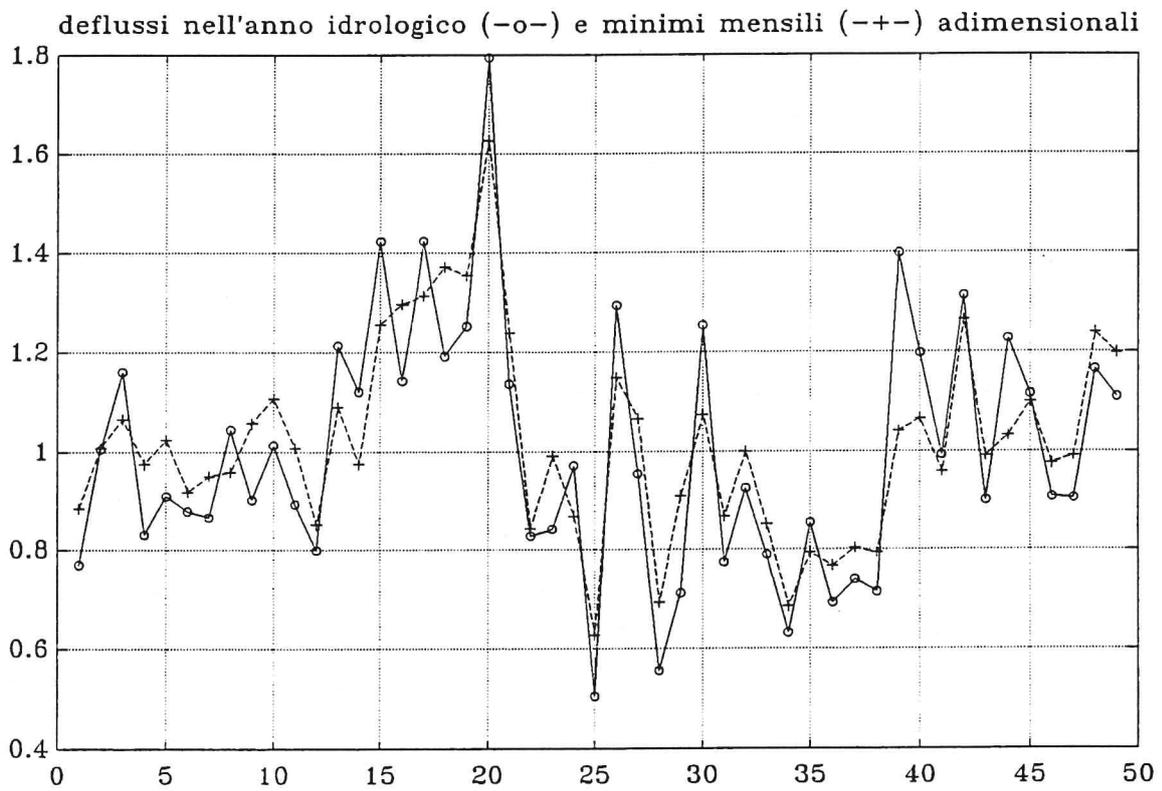
Per la stazione 8 il confronto e' stato esteso al modello PAR(p), (Periodico Autoregressivo di ordine p , con p variabile da mese a mese) in cui l'identificazione dell'ordine p e'

effettuata in base alla significativita' dei parametri (l'ordine p relativo al mese i e' stabilito in base al fatto che il parametro $\Phi_{i,i-(p-1)}$ ha un T-stat. molto minore di 2, cioe' non e' statisticamente significativo).

In questo caso si e' ottenuto: $R^2 = .701$ per il PAR(p), contro $R^2 = .745$ del modello proposto.

Va quindi posta in evidenza la superiorita' che il modello proposto dimostra in termini di capacita' descrittiva della serie.

Nel caso in cui si fosse calcolata la varianza spiegata tenendo conto anche della capacita' descrittiva del modello probabilistico (=varianza degli errori rispetto al modello probabilistico dei residui / varianza totale) la varianza corretta andrebbe determinata tenendo conto anche dei parametri del modello probabilistico. Come si vedra' nel prossimo capitolo, per il modello proposto esiste la possibilita' di regionalizzare i parametri della distribuzione di probabilita', diminuendone quindi il numero. Si ha quindi ancora un punto a favore dell'applicazione della metodologia a base concettuale rispetto ai modelli puramente stocastici.



stazione 7 * anni idrologici con inizio ad ottobre 1921

figura 7.1.1

TABELLA 7.1.1

Serie mensili sottoposte alla prima vagliatura

CODICE	STAZIONE	ANNI INIZIO E TERMINE		LUNGHEZZA SERIE PARZIALI ININTERROTTE
		OSSERVAZIONI		
1	VOLTURNO a PONTE ANNIBALE	1924	1939	12
2	FIBRENO a BROCCO	1923	1970	13 +12
3	CALORE IRPINO ad APICE	1933	1970	25
4	ALENTO a CASALVELINO (Mr)	1958	1970	13
5	SARNO a S. VALENTINO TORNIO	1958	1970	13
6	CALORE IRPINO a MONTELLA	1931	1970	26
7	SELE a PONTE BARIZZO	1929	1957	12
8	SELE ad ALBANELLA	1958	1970	13
9	TANAGRO a POLLA	1923	1970	48
10	BUSSENTO a CASELLE in PITTARI	1952	1968	17
11	GIOVENCO a PEScina	1960	1970	11
12	TAMMARO a PAGO VEIANO	1958	1970	13
13	MELFA a PICINISCO (Ponte Ascanio)	1963	1970	8
14	RIO MOLLE a SETTIGNANO	1963	1970	8
16	RAPIDO a S.ELIA (Fiumerapido)	1957	1970	14
17	MELFA a PICINISCO	1925	1953	11 +8
18	LIRI ad ISOLA LIRI	1930	1962	6 +7
19	MELFA ad ATINA (Rosanisco)	1923	1954	13 +6
20	SACCO a CECCANO (Mr)	1959	1970	12
21	TUSCIANO ad OLEVANO sul TUSCIANO	1957	1970	14
22	COSA a CECCANO	1959	1970	5 +6
23	LIRI a SORA	1929	1970	7 +23
28	TORANO a PIEDIMONTE D'ALIFE	1930	1963	5 +21
32	CALORE LUCANO a PERSANO	1923	1970	6 +11
33	SAVA a GALLO	1957	1964	8
34	SELE a PERSANO (Scafa)	1924	1939	12
36	SELE a CONTURSI (Ponte Prov.le)	1932	1970	12 +5
39	TAMMARO a PADULI (Mr)	1954	1970	15
43	VOLTURNO ad AMOROSI (1)	1933	1970	21
44	VOLTURNO ad AMOROSI (2)	1957	1970	14
45	VOLTURNO a CANCELLO ARNONE (1)	1931	1970	5 +21
53	TEVERE a Roma	1921	1970	50
54	NERA a Torre Orsina	1946	1970	25

TABELLA 7.1.2. Serie mensili sottoposte all'analisi statistica

CODICE	STAZIONE	PERIODO FUNZION. DELLA STAZIONE	PERIODO OSS. CONT.	LUNGHEZZA SERIE	AREA (KMQ)
4	ALENTO a CASALVELINO (Mr)	1958 - 1970	58 -- 70	13	284
6	CALORE IRPINO a MONTELLA	1931 - 1970	45 -- 70	26	123
11	GIOVENCO a PEScina	1960 - 1970	60 -- 70	11	139
12	TAMMARO a Pago Veiano	1958 - 1970	58 -- 70	13	555
20	SACCO a CECCANO (Mr)	1959 - 1970	59 -- 70	12	922
32	CALORE LUCANO a PERSANO	1923 - 1970	57 -- 67	11	673
53	TEVERE a Roma	1921 - 1970	21 -- 70	50	16545
54	NERA a Torre Orsina	1946 - 1970	46 -- 70	25	1445

TABELLA 7.3.1.0

MODELLO DEI DEFLUSSI ANNUI

Riepilogo dei parametri concettuali e stocastici

N. STAZIONE	3	7	8
ϕ	.712	.744	.788
θ	.420	.536	.421
K (anni)	2.94	3.38	4.20
ar_K	.50	.45	.63
r_K (unif.)	.85	.87	.89
r_K	.83	.85	.89
a	.61	.53	.71
I_p	.62	.53	.77
I_s	.55	.46	.70

TABELLA 7.3.1.1

stima del modello ARMA(1,1) sulla serie n. 3

SMPL 2 - 10

9 Observations

LS // Dependent Variable is SA3

Convergence achieved after 6 iterations

```
=====
```

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
MA(1)	-0.4199685	0.7773799	-0.5402358	0.606
AR(1)	0.7122338	0.6866797	1.0372141	0.334

```
=====
```

R-squared	0.215818	Mean of dependent var	-0.021257
Adjusted R-squared	0.103792	S.D. of dependent var	0.270568
S.E. of regression	0.256142	Sum of squared resid	0.459261
Durbin-Watson stat	2.028110	Log likelihood	0.618677

```
=====
```

Autocorrelazione dei residui

```
=====
```

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.	*	.	*	1	-0.076 -0.076
.	****	.	****	2	0.317 0.313
.	**	.	**	3	-0.189 -0.166
.	**	.	.	4	0.122 0.015
.	***	.	**	5	-0.260 -0.171

```
=====
```

TABELLA 7.3.1.2

stima del modello ARMA(1,1) sulla serie n. 7

SMPL 2 - 49
 48 Observations
 LS // Dependent Variable is SA7
 Convergence achieved after 5 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
MA(1)	-0.5357736	0.4636508	-1.1555541	0.254
AR(1)	0.7435397	0.4382600	1.6965722	0.097
R-squared	0.094658	Mean of dependent var	1.137173	
Adjusted R-squared	0.074977	S.D. of dependent var	59.84416	
S.E. of regression	57.55698	Sum of squared resid	152389.1	
Durbin-Watson stat	1.988283	Log likelihood	-261.6208	

Autocorrelazione dei residui

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
. .	. .	1	-0.009 -0.009
. .	. .	2	-0.038 -0.038
. ** .	. ** .	3	0.166 0.166
. .	. .	4	0.018 0.020
. * .	. * .	5	-0.072 -0.061
. ** .	. * .	6	0.127 0.104
. .	. .	7	-0.026 -0.037
***** .	***** .	8	-0.374 -0.362
. * .	. * .	9	0.078 0.050
. .	. .	10	0.037 0.034
. ** .	. .	11	-0.134 -0.023
. .	. .	12	0.008 -0.003

TABELLA 7.3.1.3

stima del modello ARMA(1,1) sulla serie n. 8

SMPL 2 - 24
 23 Observations
 LS // Dependent Variable is SA8
 Convergence achieved after 8 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
MA(1)	-0.4209401	0.4236833	-0.9935254	0.332
AR(1)	0.7876155	0.3659493	2.1522529	0.043

R-squared	0.261354	Mean of dependent var	-0.083156
Adjusted R-squared	0.226180	S.D. of dependent var	6.116322
S.E. of regression	5.380348	Sum of squared resid	607.9109
Durbin-Watson stat	1.928437	Log likelihood	-70.29273

Autocorrelazione dei residui

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
. .	. .	1 0.008	0.008
. ** .	. ** .	2 -0.121	-0.121
. ** .	. ** .	3 0.173	0.177
. .	. .	4 0.022	0.000
. * .	. ** .	5 0.110	0.160
. .	. * .	6 -0.009	-0.048
. ** .	. * .	7 -0.124	-0.097
. **** .	. **** .	8 -0.296	-0.376

TABELLA 7.4.1

iterazione 1

LS // Dependent Variable is Dst8_1

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	8.5727554	0.8736819	9.8122156	0.000
MA(1)	0.1014620	0.0782655	1.2963815	0.195
AR(1)	0.7108285	0.0512295	13.875373	0.000
R-squared	0.571091	Mean of dependent var	8.580737	
Adjusted R-squared	0.568070	S.D. of dependent var	6.497769	
S.E. of regression	4.270422	Sum of squared resid	5179.168	
Durbin-Watson stat	1.947522	Log likelihood	-822.3690	

Beta = 0.737

iterazione 2

LS // Dependent Variable is Dst8_2

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	8.4299482	1.0387932	8.1151357	0.000
MA(1)	0.0091063	0.0770992	0.1181120	0.906
AR(1)	0.7645695	0.0492689	15.518305	0.000
R-squared	0.590673	Mean of dependent var	8.420134	
Adjusted R-squared	0.587790	S.D. of dependent var	6.414561	
S.E. of regression	4.118378	Sum of squared resid	4816.935	
Durbin-Watson stat	1.933143	Log likelihood	-811.9643	

Beta = 0.766

iterazione 3

LS // Dependent Variable is Dst8_3

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	8.6578885	0.9009534	9.6096963	0.000
MA(1)	0.0219198	0.0798627	0.2744690	0.784
AR(1)	0.7319926	0.0535367	13.672731	0.000
R-squared	0.549975	Mean of dependent var	8.664940	
Adjusted R-squared	0.546805	S.D. of dependent var	6.045797	
S.E. of regression	4.070015	Sum of squared resid	4704.466	
Durbin-Watson stat	1.936147	Log likelihood	-808.5740	

Beta = 0.737

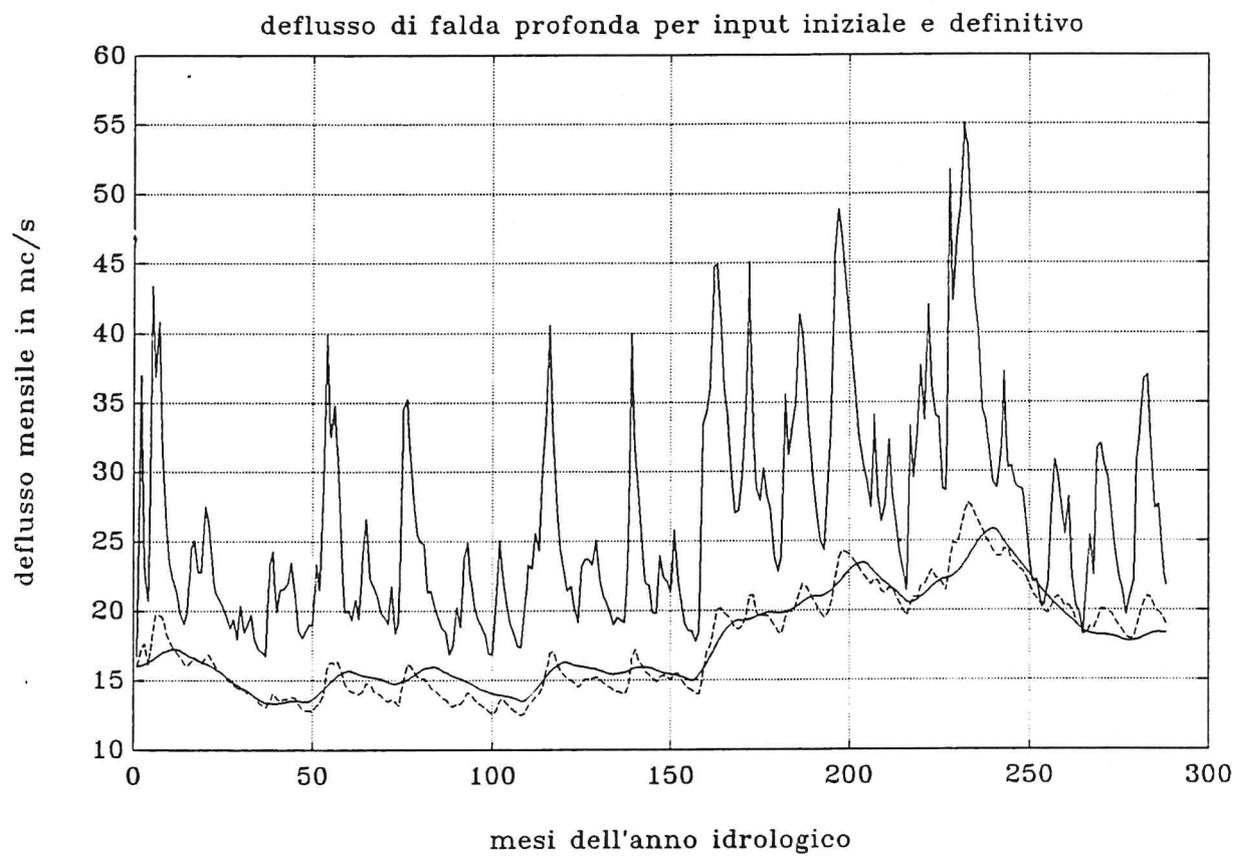


figura 7.4.1

TABELLA 7.4.2.

MODELLO DEI DEFLUSSI MENSILI * stazioni con falda profonda *

Riepilogo dei parametri concettuali e stocastici

N. STAZIONE	3	7	8
ϕ^*	0.639	0.548	0.756
θ^*	0.151	-0.075	-0.044
q (mesi)	2.23	1.66	3.56
$b^* r_q$	0.574	0.580	0.766
r_q	0.807	0.750	0.869
b^*	0.711	0.773	0.882
b	0.277	0.363	0.256

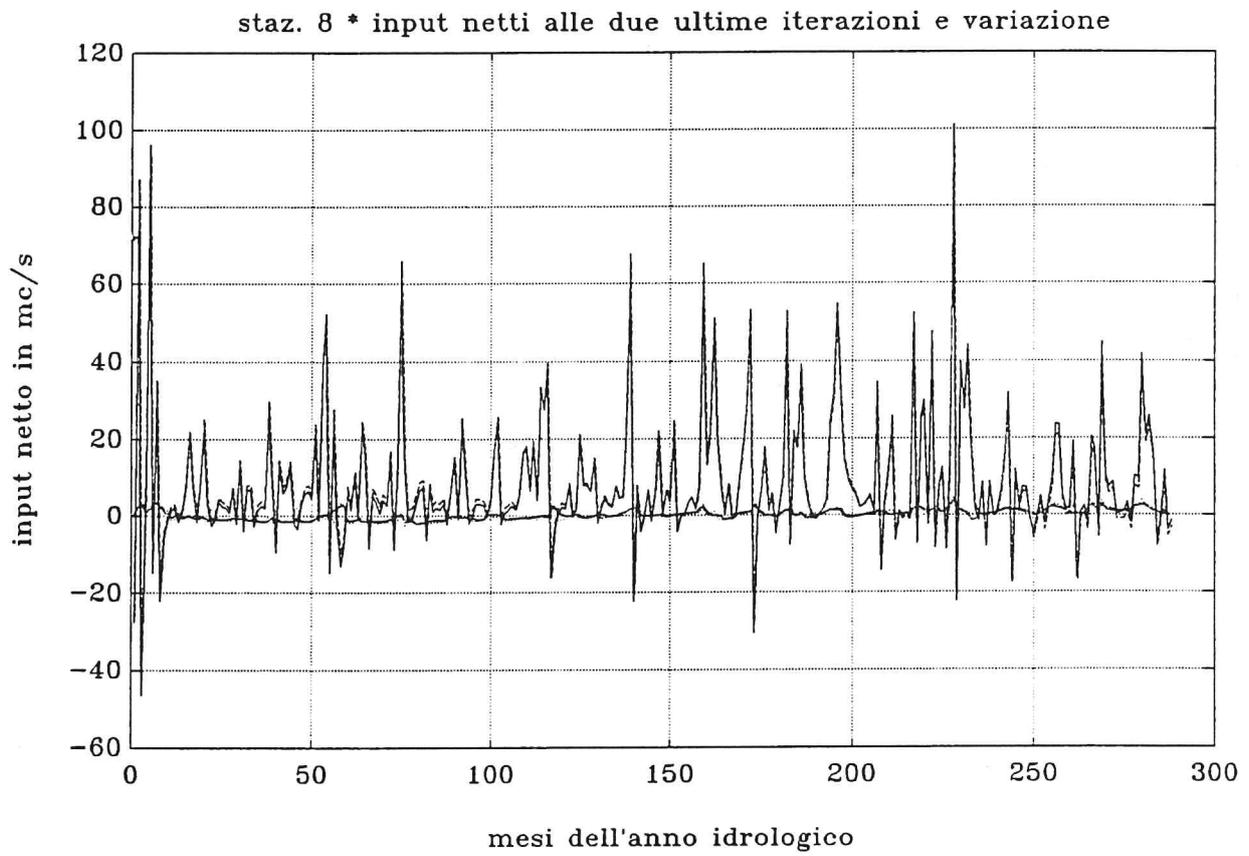


figura 7.4.2

TABELLA 7.4.3

MODELLO DEI DEFLUSSI MENSILI * stazioni senza falda profonda *

Riepilogo dei parametri concettuali e stocastici

N. STAZ.	1	2	4	5	6
ϕ	0.58	0.55	0.58	0.53	0.41
θ	-0.10	-0.07	-0.07	-0.03	-0.15
q (mesi)	1.84	1.67	1.84	1.53	1.12
br_q	0.58	0.58	0.61	0.53	0.49
r_q	0.77	0.75	0.77	0.73	0.66
b	0.76	0.77	0.79	0.73	0.74

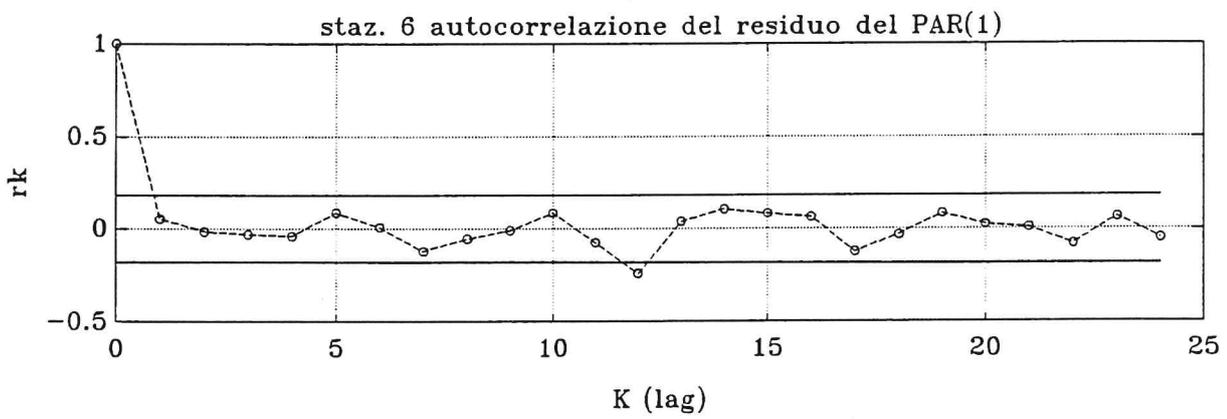
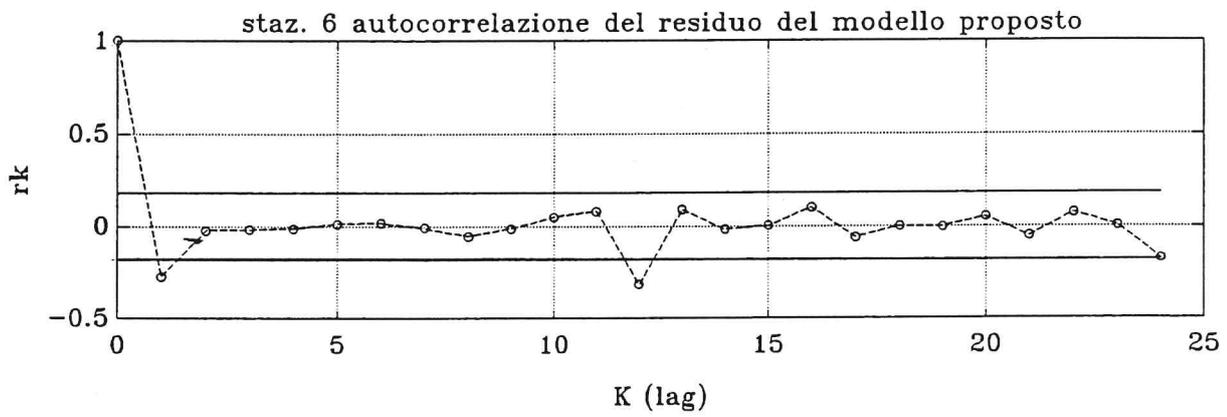


figura 7.4.3

TABELLA 7.5.1

Riepilogo dei parametri del modello PAR(1) applicato ad 8 serie

	staz. #1		staz. #2		staz. #3		staz. #4	
	Φ	T-stat	Φ	T-stat	Φ	T-stat	Φ	T-st
$\Phi_{1,12}$.464	1.14	.580	2.82	.585	2.16	-.104	-.35
$\Phi_{2,1}$.432	2.21	.456	2.68	.608	2.12	.167	.878
$\Phi_{3,2}$.066	.494	.193	1.34	.215	1.25	.040	.251
$\Phi_{4,3}$.616	1.57	.375	2.97	-.072	-.144	.205	.860
$\Phi_{5,4}$.910	2.73	.642	4.67	.235	.814	.940	3.54
$\Phi_{6,5}$.581	.280	.312	1.76	.082	.220	.576	2.03
$\Phi_{7,6}$.518	2.88	.536	3.49	.656	3.49	.356	1.31
$\Phi_{8,7}$.749	5.10	.778	4.97	.936	6.17	.747	2.79
$\Phi_{9,8}$.893	4.16	.740	5.70	.709	6.67	.580	1.97
$\Phi_{10,9}$	1.22	5.23	1.16	5.40	.904	8.46	.955	2.63
$\Phi_{11,10}$.647	8.56	1.31	9.76	.984	8.35	1.01	4.53
$\Phi_{12,11}$.305	.888	.550	3.90	1.28	4.55	.693	2.93

	staz. #5		staz. #6		staz. #7		staz. #8	
	Φ	T-stat	Φ	T-stat	Φ	T-stat	Φ	T-st
$\Phi_{1,12}$.711	1.64	-.739	-1.46	.646	4.31	.616	3.70
$\Phi_{2,1}$.361	1.48	.042	.158	.676	4.58	.792	4.66
$\Phi_{3,2}$.167	.772	.060	.211	.640	4.94	.746	4.61
$\Phi_{4,3}$.497	1.60	.125	.277	.545	5.91	1.01	8.66
$\Phi_{5,4}$.373	1.70	.499	1.42	.541	3.89	.731	6.41
$\Phi_{6,5}$.413	1.12	.209	.690	.433	3.89	.813	.097
$\Phi_{7,6}$.510	3.11	.463	2.30	.585	6.34	.860	8.64
$\Phi_{8,7}$.783	3.78	.176	1.11	.599	5.33	.751	9.60
$\Phi_{9,8}$.693	3.31	1.34	5.18	.565	6.47	.797	13.6
$\Phi_{10,9}$.410	1.56	.632	4.66	.671	12.2	.932	14.1
$\Phi_{11,10}$.261	.777	.990	6.77	.849	17.4	.903	20.1
$\Phi_{12,11}$.843	2.35	1.05	5.78	.955	5.88	1.03	6.50

TABELLA 7.5.2

Riepilogo dei parametri del modello proposto (8 serie)

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ϕ_a			.712				.744	.788
T-st			1.04				1.70	2.15
θ_a			.420				.536	.420
T-st			.540				1.16	.994
ϕ_m	.576	.550	.639	.579	.526	.412	.548	.576
T-st	5.839	7.25	4.62	5.72	4.15	2.90	9.13	13.8
θ_m	-.098	-.073	.151	-.068	-.032	-.154	-.075	-.044
T-st	-.770	-.765	.884	-.530	-.211	-.920	-1.08	-.570

TABELLA 7.5.3

Riepilogo dei parametri R^2 (varianza spiegata) per i due modelli

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
PAR R^2	.384	.390	.417	.322	.236	.228	.363	.682
ARMA R^2	.550	.540	.551	.597	.488	.478	.496	.745

8 ANALISI DELL'INPUT NETTO STIMATO

8.1 ANALISI DELLA PERIODICITA'

Lo studio della variabile Input Netto e' condotto sulla sola base temporale mensile ed ha per obiettivi l'esame delle sue caratteristiche di omogeneita' su base regionale e la definizione della distribuzione di probabilita'.

Il processo degli input netti e' considerato di tipo pseudo-periodico, nel senso che i parametri che descrivono l'andamento stagionale della serie sono caratterizzati da variabilita' di tipo stocastico. Cio' non vuol dire che non si possano ricercare le leggi medie di variazione dei parametri da mese a mese.

Una prima valutazione che si puo' fare sulla tendenza periodica del processo in oggetto consiste nel confrontare le medie mensili degli input netti con quelle dei deflussi. Dato che alla variabile afflusso netto e' assegnato un preciso significato fisico, ci si aspetta un andamento delle sue medie mensili che confermi il suo ruolo di input al sistema lineare identificato. In Fig. 8.1.0 si puo' verificare come le medie mensili degli input netti tendano ad "anticipare", in un certo senso, i massimi ed i minimi dei deflussi, mettendo in evidenza il ruolo degli invasi naturali costituiti dalle falde profonda e stagionale.

Al fine di dare generalita' all'analisi e' necessario rimuovere gli effetti legati alle superfici dei bacini, che sono direttamente legati alle medie ed alle varianze, se i deflussi vengono considerati portate medie. Ci si riferisce perciò sempre ad input netti in mm.

In generale, l'analisi delle eventuali periodicitá nei parametri di una variabile va fatta almeno sui primi tre momenti. Riportiamo perciò, nelle figure 8.1.1, 8.1.2 ed 8.1.3 e corrispondenti tabelle, per le 8 stazioni analizzate, medie, varianze ed asimmetrie mensili degli input netti stimati. I

valori di medie, varianze ed asimmetrie generali delle serie sono riportati in tab 8.1.0.

Dall'osservazione delle medie mensili per le diverse stazioni risulta evidente il carattere stagionale della variabile e la scarsa variabilità, su base regionale, dei valori nei vari mesi, a conferma dell'omogeneità climatica della zona cui si riferiscono le serie esaminate.

All'interno del gruppo di 8 serie, le curve che meno seguono l'andamento medio sono relative alle stazioni appartenenti a bacini con rilevanti contributi da falde profonde. L'andamento degli input netti di queste stazioni mostra una minore accentuazione dei periodi secchi e piovosi rispetto a quanto accade per le serie relative ai bacini praticamente impermeabili, ed è ciò che accade anche per le medie mensili dei deflussi. Questa differenza è naturalmente dovuta all'effetto regolatore degli invasi profondi i quali attenuano la variabilità degli ingressi.

Analizzando con procedure statistiche, quindi obiettive, le serie dei deflussi di bacini con falda profonda, non è possibile modificare questa situazione, poiché significherebbe estrarre dalla serie informazioni che non contiene. L'analisi idrologica permette invece di utilizzare le informazioni a priori sul processo degli input netti ricavate dalle altre stazioni e consente quindi di iniziare il procedimento iterativo di stima generando la serie del deflusso profondo a partire dall'input netto disaggregato in base alle caratteristiche medie regionali.

Un controllo è stato eseguito anche sulla capacità da parte della metodologia proposta di rispettare la proprietà aggregativa, che consiste nell'uguaglianza tra gli input netti stimati con il modello dei deflussi annui e con quelli stimati dal modello dei deflussi mensili ed aggregati. In fig. 8.1.4 è fornito il risultato relativo alla stazione 8.

8.2 DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' DEGLI INPUT NETTI

Dall'osservazione dell'andamento mensile dei primi tre momenti della variabile afflusso netto e' possibile rendersi conto della accentuata variabilita' che caratterizza il processo, anche riguardo al momento del terzo ordine. La caratteristica fondamentale ai fini della descrizione probabilistica del processo e' pero' la forte incidenza dei valori zero.

Avendo fondato il modello stocastico dei deflussi su basi idrologiche, e' necessario che anche la distribuzione di probabilita' del residuo giustifichi il suo significato concettuale (confondiamo l'input netto col residuo in quanto sono direttamente proporzionali). E' questo il motivo per cui i valori negativi presenti nelle serie dell'input netto vanno considerati come errori rispetto al valore teorico che e' zero.

La distribuzione di probabilita' da ricercare dovra' percio' essere di tipo "composto", capace cioe' di riprodurre il valore finito di probabilita' concentrato a zero e la densita' di probabilita' relativa ai valori positivi della variabile. Non e' quindi proponibile l'impiego della legge Normale e delle sue trasformate.

Ponendo i dati trasformati su carta probabilistica (per es. fig. 8.2.7) si ottiene una spezzata, il cui segmento obliquo potrebbe essere interpretato stimandone i parametri come se fossero gli stessi di una legge di distribuzione Normale Censurata. Seguire questa strada porta a diversi inconvenienti, legati soprattutto alla difficolta' di utilizzare le stime campionarie di media e varianza. Inoltre sarebbe comunque da considerare come parametro il valore di probabilita' finita sullo zero.

Per questi motivi si e' preferito indirizzarsi sulle distribuzioni ottenute con una mistura di due processi, uno discreto, che abbia la capacita' di assegnare probabilita' teorica finita al valore zero ed uno continuo, perche' tale e' la variabile.

Una rappresentazione probabilistica verosimile del fenomeno degli input netti mensili si ottiene considerandoli risultanti dalla somma di un numero finito di eventi, distribuito con legge Poissoniana di parametro n , i quali abbiano intensita' distribuita con legge esponenziale di parametro L [BENJAMIN & CORNELL, 1970].

La densita' di probabilita' che si ottiene con la mistura Poisson-Exponenziale ha espressione:

$$P[t=0] = e^{-n} \quad (\text{probabilita' finita per } t=0)$$

$$f_T(t) = e^{-Lt-n} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(nL)^{u+1} t^u}{u! \Gamma(u+2)}$$

oppure, in forma di funzione:

$$f_T(t) = e^{-Lt-n} \sqrt{(nL/t)} I_1(2\sqrt{Ltn})$$

dove $I_1(x)$ e' la funzione di Bessel modificata di ordine 1. Le relazioni tra i momenti campionari, che chiamiamo per semplicita' μ e σ , e quelli della distribuzione sono:

$$\mu_T = n/L \quad \sigma_T = 2n/L^2$$

Poiche' il parametro esponenziale e' espresso in mm^{-1} e' preferibile riferirsi al suo inverso, che verra' chiamato:

$$\beta = 1/L$$

Le stime di n e β con il metodo dei momenti sono pertanto:

$$n = 2/Cv^2 \quad \beta = \sigma_T^2 / 2E[T]$$

con Cv = coefficiente di variazione di T .

8.2.1 STIMA DEI PARAMETRI DELLA DISTRIBUZIONE MISTA

I presupposti idrologici che hanno portato alla scelta della distribuzione di probabilita' degli input netti vengono chiamati in causa nella fase di stima campionaria. Poiche' i dati negativi non hanno significato per la legge Poisson-Esponenziale, si e' provveduto, come si e' detto, a riposizionarli a zero, avendo cura di ripristinare la media generale della serie. Sui dati cosi' ottenuti, raggruppati per mese, sono stati calcolati media, scarto quadratico medio e coefficiente di variazione.

I coefficienti n e β , ottenuti a partire dai momenti campionari, sono riportati nelle figg. 8.2.0 ed 8.2.1 e relative tabelle. Come si puo' notare dal confronto con l'andamento delle medie e delle varianze mensili, le stime di n e β effettuate col metodo dei momenti mostrano una variabilita' maggiore da stazione a stazione, senz'altro esaltata dai valori eccezionalmente alti di n nel mese 11 per la stazione 6 e di β nel mese 12 per la stazione 8 .

Valutazioni sulla qualita' delle stime possono essere fatte in due modi:

- a. confrontando il valore osservato di probabilita' finita sullo zero e della stima di $\exp(-n)$
- b. esaminando il grado di correlazione tra i due parametri n e β in confronto a quello dei momenti campionari.

Dalla prima verifica (fig. 8.2.2) si ricava l'impressione di un fitting della probabilita' a zero tutto sommato accettabile, ed in ogni caso migliorabile con l'adozione del valore $P[0]$ osservato quale parametro esplicito.

La seconda verifica ha una valenza piu' ampia, in quanto l'esistenza di una relazione tra n ed β consentirebbe di ridurre il numero di parametri necessari alla descrizione della legge di distribuzione di probabilita'.

Poiche' n e β non mostrano un grado di correlazione elevato, e' opportuno risalire alle relazioni tra i momenti campionari μ e σ per vedere se attraverso queste sia piu' semplice mettere n e β uno in funzione dell'altro.

La migliore correlazione tra la media e lo scarto dell'input netto mensile si ottiene, come vedremo, con la legge :

$$\sigma = c \mu^m$$

Con riferimento alla legge di distribuzione Normale, detto σ_y lo scarto dei dati trasformati ($y=x^r$) e μ e σ_x media e scarto dei dati originari, vale:

$$\sigma_y = r\sigma_x \mu^{(r-1)}$$

per cui, se σ_y e' costante si ha la relazione:

$$\sigma_x = c \mu^{(1-r)}$$

Si adopera allora questa forma per stimare il modello di regressione cosi' da richiamare l'indice r della trasformata (fig. 8.2.3).

Risulta $r=0.16$, $c=1.98$ con indice di determinazione $R^2 = 0.94$.

Il coefficiente r e' ottenibile anche, ovviamente, dalla correlazione tra la media ed il coefficiente di variazione:

$$Cv = c \mu^{-r}$$

Da questa seconda regressione si ottiene uguale costante C ed indice r , ma con affidabilita' minore della precedente in termini di coefficiente di correlazione (fig. 8.2.4) ($R^2=0.35$).

La minore correlazione tra media e coefficiente di variazione rispetto a quella media-scarto, in qualche modo chiarisce le difficolta' di stima dei parametri della distribuzione mista col metodo dei momenti, dato che Cv e' parametro esplicito in entrambe le relazioni..

In corrispondenza del coefficiente $r=0.16$ stimato per il modello

$$\sigma_x = c \mu^{(1-r)} ,$$

e' minima la varianza del prodotto: $\beta^{-r} n^{(1/2 - r)}$, cioe' vale, in media,

$$\beta^{-r} n^{(1/2 - r)} = c \quad \text{con } C = 1.98$$

forma che si ottiene esprimendo μ e σ in funzione di n e β . La presenza di un parametro costante $(\beta^{-r}n^{(1/2-r)})$ su base regionale ed il fatto che l'andamento della media campionaria all'interno dell'anno e' stabile in una regione climatica molto ampia, per cui puo' essere rappresentata attraverso una funzione periodica, consentono di ridurre significativamente il numero di parametri da stimare per la distribuzione di probabilita' e, soprattutto, costituiscono una importante base di partenza ai fini della applicazione della metodologia proposta a bacini privi di stazioni di misura.

In fig. 8.2.5 e' rappresentata la legge regionale delle medie mensili calcolate sui dati adimensionalizzati (questa volta l'adimensionalizzazione si riferisce alla "piovosita'", invece che alle dimensioni dei bacini).

A partire da questa legge, si puo' ottenere la legge della varianza mensile regionale di una stazione con la sola media generale della serie degli input netti. Infatti, detta m_{iR} la media adimensionale regionale relativa al mese i , da essa si ottiene μ_{iR} (media mensile della stazione ricavata regionalmente) con la relazione:

$$\mu_{iR} = m_{iR} E[I_t]$$

quindi, si ha:

$$\sigma_{iR} = C \mu_{iR}^{(1-r)}$$

Un esempio di legge "regionale" dello scarto σ e' riportato per la stazione n. 4 in fig. 8.2.6)

Per dare un'idea sull'adattamento tra dati e legge di distribuzione proposta ai dati, sono fornite le rappresentazioni della curva teorica di probabilita' cumulata e della frequenza cumulata dei dati (fig. 8.2.7 - 8.2.8) . Curva e punti sono stati messi anche in carta probabilistica Normale (fig. 8.2.9) per dar modo di controllare sotto quali condizioni la distribuzione mista si avvicina alla Gaussiana. Come si puo' notare, se la $P[0]$ non e' troppo elevata, la distribuzione mista e' abbastanza rettilinea in carta Normale delle radici quadrate (fig. 8.2.10). Per $P[0]$ elevato curva e dati sono stati messi in

carta Normale delle radici seste (all'incirca il coefficiente $r=0.16$) nella quale sembra preponderante l'effetto distorsivo esercitato dalla trasformazione (fig. 8.2.11).

L'adattamento dei dati alla distribuzione mista e' tutto sommato accettabile e si puo' ritenere percio' che la scelta della classe di distribuzioni di probabilita' sia stata confortata dai risultati. E' ovviamente possibile riferirsi ad ipotesi di base diverse (per esempio distribuzione Gamma e non esponenziale per gli eventi) o tentare di migliorare il metodo di stima dei parametri.

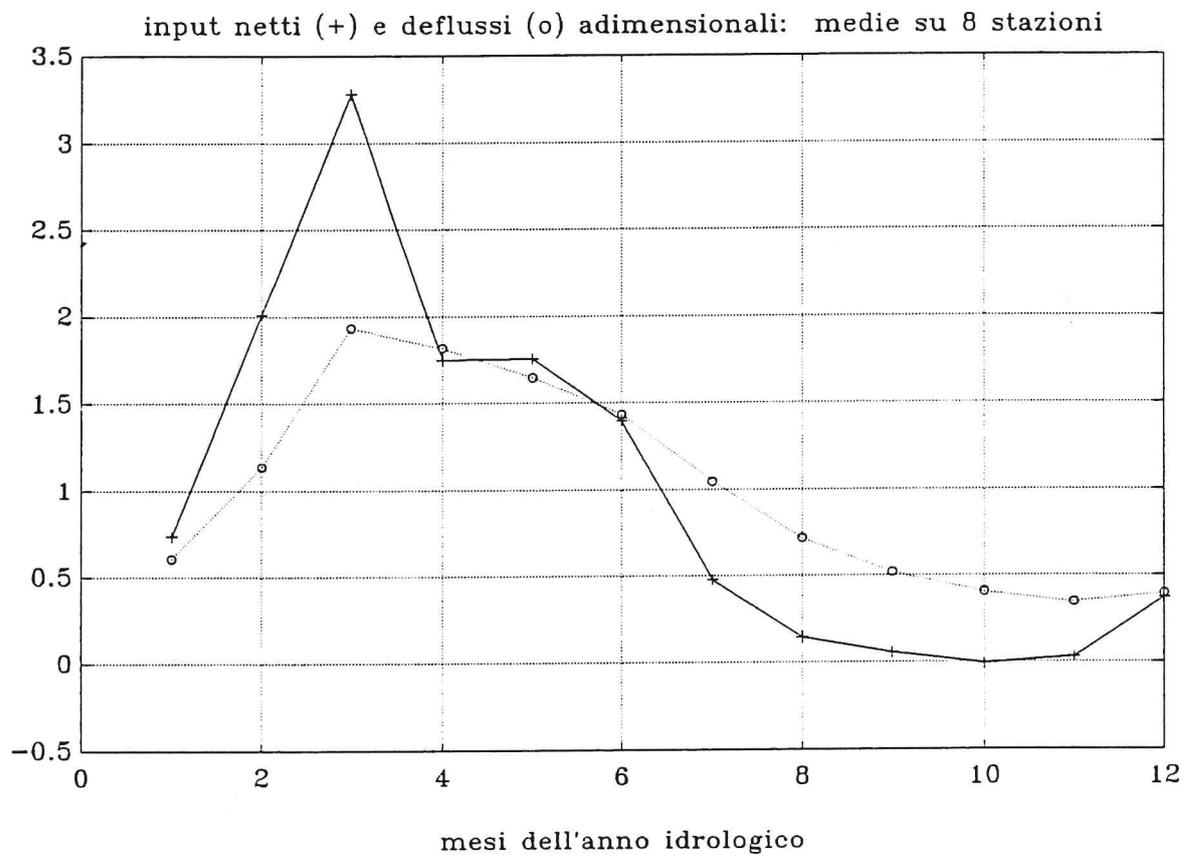


figura 8.1.0

TABELLA 8.1.0

medie, scarti quadratici medi e coefficienti di asimmetria
 generali degli input netti mensili (in mm) -8 serie-

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
μ	45.404	48.662	21.594	30.728	42.083	110.15	37.257	48.352
σ	108.89	80.640	45.718	70.976	92.848	213.27	77.521	102.70
ca	1.762	2.195	1.166	1.804	2.252	1.486	2.128	1.942

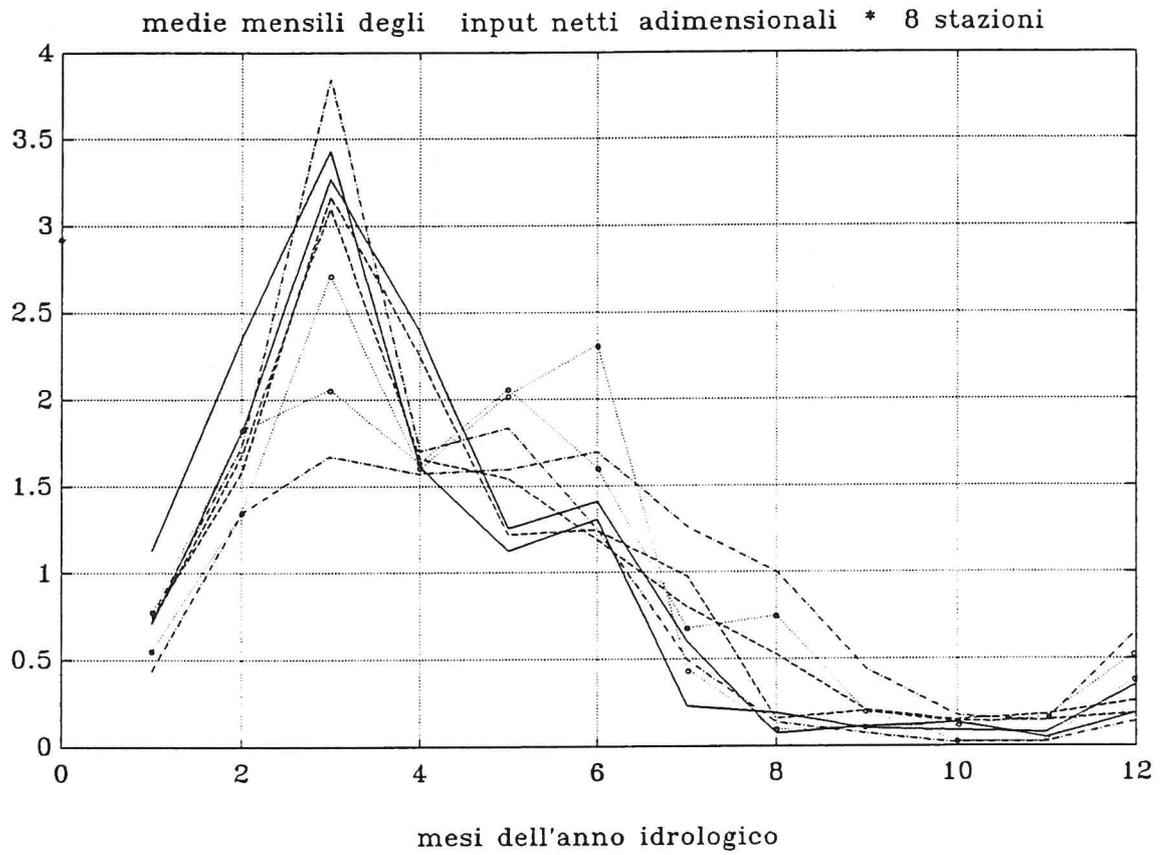


figura 8.1.1

TABELLA 8.1.1

medie mensili adimensionali degli input netti per le 8 serie

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	0.7046	0.7159	0.5477	0.7533	1.1299	0.7383	0.7759	0.4372
nov	1.8166	1.6742	1.3546	1.7289	2.3520	1.5794	1.8147	1.3456
dic	3.2697	3.0986	2.7107	3.8456	3.4323	3.1675	2.0600	1.6722
gen	2.3927	1.6564	1.5957	1.6998	1.6134	2.2476	1.6285	1.5699
feb	1.2540	1.5432	2.0254	1.8343	1.1272	1.2184	2.0581	1.5946
mar	1.4091	1.1889	2.3129	1.2488	1.3077	1.2447	1.6038	1.6952
apr	0.5982	0.7981	0.4445	0.4964	0.2315	0.9755	0.6737	1.2631
mag	0.0721	0.5263	0.0916	0.1385	0.1915	0.1570	0.7461	1.0005
giu	0.1114	0.2103	0.1088	0.0727	0.1004	0.2025	0.1978	0.4446
lug	0.1354	0.1481	0.1121	0.0168	0.0876	0.1380	0.0276	0.1739
ago	0.0466	0.1803	0.1647	0.0222	0.0753	0.1453	0.0235	0.1473
set	0.1897	0.2598	0.5313	0.1428	0.3513	0.1857	0.3903	0.6558

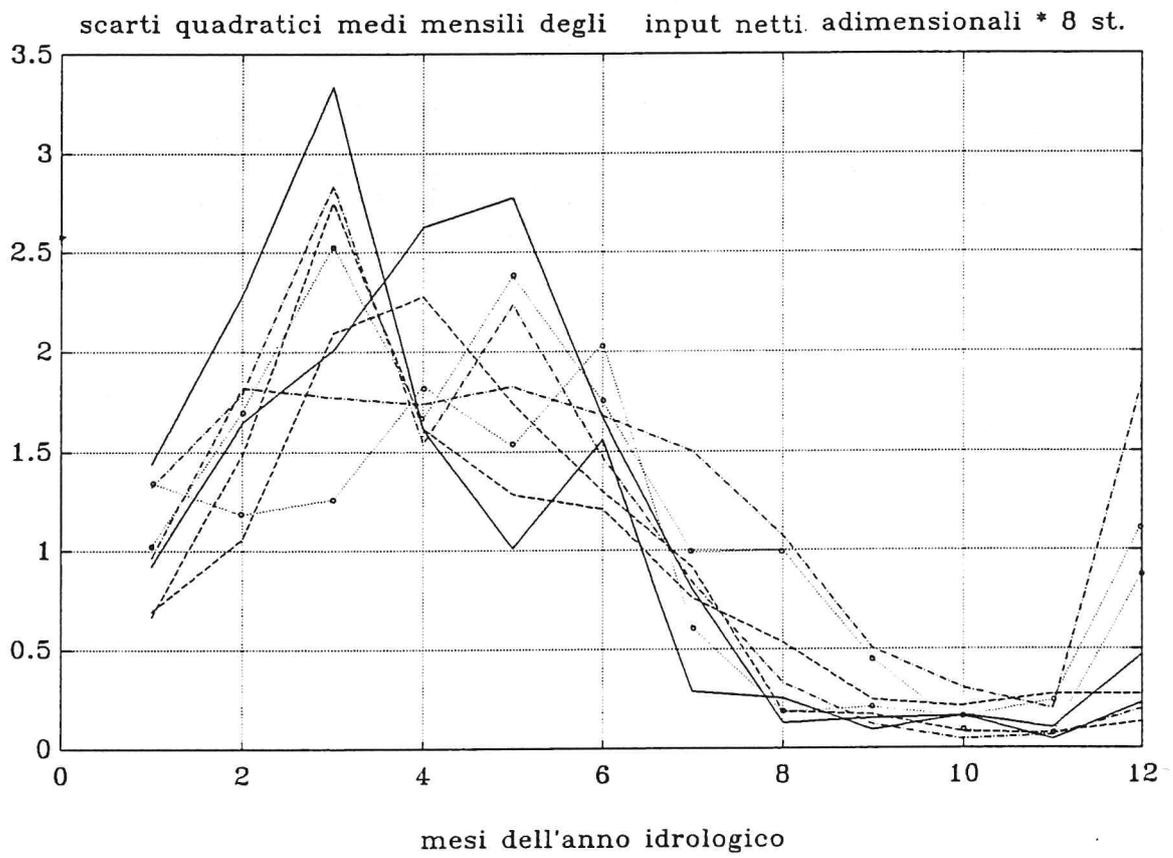


figura 8.1.2

TABELLA 8.1.2

scarti quadratici medi mensili degli input netti adimensionali (8 serie)
= (scarti dei dati originari)/ (medie mensili)

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	0.9214	0.6659	1.3439	1.3200	1.4378	0.6938	1.0202	0.9634
nov	1.6469	1.4854	1.1784	1.7906	2.2829	1.0552	1.7020	1.8202
dic	2.0047	2.7473	1.2568	2.8326	3.3378	2.0919	2.5292	1.7717
gen	2.6232	1.6193	1.8288	1.5372	1.6148	2.2748	1.6644	1.7387
feb	2.7725	1.2821	1.5274	2.2343	1.0093	1.7411	2.3789	1.8248
mar	1.6685	1.2046	2.0423	1.4690	1.5591	1.2956	1.7456	1.6796
apr	0.8037	0.7585	0.6088	0.8413	0.2839	0.9160	0.9871	1.5034
mag	0.1228	0.5338	0.1773	0.3286	0.2481	0.1826	0.9941	1.0712
giu	0.1458	0.2400	0.2030	0.1177	0.0895	0.1675	0.4517	0.5066
lug	0.1571	0.2096	0.1519	0.0401	0.1593	0.0781	0.0854	0.2973
ago	0.0399	0.2678	0.2349	0.0602	0.0978	0.0738	0.0625	0.1955
set	0.2260	0.2672	1.1357	0.1914	0.4711	0.1269	0.8870	1.8442

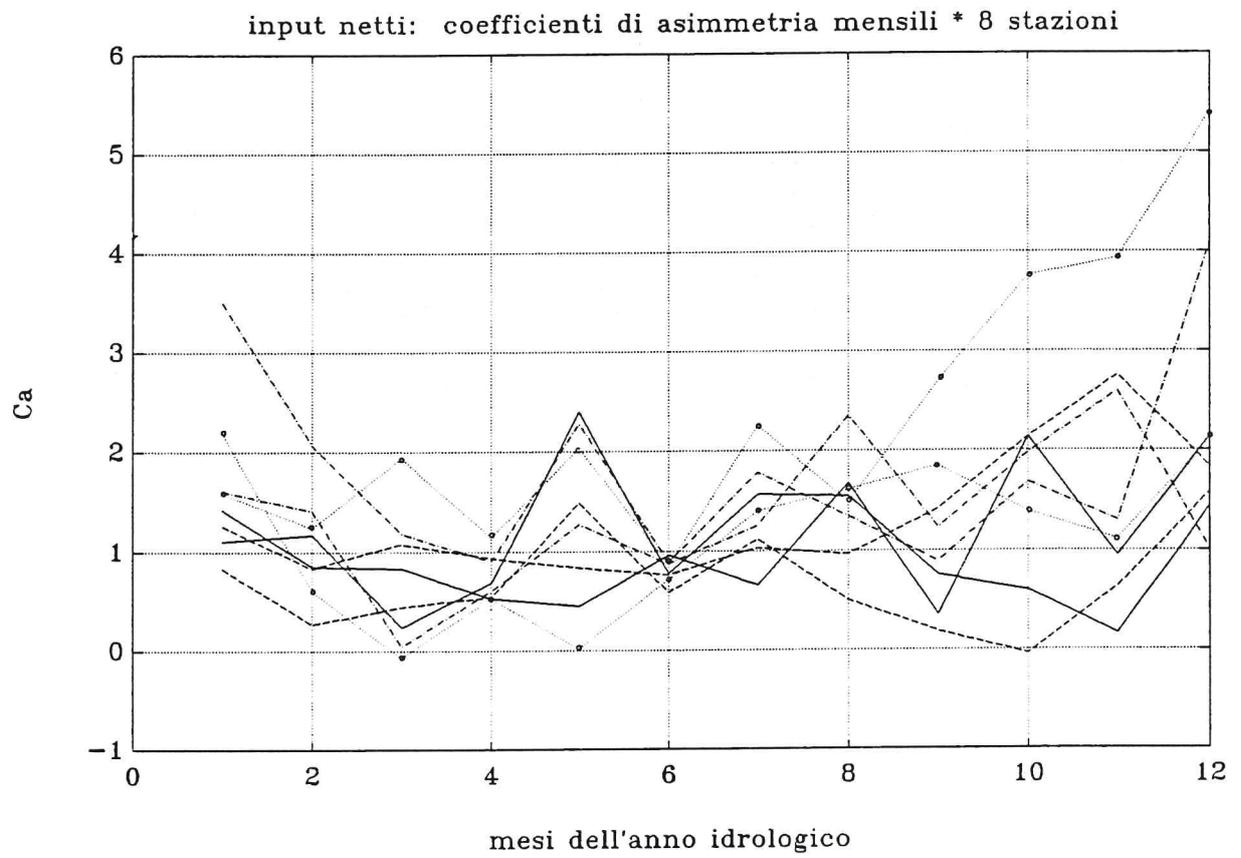


figura 8.1.3

TABELLA 8.1.3

coefficienti di asimmetria mensili degli input netti (8 serie)

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	1.1065	1.2617	2.1884	1.6089	1.4259	0.8318	1.5901	3.5008
nov	1.1735	0.8327	0.6000	1.4095	0.8463	0.2628	1.2425	2.0614
dic	0.2386	1.0843	-0.0672	0.0422	0.8288	0.4356	1.9343	1.1823
gen	0.6794	0.9360	0.5208	0.5961	0.5173	0.5299	1.1466	0.8982
feb	2.3948	0.8347	0.0189	1.2766	0.4422	1.4858	2.0282	2.2749
mar	0.7686	0.7565	0.7042	0.8661	0.9608	0.5782	0.8644	0.8878
apr	1.5652	1.0305	1.4005	1.2572	0.6476	1.1217	2.2478	1.7841
mag	1.5443	0.9651	1.6127	2.3448	1.6732	0.4937	1.4878	1.3435
giu	0.7530	1.4164	1.8491	1.2268	0.3447	0.1847	2.6921	0.8871
lug	0.5930	2.1304	1.3910	1.9735	2.1299	-0.0441	3.7538	1.6797
ago	0.1597	2.7525	1.1109	2.5930	0.9427	0.6306	3.9276	1.3008
set	1.4444	1.8279	2.1218	0.9948	2.1402	1.5853	5.4085	4.0896

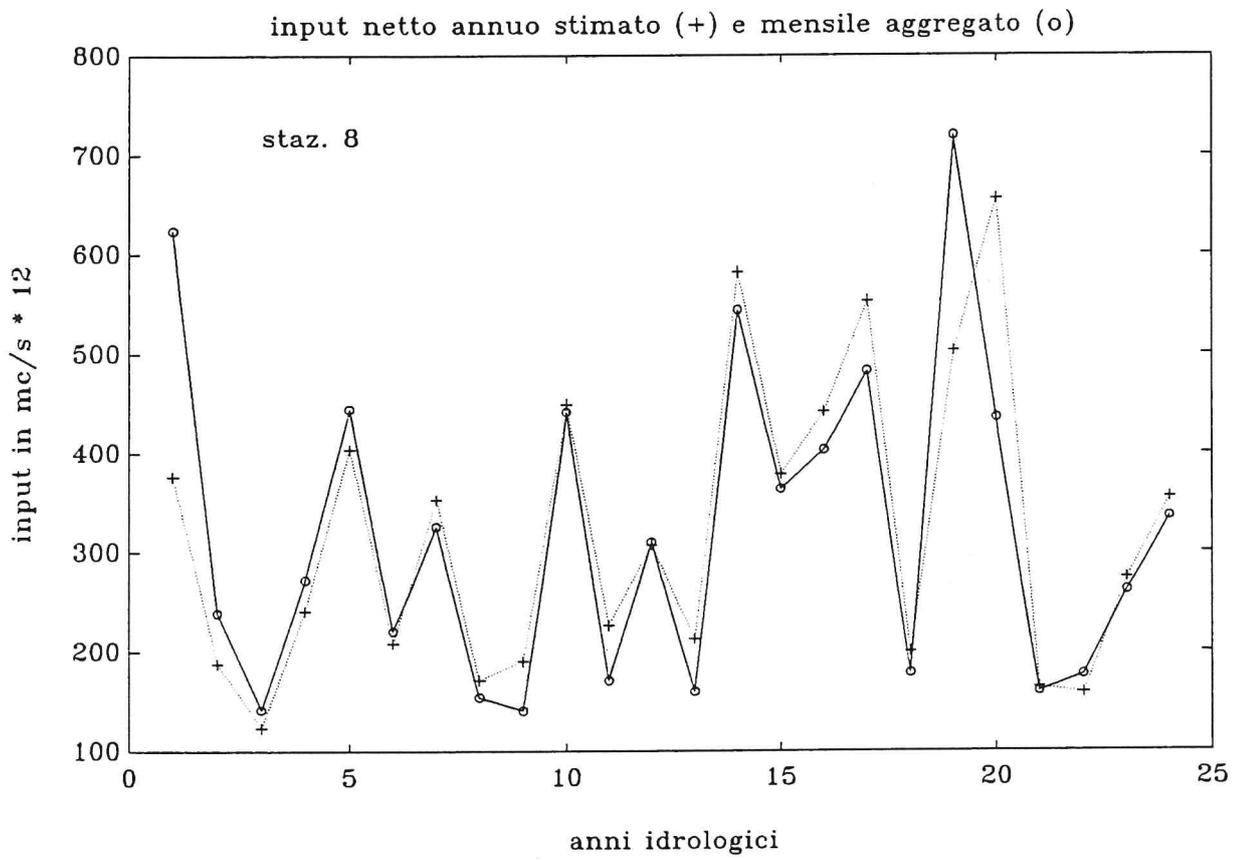


figura 8.1.4

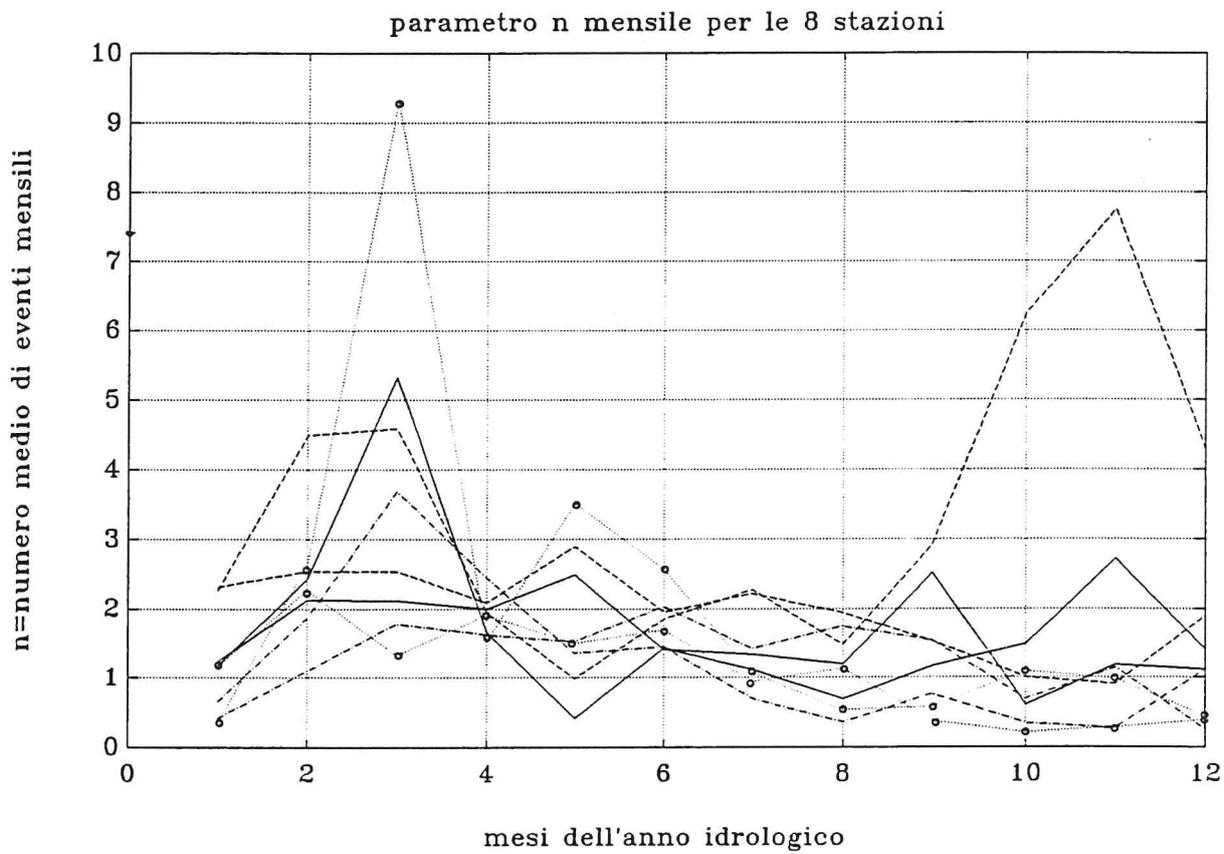


figura 8.2.0

TABELLA 8.2.0

parametro n mensile per le 8 serie

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	1.1696	2.3113	0.3322	0.6513	1.2351	2.2650	1.1569	0.4119
nov	2.4334	2.5409	2.6426	1.8647	2.1228	4.4807	2.2735	1.0930
dic	5.3204	2.5443	9.3034	3.6863	2.1148	4.5855	1.3267	1.7816
gen	1.6639	2.0925	1.5226	2.4455	1.9966	1.9525	1.9147	1.6305
feb	0.4092	2.8975	3.5166	1.3480	2.4946	0.9794	1.4970	1.5273
mar	1.4265	1.9480	2.5652	1.4452	1.4071	1.8459	1.6883	2.0374
apr	1.1080	2.2142	1.0661	0.6961	1.3304	2.2683	0.9317	1.4117
mag	0.6889	1.9439	0.5335	0.3551	1.1909	1.4788	1.1266	1.7446
giu	1.1670	1.5352	0.5752	0.7629	2.5190	2.9253	0.3836	1.5408
lug	1.4863	0.9995	1.0891	0.3500	0.6051	6.2498	0.2093	0.6841
ago	2.7285	0.9065	0.9829	0.2717	1.1848	7.7441	0.2828	1.1354
set	1.4088	1.8911	0.4378	1.1135	1.1121	4.2868	0.3873	0.2529

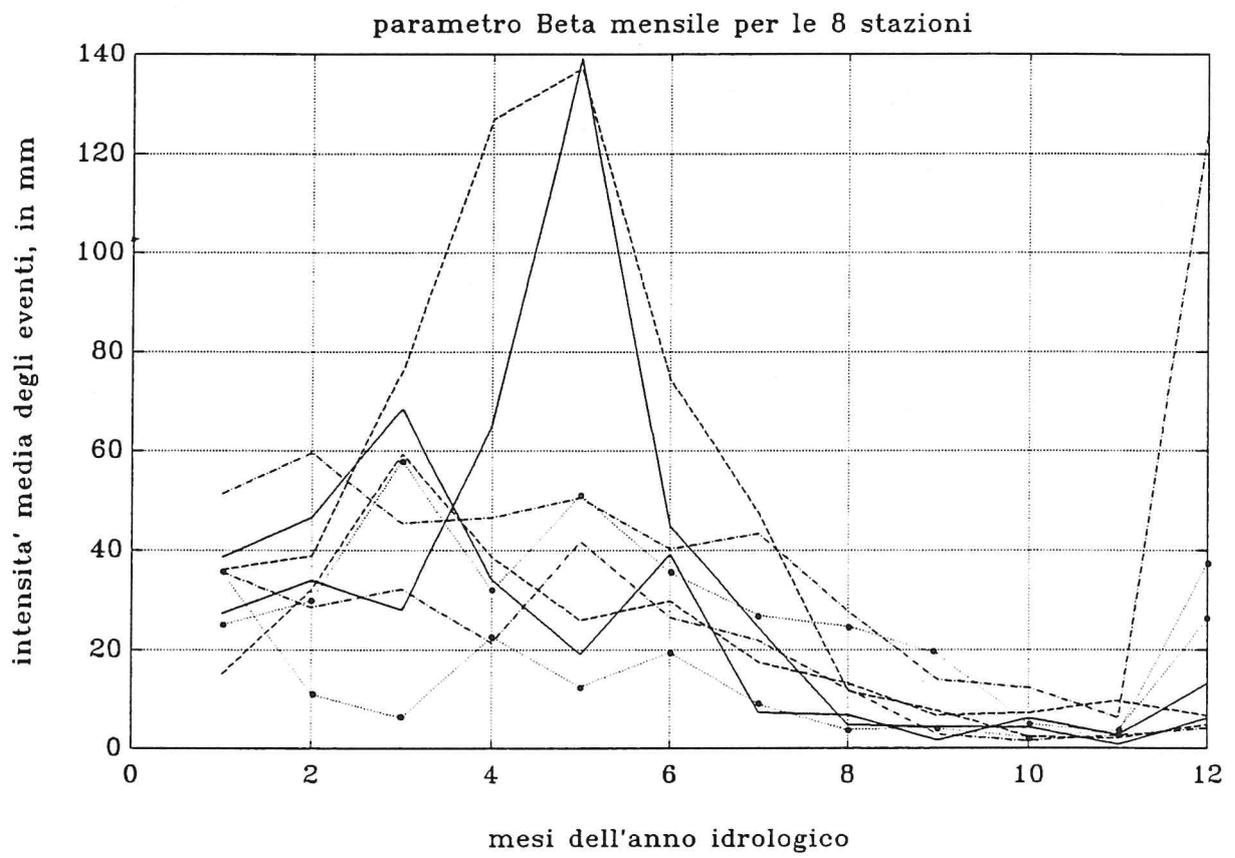
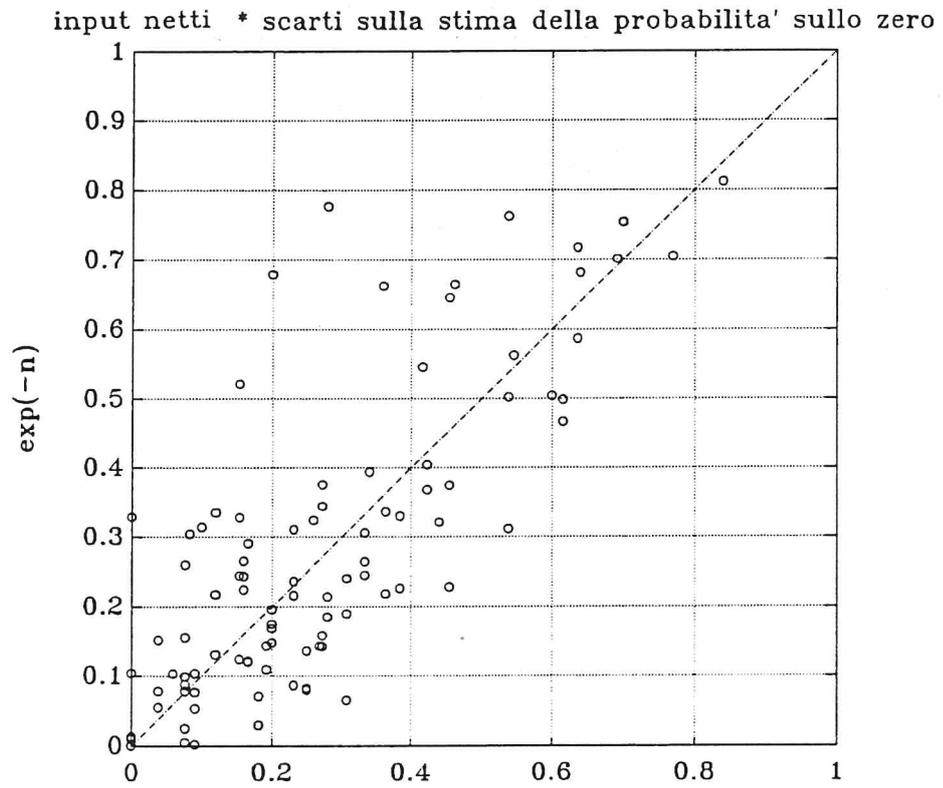


figura 8.2.1

TABELLA 8.2.1

parametro β = intensita' media degli eventi, in mm per le 8 serie

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	27.354	15.071	35.602	35.540	38.497	35.905	24.987	51.319
nov	33.894	32.064	11.068	28.491	46.625	38.828	29.737	59.527
dic	27.903	59.264	6.291	32.056	68.299	76.090	57.847	45.383
gen	65.289	38.518	22.630	21.358	34.007	126.801	31.688	46.555
feb	139.15	25.916	12.436	41.812	19.015	137.036	51.222	50.482
mar	44.850	29.698	19.469	26.551	39.110	74.273	35.393	40.230
apr	24.514	17.539	9.002	21.911	7.323	47.371	26.940	43.262
mag	4.749	13.175	3.707	11.980	6.765	11.694	24.674	27.727
giu	4.333	6.665	4.086	2.928	1.677	7.626	19.216	13.953
lug	4.137	7.212	2.223	1.472	6.093	2.431	4.917	12.288
ago	0.775	9.678	3.618	2.511	2.673	2.066	3.097	6.272
set	6.112	6.685	26.208	3.941	13.292	4.772	37.546	125.37



frequenze osservate sul valore zero (dati mensili di 8 stazioni)

figura 8.2.2

TABELLA 8.2.2

frequenze osservate sul valore zero (dati mensili di 8 stazioni)

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	0.2308	0.0769	0.6364	0.1538	0.1667	0	0.1000	0.360
nov	0.0769	0.0385	0.1818	0.0769	0.1667	0	0.0600	0.120
dic	0.0769	0.0769	0	0.0769	0.1667	0	0.1600	0.200
gen	0.3077	0.1538	0.3636	0.2308	0.2500	0.2727	0.2000	0.200
feb	0.4615	0.0385	0.1818	0.0769	0.2500	0.2727	0.1600	0.120
mar	0.3077	0.2692	0.0909	0.2308	0.3333	0.2727	0.2800	0.120
apr	0.3846	0.1923	0.2727	0.6154	0.3333	0.0909	0.3400	0.160
mag	0.5385	0.1923	0.6364	0.6923	0.0833	0.4545	0.2600	0.200
giu	0.5385	0.2308	0.5455	0.6154	0.2500	0.0909	0.6400	0.280
lug	0.3846	0.4231	0.3636	0.7692	0.4167	0.0909	0.8400	0.600
ago	0.3077	0.4231	0.4545	0.5385	0.3333	0	0.7000	0.440
set	0.1538	0.0385	0.4545	0.1538	0	0	0.2000	0.280

exp(-n) (frequenze teoriche sullo zero)

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	0.3105	0.0991	0.7173	0.5214	0.2908	0.1038	0.3145	0.6624
nov	0.0877	0.0788	0.0712	0.1549	0.1197	0.0113	0.1029	0.3352
dic	0.0049	0.0785	0.0001	0.0251	0.1207	0.0102	0.2653	0.1684
gen	0.1894	0.1234	0.2182	0.0867	0.1358	0.1419	0.1474	0.1958
feb	0.6642	0.0552	0.0297	0.2598	0.0825	0.3755	0.2238	0.2171
mar	0.2402	0.1426	0.0769	0.2357	0.2449	0.1579	0.1848	0.1304
apr	0.3302	0.1092	0.3444	0.4985	0.2644	0.1035	0.3939	0.2437
mag	0.5021	0.1431	0.5866	0.7011	0.3040	0.2279	0.3241	0.1747
giu	0.3113	0.2154	0.5626	0.4663	0.0805	0.0536	0.6814	0.2142
lug	0.2262	0.3681	0.3365	0.7047	0.5460	0.0019	0.8112	0.5046
ago	0.0653	0.4039	0.3742	0.7621	0.3058	0.0004	0.7537	0.3213
set	0.2444	0.1509	0.6455	0.3284	0.3289	0.0137	0.6789	0.7765

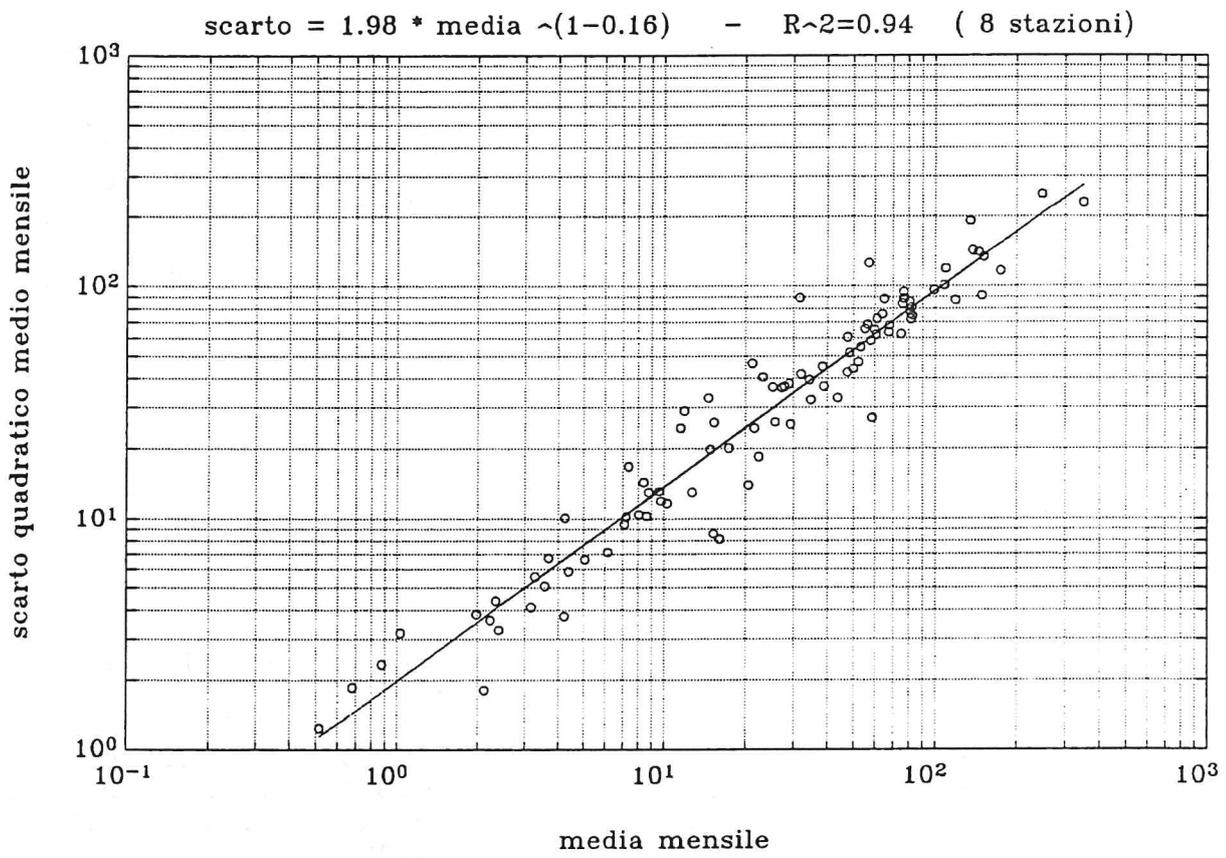


figura 8.2.3

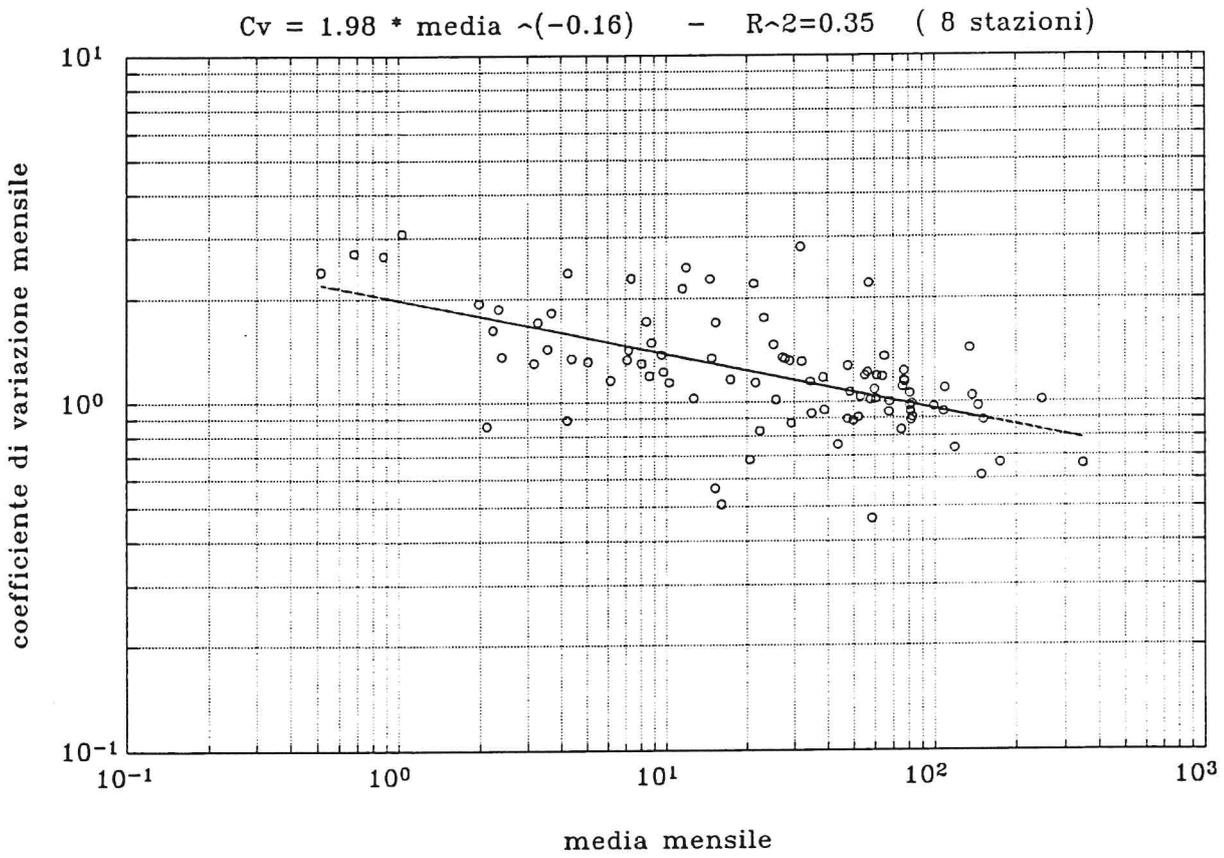


figura 8.2.4

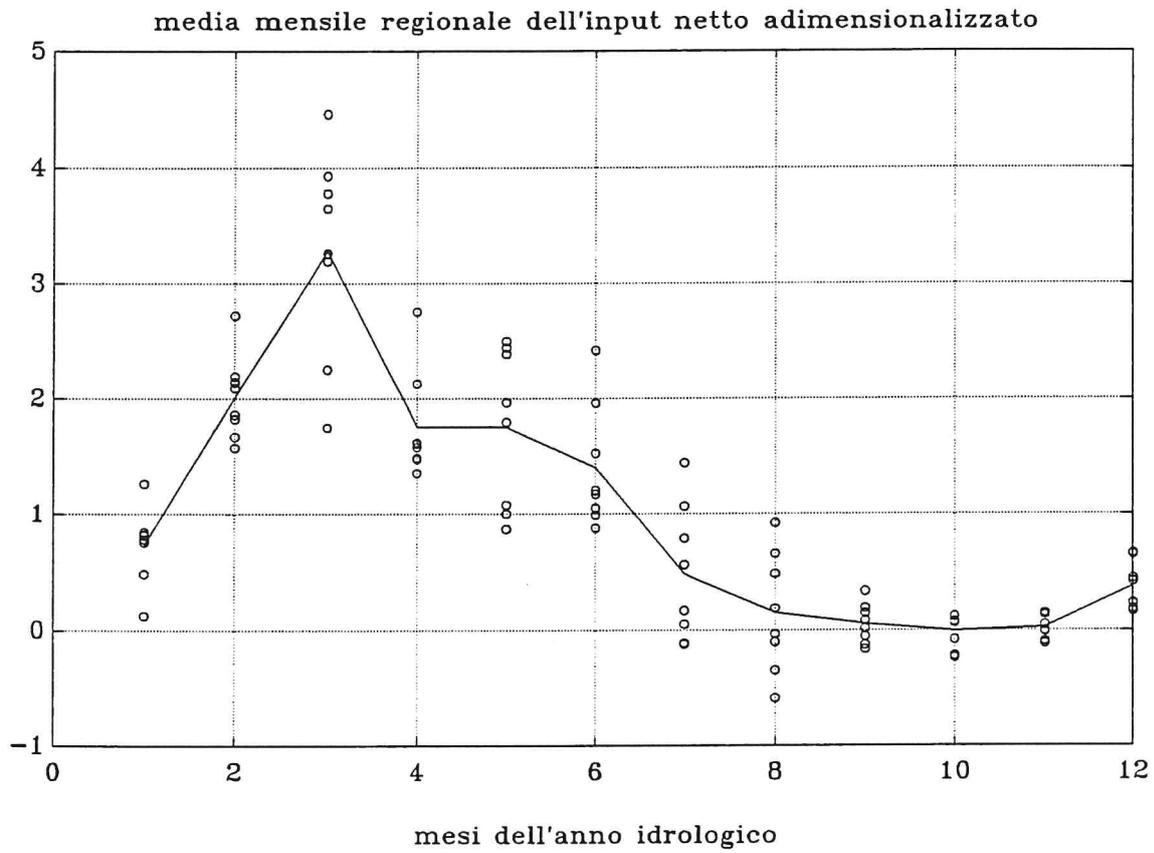


figura 8.2.5

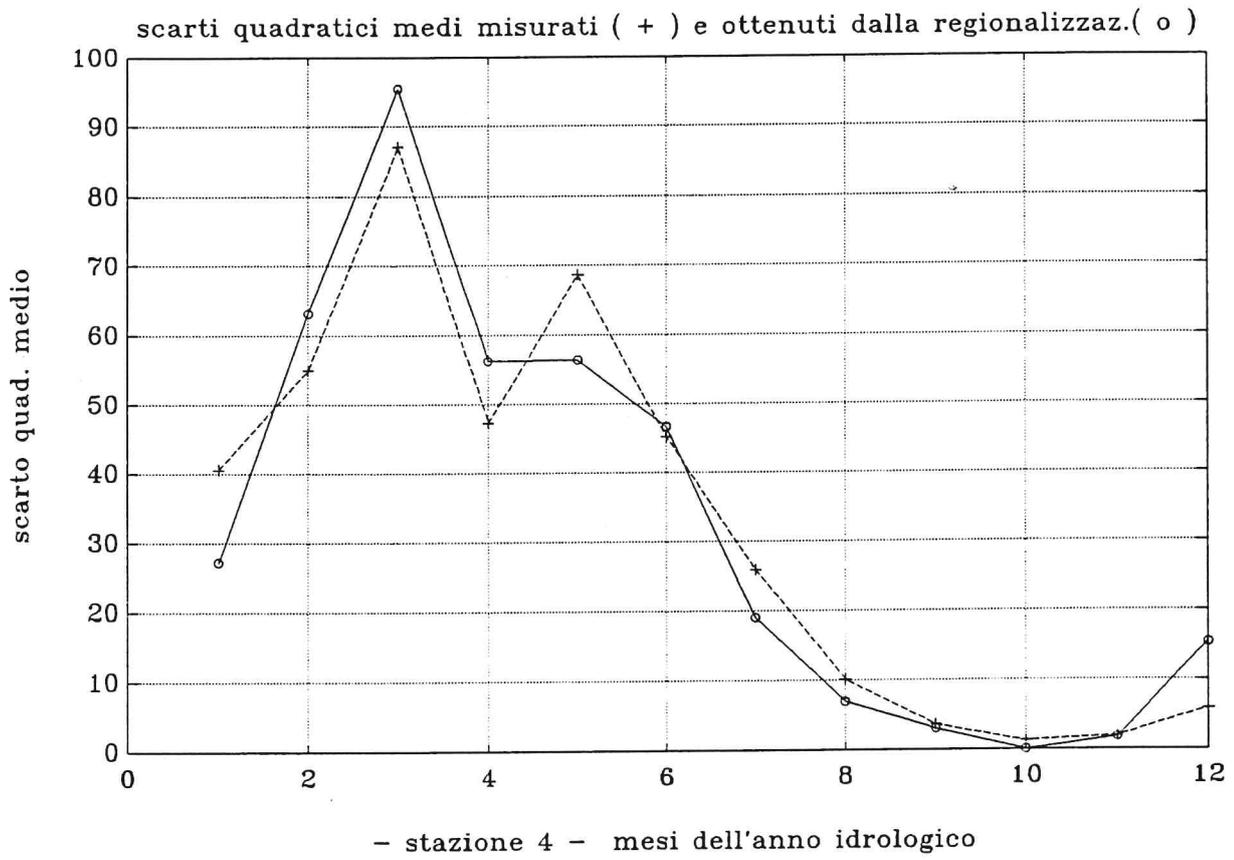


figura 8.2.6

stazione 7 * scostamento tra dati e modello probabilistico

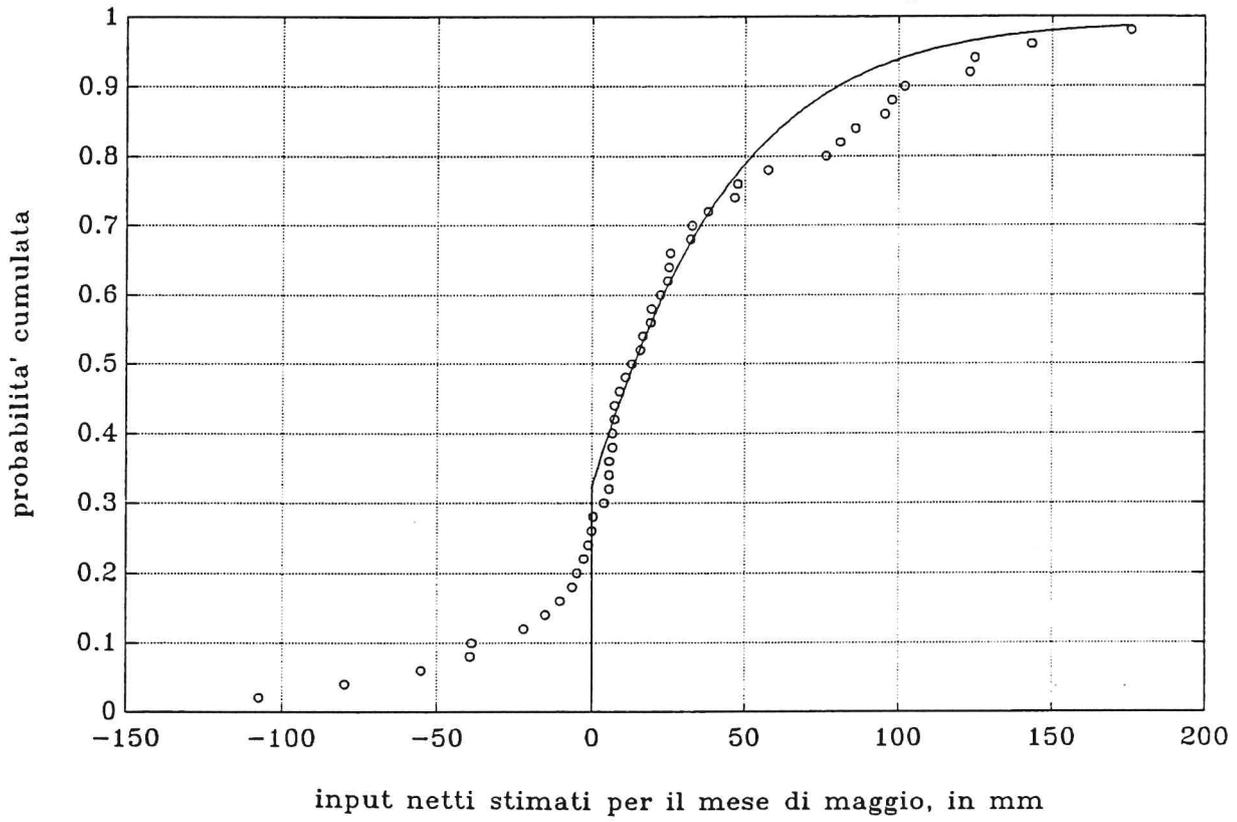


figura 8.2.7

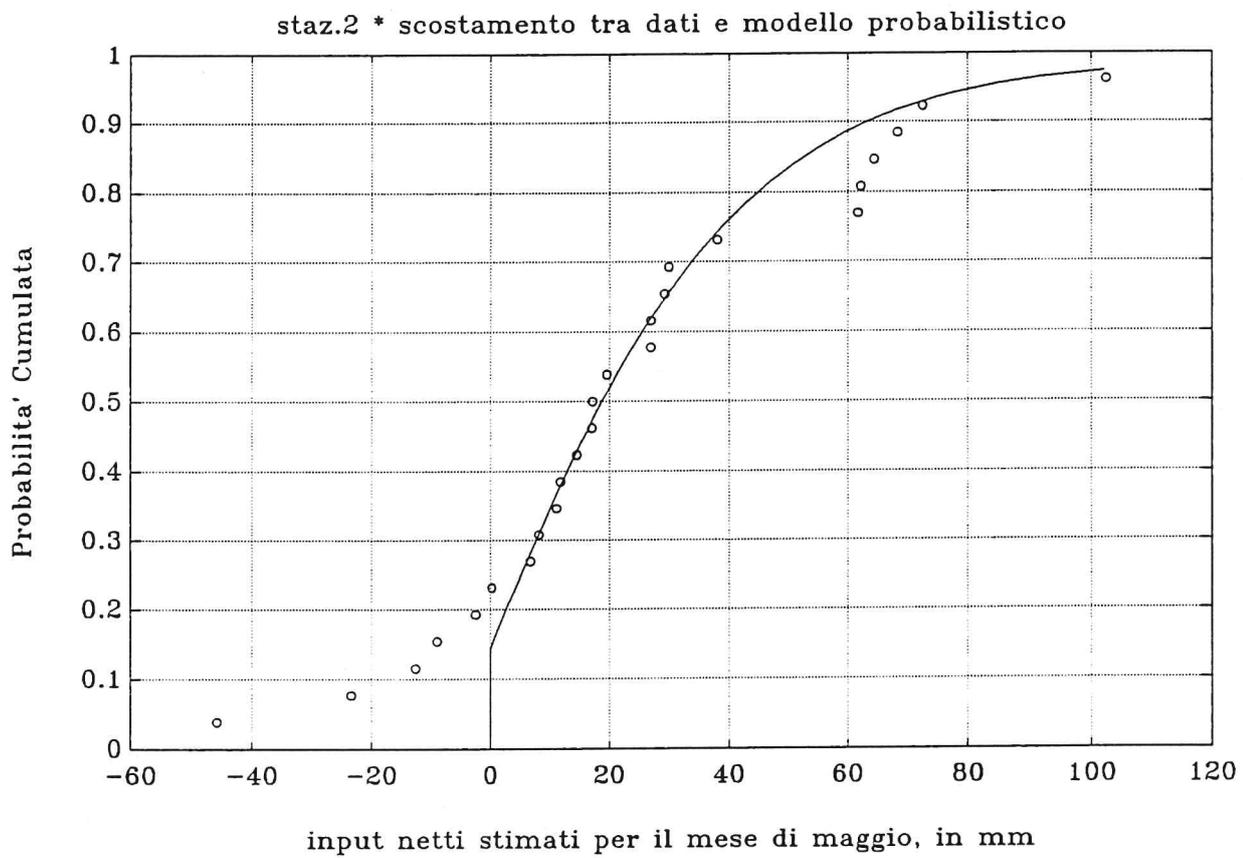


figura 8.2.8

staz. 7 * dati e curva della distribuzione mista in carta Normale

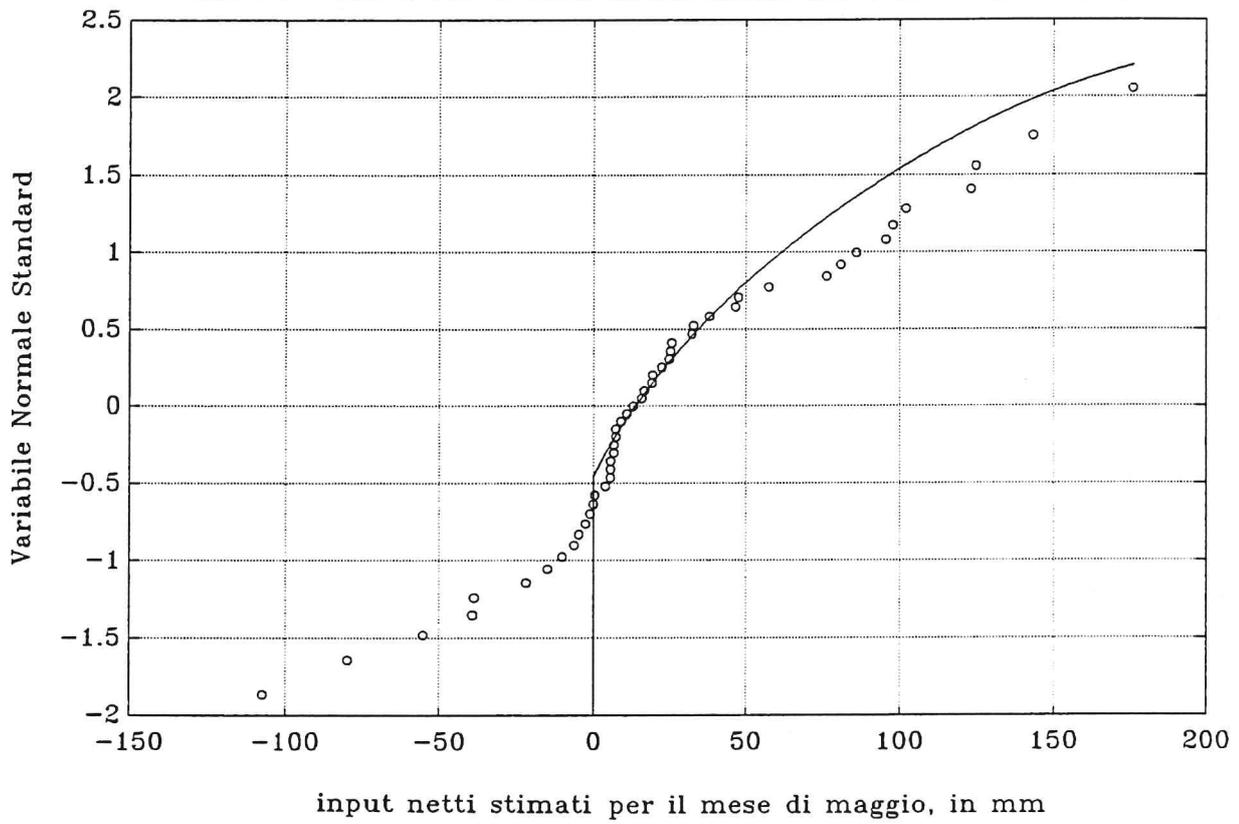


figura 8.2.9

staz. 7 * dati e curva della distribuzione mista in carta Normale

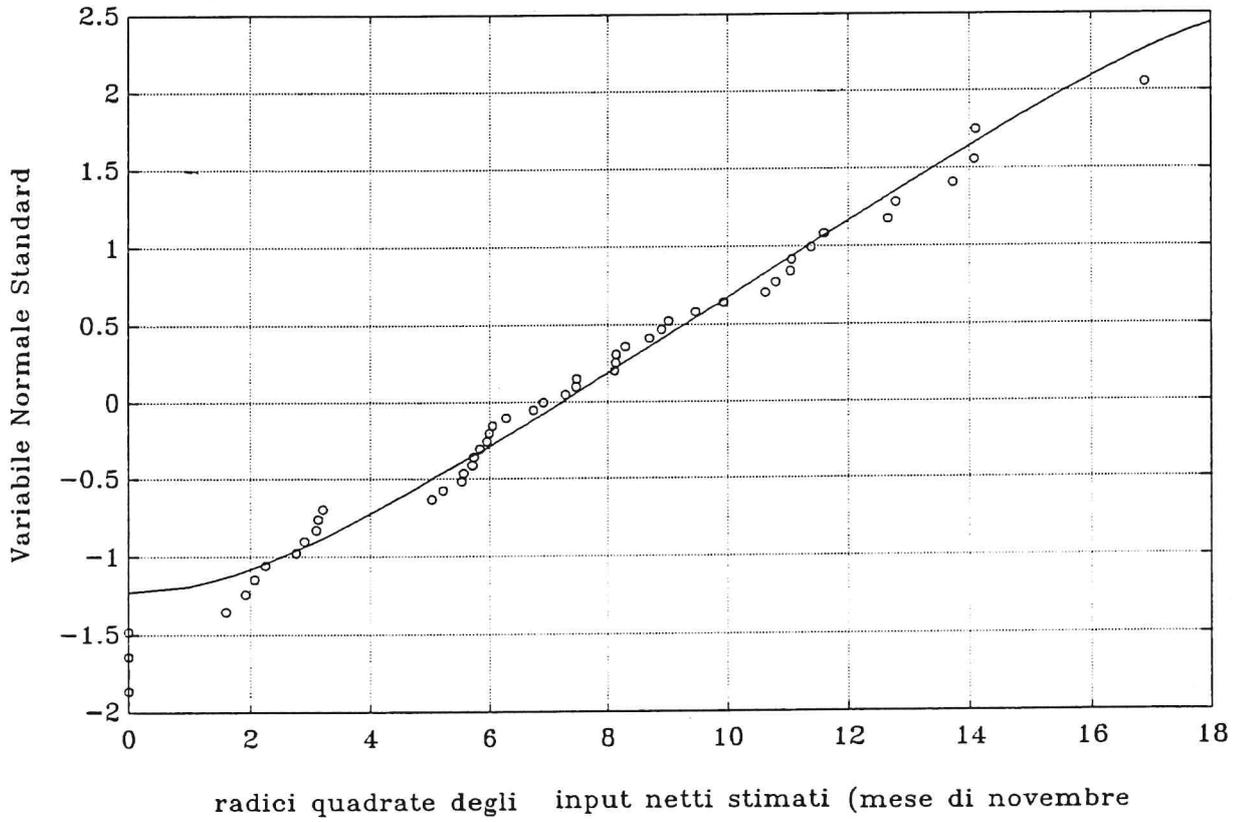


figura 8.2.10

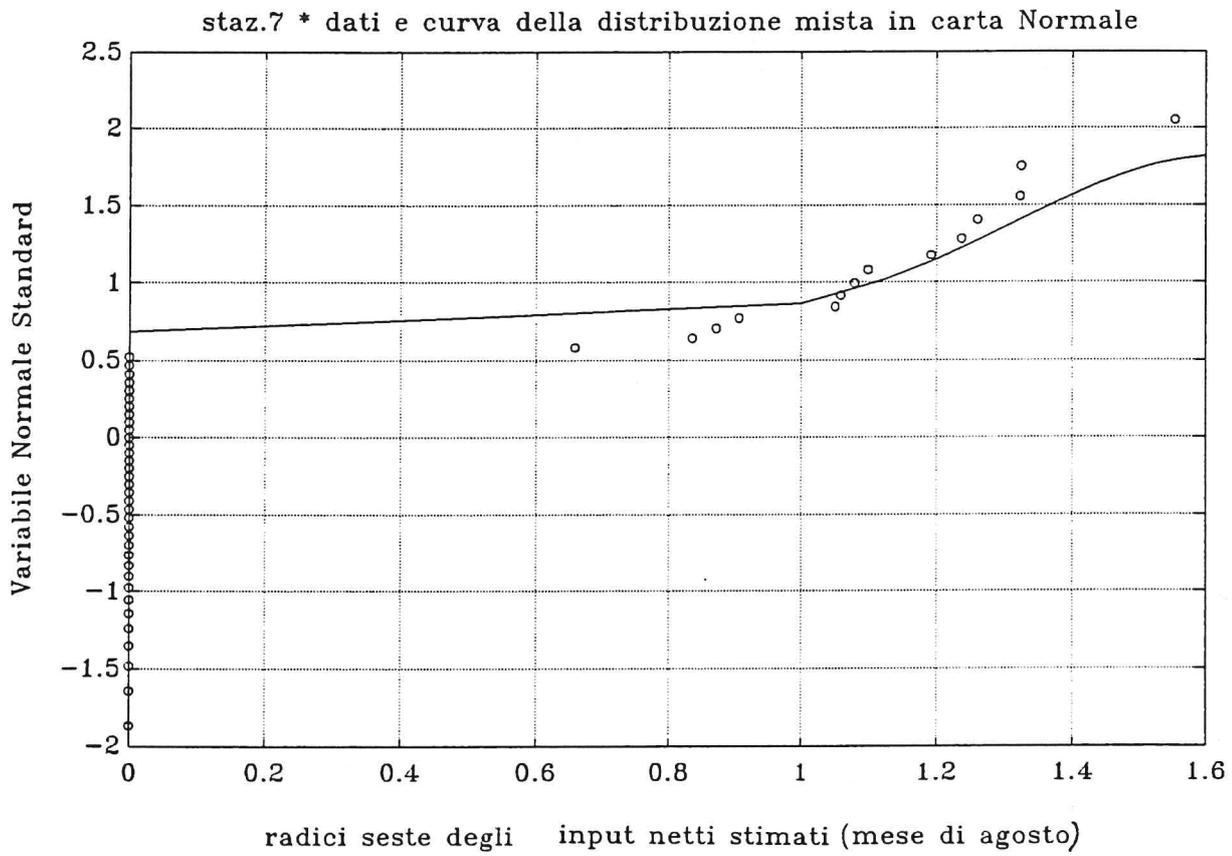


figura 8.2.11

9 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Il processo dei deflussi a scala annua e mensile e' stato analizzato con metodologie statistiche basate su una interpretazione fisica del fenomeno. In particolare, con riferimento a corsi d'acqua a regime appenninico, i deflussi a scala mensile sono stati schematizzati come risultanti dalla somma di tre contributi: l'apporto della falda ad esaurimento pluriennale, l'apporto della falda ad esaurimento stagionale ed il deflusso diretto. L'effetto esercitato dalle falde acquifere e' quello di indurre dipendenza temporale nelle sequenze dei deflussi, mentre il deflusso diretto e' considerato proporzionale all'afflusso netto o efficace e rappresenta una componente aleatoria con parametri aventi variabilita' stagionale.

Nella schematizzazione adottata le falde acquifere vengono considerate invasi lineari ed il deflusso diretto viene considerato un processo indipendente di tipo pseudo-periodico.

Si e' mostrato che a questa rappresentazione concettuale si riconduce un modello stocastico lineare ARMA(2,2), autoregressivo di ordine due e media mobile di ordine due. I quattro parametri del modello stocastico corrispondono ai quattro parametri individuati per il modello concettuale, due caratteristici della ricarica e due dell'esaurimento delle falde. Il residuo del modello ARMA(2,2) corrisponde al deflusso diretto ed e' percio' di tipo pseudo-periodico. Nel caso in cui sia trascurabile o venga a mancare il contributo di falda pluriennale, il modello stocastico rappresentativo diventa un ARMA(1,1).

I quattro parametri concettuali non sono risultati stimabili direttamente dai parametri stocastici del modello ARMA(2,2); l'interpretazione che si e' data a questa circostanza e' che l'esaurimento della falda pluriennale non e' rilevabile statisticamente a scala mensile, poiche' il relativo contributo si confonde con il livello medio del deflusso.

Si e' percio' proposto di stimare separatamente i parametri delle due falde, distinguendo le scale temporali di interesse: i

parametri della falda pluriennale vengono stimati a scala annua, mentre quelli della falda stagionale sono stimati a scala mensile sulla serie dei deflussi relativi ad un sottosistema costituito dalla falda stagionale e dal deflusso diretto. La rappresentazione concettuale del sottosistema conduce ad un modello stocastico ARMA(1,1) i cui parametri sono legati direttamente ai parametri concettuali della falda stagionale. Per effettuare la fase di stima dei parametri e' quindi necessario isolare i deflussi relativi al sottosistema indicato sottraendo il contributo della falda pluriennale dalla serie del deflusso mensile. Questa operazione comporta la necessita' di iterare il procedimento di stima dato che l'apporto della falda pluriennale non e' noto a priori.

Dalla serie del deflusso di sottosistema oltre ai parametri della falda stagionale si stima il deflusso diretto, corrispondente al residuo aleatorio. Il deflusso diretto e' proporzionale all'afflusso netto, che viene definito input netto per rimarcare il fatto che si tratta di una quantita' ottenuta dalla serie dei deflussi piuttosto che di una variabile a se' stante.

La fase di analisi del residuo del modello stocastico coincide quindi con l'esame delle caratteristiche di un processo che ha significato fisico. L'input netto presenta un numero significativo di valori zero nei mesi della stagione secca, per cui una analisi condotta con modelli probabilistici di tipo continuo risulta di difficile applicazione. Si e' pertanto utilizzato un modello probabilistico di tipo composto, a due parametri, definito dalla somma di un numero n variabile (poissoniano) di eventi caratterizzati da intensita' distribuita esponenzialmente (con parametro β). I due parametri sono stati stimati sulle singole serie di dati, mese per mese, con il metodo dei momenti.

Da tale analisi e' poi emersa la possibilita' di regionalizzazione dei parametri. In una stessa regione climatica e' risultata infatti costante tra i vari corsi d'acqua la legge di variabilita' stagionale del rapporto tra media mensile e media annua dell'input netto. Un altro parametro, funzione della media e dello scarto mensili, e corrispondente al prodotto β^{-r}

$n(1/2 - r)$, e' risultato costante non solo da un corso d'acqua all'altro, ma anche da mese a mese nello stesso corso d'acqua.

La tecnica di analisi esposta e' stata applicata ad 8 bacini appenninici (di cui 3 con rilevanti contributi di falda pluriennale) selezionati sulla base di criteri di omogeneita' statistica.

Allo scopo di effettuare un confronto con un modello statistico di tipo empirico e' stato preso a riferimento il piu' semplice tra i modelli della classe AR a parametri periodici, il PAR(1) che e' tra i piu' usati nella corrente pratica idrologica. Dalle stime effettuate sugli 8 bacini selezionati e' risultato che il modello a base concettuale proposto e' preferibile sotto tre aspetti:

- a. la parsimonia nel numero di parametri, che sono ridotti ad un massimo di 17 rispetto ai 36 del PAR(1)
- b. l'efficienza statistica, misurata dal grado di variabilita' del fenomeno che il modello riesce a riprodurre (varianza spiegata), in relazione alla quale il modello proposto e' risultato sistematicamente piu' valido rispetto al PAR(1).
- c. la capacita' di rappresentare una interpretazione del fenomeno, la quale, oltre ad essere un requisito importante dal punto di vista idrologico, consente di migliorare le prestazioni statistiche del modello. Infatti, il significato fisico attribuibile ai parametri facilita il controllo delle stime dirette, quando i dati sono disponibili, e permette la stima indiretta nel caso di scarsita' di dati.

Le possibilita' ulteriori sviluppi in relazione all'argomento qui trattato si presentano in due direzioni:

- da una parte, il significato concettuale che si puo' attribuire al residuo dei modelli stocastici univariati rende interessante ampliare la modellazione includendo il processo degli afflussi;
- dall'altra, logica estensione applicativa della metodologia statistica a base concettuale si presenta nei riguardi dei deflussi aggregati a scale temporali inferiori a quella mensile, nella direzione di una integrazione con i modelli di piena.

Va infine ricordato che uno dei principali problemi da affrontare nell'ambito delle ricerche sul regime fluviale e'

quello del reperimento di serie naturali, cioè non affette da regolazioni antropiche. A tale riguardo, l'approccio fenomenologico alla modellazione stocastica dei deflussi potrebbe costituire una interessante proposta ai fini dello sviluppo di metodologie per la valutazione della "naturalità" delle serie idrologiche.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Bako, M.D. and D.N. Hunt (1988) Derivation of baseflow recession constant using computer and numerical analysis, Hydrol. Sci. Journal, 33(4), 357-367.
- Battaglia, F. (1986) Modelli stocastici per la rappresentazione e la previsione dei deflussi, Dipartimento di Statistica, probabilita' e statistiche applicate, Quaderno n. 3, Universita' di Roma "La Sapienza".
- Benjamin, J.R. and C.A. Cornell (1970) Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers Mc. Graw Hill Book Co., New York
- Boes, D. and J.D. Salas (1978) Nonstationarity in the mean and the Hurst Phenomenon, Water Resour. Res., 14(1), 135-143.
- Bowles, D.S., W.R. James and N.T. Kottegoda (1987) Initial model choice: An operational comparison of stochastic streamflow models for drought, Water Resour. Management, 1, 3-15
- Box, G.E. and G. Jenkins (1976) Time Series Analysis, Forecasting and Control, Revised Edition, Holden-Day, San Francisco
- Carlson, R.F., A.J.A. MacCormick and D.G. Watts (1970) Application of linear models to four annual streamflows series, Water Resour. Res., 6(4), 1070-1078.
- Clarke, R.T. (1973) Mathematical Models in Hydrology, Irrigation and Drainage Paper, F.A.O., Roma.
- Delleur, J.W., P.C. Tao and M.L. Kavvas (1976) An evaluation of the practicality and the complexity of some rainfall and runoff time series models, Water Resour. Res., 12(5), 953-970.
- Fernandez, B. and J.D. Salas (1986) Periodic Gamma Autoregressive processes for operational hydrology, Water Resour. Res., 22(10), 1385-1396.
- Fiering, M.B. (1967) Streamflow Synthesis, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

- Franchini, M, and E. Todini (1981) L'idrologia sintetica, in Modelli Idrologici ed Idrogeologici, Ciclo di seminari per l'avviamento alla ricerca e perfezionamento, C.N.R.-I.R.P.I., Perugia
- Grygier, J.C. and J.R. Stedinger (1988) Condensed disaggregation procedure and conservation corrections for stochastic hydrology, Water Resour. Res., **24**(10), 1574-1584.
- Harms, A.A. and T.H. Campbell (1967) An extension to the Thomas-Fiering model for the sequential generation of streamflow, Water Resour. Res., **3**(3), 653-661
- Hino, M. and M. Hasebe (1986) Separation of a storm hydrograph into runoff components by both filter separation AR method and environmental isotope tracers, Journal of Hydrology, **85**, 251-264.
- Hipel, K.W., A.I. McLeod and W.C. Lennox (1977) Advances in Box-Jenkins modeling, 1. Model construction, Water Resour. Res., **13**(3), 567-575.
- Hipel, K.W. and A.I. McLeod (1978) Preservation of the rescaled adjusted range, 2. Simulation study using Box-Jenkins models, Water Resour. Res., **14**(3), 509-516
- Hirsch, R.M. (1979) Synthetic hydrology and water supply reliability, Water Resour. Res., **15**(6), 1603-1615
- Hurst, H.E. (1951) Long term storage capacity of reservoirs, Trans. Amer. Soc. Civil Engrs., **116**, pp 770-799
- Hurst, H.E. (1957) A suggested statistical model of some time series which occur in nature, Nature, **180**, 494.
- Institute of Hydrology - Wallingford (1980) Low Flow Studies, Research Report, Wallingford, Oxon.
- Kavvas, M.L. and J.W. Delleur (1975) Removal of periodicities by differencing and monthly mean subtraction, Journal of Hydrology, **26**, 335-353
- Kavvas, M.L., L.J. Cote and J.W. Delleur (1977) Time resolution of the hydrologic time-series models, Journal of Hydrology, **32**, 347-361
- Klemes, V. (1974) The Hurst phenomenon: a puzzle?, Water Resour. Res., **10**(4), 675-688.
- Klemes, V. (1978) Physically based stochastic hydrologic analysis, Advances in Hydroscience, **11**, 285-352.

- Klemes, V. (1983) Conceptualization and scale in hydrology, Journal of Hydrology, **65**, 1-23
- Lane, W.L. (1979) Applied Stochastic Techniques, User's Manual, U.S. Bureau of Reclamation, Engineering and Research Center, Denver, Colorado.
- Lawrance, A.J. and N.T. Kottegoda (1977) Stochastic modelling of riverflow time series, J.R. Statist. Soc., A, **140**, 1-47
- Lettenmaier, D.P. and S.J. Burges (1977) Operational assessment of hydrologic models of long-term persistence, Water Resour. Res., **13**(1), 113-124.
- Loucks, D.P., J.R. Stedinger and D.A. Haith (1981) Water Resources Planning and Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y.
- Mandelbrot, B.B. and J.W. Van Ness (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, Soc. Ind. Appl. Math. Rev., **10**(4), 422-437.
- Mandelbrot, B.B. and J.R. Wallis (1969) Computer experiments with fractional Gaussian noises, Water Resour. Res., **5**(1), 228-267.
- Matalas, N.C. (1967) Mathematical assessment of synthetic hydrology, Water Resour. Res., **3**(4) 937-945.
- McKerchar, A.I. and J.W. Delleur (1974) Application of seasonal parametric linear stochastic models to monthly flow data, Water Resour. Res., **10**(2), 246-255.
- Mejia, J.M., I. Rodriguez Iturbe and D.R. Dawdy (1972) Streamflow simulation, 2. The broken-line process as a potential model for hydrological simulation, Water Resour. Res., **8**(4), 931-941.
- Mejia, J.M. and J. Rousselle (1976) Disaggregation models in Hydrology revisited, Water Resour. Res., **12**(2), 185-186.
- Moisello U. (1985) Grandezze e Fenomeni Idrologici, ed. La Goliardica Pavese, Pavia.
- Moss, M.E. and Bryson, M.C. (1974) Autocorrelation structure of monthly streamflows, Water Resour. Res., **10**(4), 737-744.
- Newbold, P. (1984) Some recent developments in time series analysis, Int. Stat. Review, **52**, 2, 183-192.
- Noakes, D.J., A.I. McLeod and K.W. Hipel (1985) Forecasting monthly riverflow time series, Int. J. Forecast., **1**, 179-190

- O'Connell, P.E. (1971) A simple stochastic modeling of Hurst's law, Int. Symp. on Math. Models in Hydrology, Int. Ass. Hydrol. Sci. Warsaw.
- O'Connor, K.M. (1976) A discrete linear cascade model for hydrology, Journal of Hydrology, **29**, 203-242.
- Obeysekera, J.T.B. and J.D. Salas (1986) Modeling of aggregated hydrologic time series, Journal of Hydrology, **86**, 197-219
- Panu, U.S. and T.E. Unny (1980) Stochastic synthesis of hydrologic data based on concepts of pattern recognition, I. General Methodology of the approach, Journal of Hydrology, **46**, 45-34.
- Piccolo, D. (1983) Per una interpretazione dei modelli ARIMA, in Analisi Moderna delle Serie Storiche, ed. D. Piccolo, F. Angeli, Milano
- Piccolo, D. and C. Vitale (1984) Metodi Statistici per l'Analisi Economica, Il Mulino, Bologna
- Quimpo, R. (1971) Structural relation between parametric and stochastic hydrology models, Int. Symp. on Math. Models in Hydrology, Int. Ass. Hydrol. Sci. Warsaw.
- Rao, A.R., R.L. Kashyap and L. Mao (1982) Optimal choice of type and order of river flow time series models, Water Resour. Res., **18**(4), 1097-1109.
- Rassegna Bibliografica Internazionale sulla Analisi delle Serie Storiche (1985) a cura di C. Abitabile, Centro di Specializzazione e Ricerche Economico-Agrarie per il Mezzogiorno, Portici.
- Rossi, F. and G. Silvagni (1980) Analysis of annual runoff series, Proc. Third Symposium on Stochastic Hydraulics, Tokio, A-18
- Salas, J.D., D.C. Boes, V. Yevjevich and G.G.S. Pegram (1979) Hurst Phenomenon as a pre-asymptotic behavior, Journal of Hydrology, **44**, 1-15.
- Salas, J.D., J.W. Delleur, V. Yevjevich and W.L. Lane (1980) Applied Modeling of Hydrologic Time Series, Water Resources Publications, Littleton, Colorado.
- Salas, J.D. and R.A. Smith (1981) Physical basis of stochastic models of annual flows, Water Resour. Res., **17**(2), 428-430 .

- Salas, J.D., D.C. Boes and R.A. Smith (1982) Estimation of ARMA models with seasonal parameters, Water Resour. Res., **18**(4), 1006-1010.
- Salas, J.D. and J.T.B. Obeysekera (1982) ARMA models identification of hydrologic time series, Water Resour. Res., **18**(4), 1011-1021.
- Sim, C.H. (1987) A mixed Gamma ARMA(1,1) model for river flow time series, Water Resour. Res., **23**(1), 32-36.
- Spolia, S.K. and S. Chander (1974) Modelling of surface runoff systems by an ARMA model, Journal of Hydrology, **22**, 317-322.
- Stedinger, J.R., D.P. Lettenmaier and R.M. Vogel (1985) Multisite ARMA(1,1) and disaggregation models for annual streamflow generation, Water Resour. Res., **21**(4), 497-509.
- Tao, P.C. and J.W. Delleur (1976) Seasonal and nonseasonal ARMA models in hydrology, J. Hydraul. Eng., ASCE, **102**, HY10, 1541-1559
- Thomas, H.A. and M.B. Fiering (1962) Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation, in Design of Water Resource Systems (A. Mass et al., eds.), Harvard University Press, Cambridge, Mass, 459-493
- Tichelaar, B.W. and L.J. Ruff (1989) How good are our best models?, EOS, may 16.
- Todini, E. (1980) The preservation of skewness in linear disaggregation schemes, Journal of Hydrology, **47**, 199-214
- Valencia, D. and J.C. Shaake (1973) Disaggregation process in stochastic hydrology, Water Resour. Res., **9**(3), 580-585.
- Vanderwiele, G.L. and A. Dom (1989) A non-Gaussian multicomponent model for river flow, Water Resour. Res., **25**(3), 397-404.
- Vecchia, A.V., J.T.B. Obeysekera, J.D. Salas and D.C. Boes (1983) Aggregation and estimation of low-order periodic ARMA models, Water Resour. Res., **19**(5), 1297-1306.
- Yevjevich, V. (1963) Fluctuation of wet and dry years, Part I, Research data assembly and mathematical models, Hydrology Paper 1, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Yevjevich, V. (1964) Fluctuation of wet and dry years, Part II, Analysis by serial correlation, Hydrology Paper 4, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

- Yevjevich, V. (1972) Stochastic Processes in Hydrology, Water Resources Publication, Fort Collins, Colorado
- Yevjevich, V. and J.T.B. Obeysekera (1985) Effects of incorrectly removed periodicity in parameters on stochastic dependence, Water Resour. Res., 21(5), 685-690.
- Yevjevich, V. and N.B. Harmancioglu (1989) Description of periodic variation in parameters of hydrologic time series, Water Resour. Res., 25(3), 421-428.

APPENDICI

A.1.1 MODELLI STOCASTICI NON DELLA CLASSE ARMA PROPOSTI PER LA RAPPRESENTAZIONE DEI DEFLUSSI A SCALA TEMPORALE ANNUA E MENSILE

Fino agli anni cinquanta i deflussi fluviali erano considerati realizzazioni di variabili costituenti un processo indipendente.

I primi schermi proposti per la generazione dei deflussi (Hazen, Barnes) non consideravano, infatti, importante la successione dei valori registrati e si limitavano a riprodurre la media e la varianza dei deflussi storici.

Soltanto a partire dal lavoro di Hurst [1951] si fece strada la convinzione che le variabili idrologiche non potessero essere trattate come eventi casuali, in quanto caratterizzate dal fenomeno della persistenza.

Non si puo' seguire il filo logico dei modelli proposti negli anni a seguire per la descrizione e la generazione dei deflussi, se non ci si rifa' alla dimostrazione che Hurst [1951] diede della non indipendenza delle serie idrologiche ("Effetto Hurst") ed al relativo significato del "coefficiente di Hurst".

La necessita' di riprodurre l'effetto Hurst, in quanto unico metodo, seppur indiretto, in grado di mostrare la persistenza a lungo termine nelle serie idrologiche, ha orientato, infatti, gran parte delle ricerche condotte sull'argomento negli anni 70 [KLEMES, 1974].

Sia data una serie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. di deflussi annui in ingresso ad un serbatoio. Volendo derivare dal serbatoio il valor medio $E[x]$ dei deflussi, vi saranno dei periodi di deficit, in cui $x_i - E[x] < 0$, e dei periodi di surplus, nei quali $x_i - E[x] > 0$. In essi le somme dei valori in difetto ed in eccesso costituiranno i deficit o surplus cumulati.

La somma dei volumi di massimo deficit e massimo surplus cumulati costituisce il cosiddetto "Range" (R).

Il rapporto tra R e la deviazione standard della serie campionaria di lunghezza n, se le x_i sono variabili casuali indipendenti e comunque distribuite, segue la legge:

$$\frac{E[R]}{\sigma} = 1.25/\sqrt{n}$$

Dall'analisi di un campione numerosissimo di serie idrologiche

annuali, Hurst ricavo' invece una relazione del tipo:

$$R/\sigma=n^h$$

con $h=0.72$ mediamente, ma sicuramente con $h > 0.5$ ($h =$ coefficiente di Hurst).

Il tipo di dipendenza presente nei dati e responsabile dell'effetto Hurst e' stato poi classificato come persistenza a "lungo termine" per distinguerla dalla persistenza "a breve termine", riproducibile con i modelli autoregressivi.

La distinzione tra i due tipi di persistenza si puo' anche porre in relazione alla "memoria" del processo, cioe' la possibilita' da parte degli accadimenti di influenzare i valori futuri fino ad un certo "orizzonte", che rappresenta appunto la memoria.

Per la persistenza a breve termine si parla di "memoria finita", mentre per quella a lungo termine si adotta la dizione "memoria infinita".

Sul fatto che la persistenza a lungo termine fosse l'unica spiegazione possibile dell'effetto Hurst sono sorti pero' dei dubbi anche allo stesso Hurst [1957], ed a partire dal contributo di KLEMES [1974] c'e' stato piu' di un tentativo di riprodurre l'effetto Hurst con serie sintetiche indipendenti (si veda piu' oltre il modello Shifting Level).

Nel seguito si fara' cenno alle diverse classi di modelli non basate sulla metodologia BOX & JENKINS [1976], proposte per la rappresentazione dei deflussi, intesa soprattutto come generazione di serie sintetiche (per un piu' ampio commento si rimanda ai lavori di CLARKE [1973], LAWRENCE & KOTTEGODA [1977], FRANCHINI & TODINI [1981] e LOUCKS et al. [1981]).

La distinzione tra le classi di modelli non ARMA e la classe dei modelli ARMA si rende necessaria non tanto per motivi storici, quanto piuttosto per la differenza di approccio che e' seguita alle innovazioni metodologiche proposte da Box & Jenkins.

Infatti, nei primissimi lavori nei quali veniva proposto l'impiego di modelli ARMA per l'idrologia [CARLSON et al. 1970], [O'CONNELL 1971], l'approccio allo strumento statistico non differiva da quello che si aveva con le altre classi di modelli, essendo prevalentemente impostato su generazioni di serie sintetiche e verifica dell'aderenza delle statistiche delle sequenze generate a quelle delle serie originarie.

Per quel che riguarda i processi idrologici stazionari (e' il caso di quello dei deflussi annui), almeno fino all'articolo ammonitore di KLEMES [1974] lo sviluppo di modelli stocastici tendeva principalmente alla riproduzione dell'effetto Hurst, quale indice primo della presenza di persistenza a lungo termine nelle serie idrologiche. L'assunzione di stazionarieta' in media delle serie consentiva, poi, di attribuire alla memoria 'lunga' la tipica forma della funzione di autocorrelazione osservata sulle serie idrologiche, che decade molto lentamente senza mai azzerarsi.

In merito alla persistenza a breve termine, invece, gia' a partire dalla proposta di THOMAS & FIERING[1962] si era accertata l'adeguatezza dei modelli markoviani alla sua descrizione.

A 1.1.1 modelli non ARMA dei deflussi annui.

- Modello markoviano a lag-1 (Thomas - Fiering)

THOMAS & FIERING [1962] furono i primi a proporre un modello di generazione di serie sintetiche dei deflussi in cui compariva il concetto di persistenza, introducendo il coefficiente di autocorrelazione mese-mese.

In realta', il modello da essi proposto e' stato successivamente considerato valido anche per i deflussi su base temporale annua, come quello piu' semplice e di immediata applicazione.

Una formulazione standard del modello markoviano a lag-1 e':

$$x_t = \mu_x + \rho_1(x_{t-1} - \mu_x) + e_t$$

con μ_x = valore medio del processo

ρ_1 = coefficiente di autocorrelazione a lag-1

e_t = componente puramente aleatoria, non necessariamente distribuita normalmente, con:

$$E[e_t] = 0, \text{ VAR}[e_t] = \text{VAR}[x](1 - \rho_1^2)$$

Il modello Markoviano a lag-1, altrimenti detto AR(1), cioè autoregressivo del 1° ordine, è formulato in modo da tener conto della persistenza a breve termine ma è incapace di riprodurre la persistenza a lungo termine.

Questa circostanza di volta in volta veniva esemplificata con la troppo rapida caduta della funzione di autocorrelazione oppure con l'incapacità di generare serie che riproducessero l'effetto Hurst (da questo modello risulta infatti, sempre, $h=0.5$).

Alla luce della interpretazione concettuale del processo dei deflussi, il motivo per cui il modello AR(1) non è adatto alla modellazione dei deflussi è invece, come vedremo in seguito, legato al fatto che esso rappresenta soltanto l'equazione del deflusso da un vaso lineare soggetto ad un ingresso puramente casuale. È quindi adatto a modellare i deflussi sorgentizi, ma non quelli fluviali.

- Modello Discreto a Rumore Gaussiano Frazionale.

Il modello DFGN, introdotto da MANDELBROT & WALLIS [1969] è caratterizzato dall'impossibilità di interpretazione fisica, dalla notevole complessità matematica e dalla complicatezza d'uso, per la difficile taratura dei parametri.

È stato a lungo la pietra di paragone nel campo della idrologia sintetica, in quanto espressamente pensato per la riproduzione dell'effetto Hurst, il che ha significato l'assenza di riguardi per le altre caratteristiche statistiche dei processi indagati.

Mandelbrot e Wallis dimostrarono che un processo x_t soddisfa la legge di Hurst $R/\sigma = n^h$ se è gaussiano, stazionario, non necessariamente indipendente ed il relativo processo cumulato

$$x_t = \int_{-\infty}^t x_t dt$$

è SIMILE A SE STESSO.

Si dice che un processo è s^H simile a se stesso quando espandendo (o contraendo) nel rapporto r la scala dei tempi, la scala dei valori x è espansa (o contratta) nel rapporto r^H .

Individuando un opportuno processo simile a se stesso (il moto Browniano frattale o frazionale), la sua derivata rappresenterà il processo in esame.

Tra varie approssimazioni, per rendere derivabile nel continuo il moto Browniano frattale, per trattare nel discreto un processo continuo come il moto Browniano e per rendere numericamente generabile la serie sintetica, si raggiunge l'obiettivo di rispettare l'effetto Hurst ma al prezzo di una molto dubbia applicabilita' dello strumento matematico (in particolare nei riguardi della stima del coefficiente H, di Hurst).

KLEMES [1984], oltretutto, dimostrera' che l'obiettivo di cui sopra e' conseguibile in una quantita' di altri modi.

- Modello Broken Line

MEJIA et al. [1972] formularono questo modello nel tentativo di superare gli inconvenienti del DFBN e del modello AR(1). La generazione delle serie sintetiche e' ottenuta attraverso la somma di un certo numero di processi indipendenti del tipo "Broken Line", cioe' ottenuti attraverso interpretazione lineare tra i valori assunti da una sequenza di variabili causali, ugualmente distribuite, indipendenti ed equidistanziate sull'asse dei tempi.

Peculiari di questo modello sono la minore complessita' rispetto al DFBN, il minor rigore nel soddisfacimento della legge di Hurst e, tutto sommato, la non minore difficulta', rispetto al DFBN nella stima dei parametri.

- modello Shifting Level

Per completezza di esposizione vale la pena di elencare tra le classi di modelli non ARMA anche quelli che si propongono di riprodurre le caratteristiche di non stazionarieta' in media delle serie idrologiche.

Tra questi (a titolo di esempio si possono citare gli "esercizi statistici" di HURST [1957] e KLEMES [1974]).

Il piu' recente ed espressamente costruito per la generazione di serie idrologiche e' lo Shifting Level [BOES & SALAS, 1978], strutturato per la riproduzione dell'effetto Hurst e della funzione di autocorrelazione del modello ARMA(1,1) (considerato, quest'ultimo, nella parte di spazio dei parametri per la quale e' riproducibile la legge di Hurst).

Questo tipo di processo si ottiene dalla mistura (somma) di variabili casuali aventi la stessa distribuzione ma con la media che varia casualmente.

La realizzazione del processo viene, ad esempio, ottenuta sommando un arbitrario numero di campioni, ognuno con numerosita' N , con N generato casualmente, ed ognuno prelevato da una curva di distribuzione cumulata di cui e' nota la media, anch'essa generata casualmente. Se N e' distribuito geometricamente, il processo e' markoviano e si ottiene la stessa funzione di autocorrelazione dell'ARMA(1,1).

Sostanzialmente il modello non presenta vantaggi rispetto alle tecniche ARMA, per cui il suo valore resta prevalentemente dimostrativo.

A 1.1.2. modelli non ARMA dei deflussi mensili

La classe di modelli di maggior successo in ambito non ARMA per la generazione dei deflussi stagionali e' quella dei modelli di DISAGGREGAZIONE.

L'intento sostanziale in questi modelli e' di riprodurre deflussi stagionali a partire da un modello di generazione di deflussi annui, attraverso la conservazione dei primi due momenti della serie dei deflussi stagionali osservati.

Questo approccio era contenuto in embrione nel modello di HARMS & CAMPBELL [1967], nel quale il meccanismo con cui si tenta di inglobare i caratteri di persistenza a lungo termine nei modelli di generazione stagionale consiste nel rispetto della "proprietà aggregativa".

Generata infatti la serie annua A_j , con un modello a piacere, e quella mensile $m_{j,i}$ con il modello Thomas-Fiering, la serie mensile corretta viene calcolata con l'operazione :

$$M_j = m_j \left(\sum_{i=1}^{12} m_{j,i} \right)^{-1} A_j$$

Il primo vero modello di disaggregazione e' dovuto a VALENCIA & SHAAKE [1973], che ricavano la serie dei deflussi stagionali sintetici attraverso la relazione:

$$Y_t = A X_t + W_t$$

dove:

N = numero di stagioni nell'anno:

$Y_t(N,1)$ = vettore di valori stagionali a media zero

$X_t(1,1)$ = valore di deflusso annuo della serie generata a media zero

$W_t(N,1)$ = vettore di variabili casuali a media zero, incorrelate con X_t

$A(N,1)$ = matrice di parametri da stimare

La matrice A ed il vettore W_t sono calcolati in modo che il vettore Y_t conservi le medie e le varianze stagionali della serie storica, l'autocovarianza della serie storica e la covarianza tra essa e gli elementi di X_t .

Per conservare la correlazione extra annuale, cioè quella tra la prima stagione di un anno e l'ultima dell'anno precedente, non contemplata nel modello precedente, MEJIA & ROUSSELLE [1976] hanno proposto un modello esteso:

$$Y_t = A X_t + W_t + C Z$$

dove Z contiene un numero a piacere di dati relativi alle stagioni dell'anno precedente.

E' possibile anche conservare l'asimmetria delle stagioni, con un procedimento proposto da TODINI [1979].

LANE [1979] propone, poi, un modello non vettoriale, nell'intento di diminuire il numero di parametri rispetto allo schema Mejia & Rousselle:

$$Y_\tau = A_\tau X + B_\tau \epsilon + C_\tau Y_{\tau-1}$$

L'indice τ denota la stagione corrente ed implica il set di parametri A_τ , B_τ , C_τ , mentre X e' il valore del deflusso annuo per l'anno in corso ed ϵ e' un white noise (processo casuale indipendente, a media zero e varianza unitaria, in generale Gaussiano). In questo modello non e' garantito il rispetto della proprieta' aggregativa, nel senso che non c'e' un vincolo per far si' che la somma dei valori stagionali uguagli il valore annuo da cui discendono.

LANE [1979] propone anche un modello di disaggregazione SPAZIALE, che consente di sostituire un approccio multivariato nei casi in cui si vogliano generare serie sintetiche in sezioni ('substations') che sottendono sottobacini di un bacino piu' importante, a sua volta sotteso da una sezione con stazione di misura affidabile ('KEY station').

Il modello prende la forma (ad es. su base temporale annua):

$$Y = A X + B \epsilon + C Z$$

con:

Y = valori da generare per le sottostazioni

X = valori misurati per le KEY stations

Z = valori precedenti nelle sottostazioni

Sottostazioni possono essere anche le confluenze, dove in assenza di stazioni di misura si possa pensare di conoscere almeno la media dei deflussi.

Contributi piu' recenti, soprattutto in tema di disaggregazione spaziale si sono avuti da STEDINGER et al.[1985], GRYGIER & STEDINGER [1988].

A parte l'alto numero di parametri da stimare e la loro possibile inconsistenza [si veda SALAS et al.,1980], la sostanziale obiezione da porre alla classe dei modelli disaggregativi e' che la conservazione dei momenti non significa riproduzione delle caratteristiche stocastiche delle serie stagionali. Alla disaggregazione spaziale si puo' obiettare invece la rozzezza dell'approccio di regionalizzazione dell'informazione, che, in generale, andrebbe fatto basando fisicamente o concettualmente i modelli.

Tra le metodologie stagionali non ARMA e sicuramente non convenzionali, vi e' quella proposta da PANU & UNNY [1980], basata sulla individuazione di 'gruppi' di deflussi, cioe' di blocchi di dati e la loro caratterizzazione (PATTERN RECOGNITION).

A 2.1 LA COSTRUZIONE DEI MODELLI ARMA

Le fasi della costruzione di un modello ARMA sono (ci si basa ancora su PICCOLO & VITALE, 1984):

- ANALISI PRELIMINARE
- IDENTIFICAZIONE DEL DEL MODELLO
- STIMA DEI PARAMETRI
- VERIFICA DEL MODELLO

a) Analisi preliminare

In questa fase si verificano principalmente le seguenti condizioni :

- i. assenza di valori anomali (outliers)
- ii. distribuzione Normale del processo Z_t
- iii. stazionarieta' di media, varianza e covarianza

Nel caso delle variabili idrologiche, il punto i. consiste principalmente nella verifica di attendibilita' di valori eccezionalmente alti o bassi, che, per la natura dei fenomeni in indagine, sono sempre possibili.

Per quanto riguarda il punto ii., la verifica tende a stabilire se il diagramma delle frequenze assolute del processo e' simmetrico ed unimodale, condizione di per se' sufficiente a garantire la robustezza della procedura Box-Jenkins.

In merito al terzo punto, vedremo a parte le tecniche che consentono di eliminare la non stazionarieta', che per le serie idrologiche e' principalmente legata alla periodicita' in media e varianza. Si puo', poi, verificare la presenza di non stazionarieta' in covarianza considerando la serie storica come un processo multivariato (per esempio, nel caso di una serie mensile, il modello sara' composto da 12 variabili) ed esaminando l'andamento delle covarianze mese-mese: $cov(x_\tau, x_{\tau-1})$, dove con x_τ si intende la serie dei dati appartenenti tutti al mese τ (si veda per es. SALAS et al. 1980). Per la rimozione di questo effetto, sono stati allo stesso modo proposti modelli multivariati, sia di tipo autoregressivo che ARMA, come vedremo in seguito.

b) Identificazione del modello

E' la fase piu' soggettiva e controversa della proposta metodologica di Box-Jenkins, perche' la decisione sul tipo di modello da adottare va presa esaminando l'andamento di funzioni matematiche, basate su stime campionarie soggette a grande variabilita', soprattutto in dipendenza della numerosita' dei dati. Ampio risalto alle procedure di identificazione dei modelli e' dato, per esempio nei lavori di HIPEL et al.[1977] e MCLEOD et al.[1978]. I criteri che possono essere adottati per l'identificazione si possono dividere in due gruppi:

I. Criteri basati su indicatori "sintetici" ed "obiettivi" del modello.

Lo scopo e' quello di arrivare alla selezione automatica del modello piu' efficiente in base alla minimizzazione di indici che tengono conto, per esempio, della varianza dei residui e del numero dei parametri. Tra essi ricordiamo l'AIC ((Akaike Information Criterion) ed il BIC (Bayesian Information Criterion), adoperabili anche con modelli a parametri periodici (si veda NOAKES et al. 1985).

II. Criteri basati sulle "trasformate" della funzione di autorrelazione globale.

Per ampliare la decifrabilita' statistica dei processi e migliorare lo schema identificativo proposto da Box & Jenkins (basato sull'analisi della funzione di autocorrelazione globale e parziale), sono state proposte altre "trasformate" della funzione di autocorrelazione: autocorrelazione inversa globale ed inversa parziale. Di queste funzioni le proprieta' statistiche non sono pero' evidenti, ne' semplici da determinare, per cui il loro uso non ha tutto sommato sostituito la procedura suggerita da Box & Jenkins, basata sulla "lettura" delle curve $\rho(K)$ di autocorrelazione globale e $\pi(K)$ di autocorrelazione parziale, di

cui riportiamo la tabella interpretativa [cfr. BOX & JENKINS, 1976].

processo stocastico stazionario ed invertibile	Funzioni di autocorrelazione	
	Globale($\rho[k]$)	Parziale($\pi[k]$)
AR(p)	non si annulla mai ma decade verso lo zero	e' nulla per $k > p$
MA(q)	e' nulla per $k > q$	non si annulla mai ma decade verso lo zero
ARMA(p,q)	non si annulla mai ma decade verso lo zero per i lags $k > p - q$	non si annulla mai ma decade verso lo zero per i lags $k > q - p$

Il controllo sulla significativita' dei valori di $\rho(K)$ e di $\pi(K)$ puo' essere condotto costruendo le bande approssimate di confidenza, al 95% di probabilita', di ampiezza pari a $\pm 2/\sqrt{N}$, con N =numerosità del campione. Per modelli ARMA di ordine elevato, la difficolta' di riprodurre ed interpretare le funzioni di autocorrelazione, rendono preferibile una procedura iterativa di identificazione, dove il modello piu' efficiente viene selezionato attraverso l'analisi dei residui, a partire dai modelli di ordine piu' basso.

c) Stima dei parametri

Il metodo di stima ottimale per i modelli lineari e' quello della massima verosimiglianza, i cui stimatori hanno proprieta' statistiche ben definite. Dato che l'algoritmo di stima consiste nella massimizzazione di una funzione di piu' variabili, sono necessarie stime iniziali dei parametri, che devono essere fatte con la dovuta attenzione .

Le stime iniziali dei parametri autoregressivi si ottengono dalle equazioni di Yule-Walker (si veda PICCOLO & VITALE 1984) che legano le autocorrelazioni a vari lag (ritardi) con i parametri dei diversi ordini. Per i parametri media mobile con ordine superiore al primo, le stime iniziali sono da ottenersi per via iterativa, operazione in genere condotta nell'ambito dei pacchetti software per l'analisi delle serie storiche.

La stima vera e propria dei parametri presenta da una parte la difficoltà del calcolo della funzione di verosimiglianza (che avviene per via iterativa, data la non linearità dei parametri MA) e dall'altra si concretizza in un algoritmo di ottimizzazione non lineare per la ricerca del massimo di una funzione di più variabili (in genere si adopera l'algoritmo di Marquardt o sue modificazioni).

Una stima equivalente a quella di massima verosimiglianza, quando i residui hanno distribuzione gaussiana, si ottiene dalla minimizzazione della somma dei quadrati dei residui [BOX & JENKINS, 1976], che è più semplice da calcolare rispetto alla funzione di verosimiglianza. Questa procedura è in generale più robusta rispetto a modelli mal condizionati, con parametri ridondanti o distribuzioni marginali non simmetriche.

I metodi fin qui citati sono di tipo "parametrico". Ci sono inoltre dei metodi di stima più semplici, anche se meno precisi, come quello basato sulla equivalenza dei momenti tra modello e campione osservato (Metodo dei Momenti) e vengono per lo più adoperati per le stime iniziali dei parametri all'interno degli algoritmi descritti in precedenza.

d) Verifica del modello.

SALAS et al [1980] individuano tre classi di verifiche possibili per il controllo dell'adeguatezza del modello:

(i) Indipendenza dei residui (e Normalità)

Si considera il modello come un filtro lineare che deve trasformare la serie storica in una serie di residui complementemente indipendenti. Ci sono diversi tipi di test cosiddetti "di bianchezza": un primo gruppo è quello cosiddetto dai "test globali" o "PorteManteau test", tra i quali i più noti sono quelli di BOX-PIERCE e quello, più affidabile, di LJUNG-BOX, che consistono nel calcolo di una statistica QM, funzione delle autocorrelazioni dei residui fino al lag M, e la verifica che QM superi il valore del chi-quadrato con $g=M-(p+q+1)$ gradi di libertà, con g non inferiore a 15.

Un secondo gruppo riguarda i test basati sulla costruzione delle curve di opportune statistiche di "dipendenza" dei residui e

delle relative bande di confidenza. Il test piu' adoperato di questo gruppo e' quello sull'autocorrelazione dei residui. Rispetto all'ipotesi $\rho(k)=0$ per ogni k , le bande di confidenza possono essere quelle di ANDERSON [SALAS et al, 1980] che ,con livello di significativita' $\alpha=5\%$, danno:

$$rk = \frac{-1 \pm 1,96 \sqrt{(N-K+1)}}{N-K}$$

oppure quelle approssimate, basate sull'ipotesi BOX-PIERCE [PICCOLO & VITALE 1984], che con lo stesso α danno: $rk = \pm 2/\sqrt{N}$

Altri test di questo gruppo sono quelli sul Periodogramma Integrato (si veda, per es. Salas et al,1980, pag.90] - e sulla distanza tra la densita' spettrale del residuo e quella del WN (si veda per es.Battaglia, 1986).

(ii) Sovraparametrizzazione (overfitting).

Il controllo sulla significativita' di parametri eventualmente ridondanti si puo' fare in due modi:

- Test T student sulla significativita' del parametro.

Dalla matrice di varianza e covarianze dei parametri stimati si calcola l'errore standard dei parametri. Il rapporto tra il valore del parametro ed il suo errore standard si ritiene approssimato da una distribuzione T-student, che nei casi pratici si approssima ad una distribuzione Normale e che da', a sua volta, per $\alpha=5\%$ un valore di livello di accettazione pari a 2 . In generale, quindi, un rapporto (valore del parametro)/(errore standard del parametro) molto minore di 2 da' una chiara indicazione sulla non significativita' del parametro stesso (differenza non significativa dal valore zero).

- Test sull'osservazione della varianza corretta dei residui.

La varianza dei residui puo' essere corretta per tener conto dell'aumento dei gradi di liberta' dovuto ai parametri aggiuntivi. Adoperando l'espressione $\sigma_{\epsilon}^2 = (\sum \epsilon_i^2)/(N-1)$ per la varianza ordinaria, la varianza corretta: $\sigma_{\epsilon C}^2 = (\sum \epsilon_i^2)/(N-p-q)$ coincide con essa quando c'e' un solo parametro nel modello.

Il crescere della varianza corretta dei residui all'aumentare del numero dei parametri del modello e' indice di sovrapparametrizzazione. Poiche' minore e' la varianza dei residui, maggiore e' la varianza spiegata dal modello, il calcolo della $\sigma_{\epsilon C}$

da' un indice piuttosto significativo di efficienza del modello ed e' quello che in genere si adopera per selezionare un modello anche tra classi diverse.

(iii) Test sulla parsimonia dei parametri.

La scelta tra modelli di ordine diverso ed ugualmente efficienti va fatta in genere tendendo ad impiegare il minor numero possibile di parametri (parsimonia). Uno dei criteri per operare questa scelta e' l'osservazione dell'andamento della varianza corretta dei residui; in alternativa si possono ancora adoperare i test automatici di selezione del modello (AIC, BIC), che pero' hanno la tendenza a sovrapparametrizzare [PICCOLO, VITALE, 1984].

Oltre alle classi di test che abbiamo visto, il cui scopo e' la verifica della capacita' "descrittiva" o "esplicativa" del modello rispetto alla struttura della serie temporale, esistono tecniche il cui scopo e' controllare il comportamento del modello rispetto ad un uso particolare o rispetto alle condizioni di stima.

Come esempio di controllo del modello rispetto all'impiego che se ne fa, si puo' citare il calcolo dell' "Errore Standard sulla Previsione" [si veda per es. NOAKES et al, 1985] che e' la piu' semplice e classica delle verifiche comparate di capacita' previsiva tra diversi modelli.

Di norma, della serie temporale in studio, solo una parte viene adoperata per la stima dei parametri, mentre la parte restante fa da "serie test" per la previsione. La radice quadrata della somma dei quadrati degli scarti tra serie test e serie delle previsioni fatte col modello, costituisce l'errore standard (RMSE) della previsione.

Un esempio notevole di tecnica adoperata per verificare la "robustezza" del modello, cioe' la stabilita' delle stime rispetto al variare dei dati nel campione, e' il cosiddetto JACKKNIFING (si veda ad es. TICHELAAR & RUFF, 1989). Il Jackknifing e' una tecnica di "RICAMPIONAMENTO" che tende a valutare la "varianza del modello" attraverso la varianza dalle stime effettuate su sottoserie "mobili" della serie originaria, prelevate, cioe', facendo muovere di un posto alla volta il dato iniziale della sottoserie.

Il ricampionamento piu' semplice di una serie di N dati (con N pari) si ottiene estraendo le serie:

$\{x_1, \dots, x_{N/2}\}$, $\{x_2, \dots, x_{N/2+1}\}$, , $\{x_{n/2+1}, \dots, x_N\}$

Stime "robuste" saranno i valori medi o mediani dei parametri stimati sulle varie sottoserie.

A 2.2 LA TRASFORMAZIONE DEI DATI

Le variabili idrologiche sono generalmente caratterizzate da una spiccata asimmetria nella distribuzione di probabilita', questo perche' sono variabili che possono assumere solo valori positivi e che presentano in genere "code" piuttosto lunghe nella distribuzione (susseguirsi di valori sempre maggiori a sempre minore probabilita').

Anche nel caso dei deflussi, non ci si trova praticamente mai di fronte a processi gaussiani, attorno ai quali e' in genere sviluppata la modellistica statistica e soprattutto rispetto ai quali sono meglio note le proprieta' delle stime. In secondo luogo, quando ci si riferisce a variabili idrologiche, su base sub-annuale, gli effetti "stagionali" si traducono in eteroschedasticita' delle serie temporali, cioe' rendono la varianza non costante da stagione a stagione. La presenza di eteroschedasticita' nei dati rende meno efficienti le stime dei parametri dei modelli lineari, stime che rimangono tuttavia non distorte e consistenti [PICCOLO & VITALE, 1984]

La trasformazione dei dati idrologici tende a minimizzare gli effetti di queste due caratteristiche che limitano l'efficienza delle stime, "avvicinando" tra di loro i dati in misura non lineare, in genere con l'operazione (trasformata di Box & Cox):

$$X_t(L) = (X_t^L - 1)/L$$

con L tale, appunto, da dare asimmetria piu' vicina possibile allo zero e costanza della varianza.

Mentre dal punto di vista statistico non sembrano esserci dubbi sull'utilita' della trasformazione dei dati, in ambito idrologico i vantaggi che se ne hanno non sono sempre superiori agli svantaggi. Nell'analisi statistica delle serie storiche, in particolare, l'utilita' della trasformazione e' abbastanza controversa (si veda ad es. SALAS et al. ,1980, par. 3.2.3) e, d'altra parte, le modalita' operative possibili sono numerose. In particolare, esistono diverse formulazioni della funzione mediante la quale si effettua il cambiamento di variabile e svariati metodi che consentono di individuare l'indice L ottimale. A tale proposito si vedano SALAS et al. [1980], PICCOLO & VITALE [1984], HIPEL & MCLEOD [1978], ROSSI & SILVAGNI [1980], NOAKES et al. [1985].

La trasformazione dei dati delle serie dei deflussi porta degli inconvenienti non solo nella pura e semplice applicazione del modello statistico (si veda ad es. BATTAGLIA, 1986) ma, cio' che piu' conta nel nostro caso, rende estremamente difficile l'approccio concettuale al fenomeno. Se, infatti, si ipotizza un modello concettuale lineare dei deflussi, non sara' piu' lineare il modello corrispondente delle radici cubiche o dei logaritmi dei deflussi; a quel punto non ci sono piu' vantaggi a non applicare fin dall'inizio un modello non lineare, il che sposterebbe eccessivamente gli obiettivi dello studio.

Per questi motivi si e' ritenuto di operare sempre su dati non trasformati, accettando gli svantaggi nella fase di stima, a vantaggio, pero', della chiarezza interpretativa.

Cio' non esclude, tuttavia, l'impiego delle trasformazioni sulla variabile Input Netto, nella fase terminale della metodologia proposta, con l'obiettivo, per l'appunto, di stabilizzare la varianza all'interno dell'anno ed avvicinare a zero il valore dell'asimmetria. L'input netto, infatti, non presenta caratteristiche di dipendenza ed, in questa sede, non se ne indagano i legami, comunque di tipo non lineare, con l'afflusso totale.

A 2.3 ANALISI DELLA PERIODICITA' DEI PARAMETRI NELLE SERIE TEMPORALI

Per una trattazione esauriente di questo aspetto caratteristico delle serie temporali di tipo geofisico, ed idrologico in particolare, si rimanda ai piu' volte citati testi di analisi statistica delle serie storiche (per es. PICCOLO & VITALE, 1984) e di analisi delle serie idrologiche (SALAS et al., 1980), data la diversita' degli approcci possibili al problema e l'importanza dei fattori idrologici ai fini operativi. Si puo' dire, in generale, che, dal punto di vista statistico, il comportamento prevalente nei riguardi degli aspetti stagionali (in termini di media e varianza, soprattutto) delle serie temporali e' quello della "rimozione" dell'effetto periodico ("effetto", si noti, e non "causa"). Valga per tutte, come esempio, l'applicazione condotta da Battaglia [1986].

La rimozione delle caratteristiche periodiche delle serie storiche (le piu' evidenti sono le ciclicita' nella media e nello scarto, oppure autocorrelazione di valore elevato a ritardo pari al periodo, oppure picco di densita' spettrale alla frequenza $2\pi/[\text{periodo in intervalli}]$) viene detta destagionalizzazione

La piu' semplice delle tecniche di destagionalizzazione (tra le quali citiamo il filtraggio alle differenze prime, alle differenze di ordine pari al periodo, o alle medie mobili a numero variabile di termini) e' quella con la quale si sottrae ad ogni dato $X_{t,s}$ la media relativa alla stagione s :

$$Z_{t,s} = X_{t,s} - \mu_s$$

Se la variabile $Z_{t,s}$ viene divisa per lo scarto σ_s , si parla di standardizzazione della serie.

Queste trasformazioni consentono di ottenere delle serie temporali stazionarie, sulle quali si ha la migliore qualita' delle stime dei parametri dei modelli lineari .

L'uso di queste procedure, tuttavia, oltre ad introdurre talvolta nelle serie storiche caratteristiche non presenti originariamente (si veda YEVJEVICH & HARMANCIOGLU, 1989), causa la rimozione di caratteristiche anche non di natura stagionale.

Volendo esemplificare questo secondo "effetto collaterale" della destagionalizzazione ci si puo' riferire alle serie dei deflussi mensili ed al contributo della falda "stagionale" che si

individua in essi . L'apporto di questa falda e' variabile all'interno dell'anno, risultando sempre alto nella stagione piovosa e praticamente nullo nella stagione secca, come si puo' osservare direttamente. Le caratteristiche di questa falda intesa come invaso, variano si' a seconda del volume immagazzinato ma certamente il suo contributo varia da mese a mese principalmente a causa delle variazioni negli apporti che riceve in termini di afflusso netto, il quale a sua volta presenta caratteristiche spiccate di periodicit . Una destagionalizzazione della serie dell'afflusso mensile finisce per rimuovere anche l'effetto di regolarizzazione esercitato sull'afflusso netto dalla falda stagionale, rendendola cosi' non identificabile con l'analisi statistica.

A 3.0 RIEPILOGO DELLE EQUAZIONI DEL BILANCIO DI MASSA PER L'INVASO LINEARE.

Le relazioni fondamentali dell'invaso lineare si riferiscono generalmente alle portate, mentre nel nostro caso interessano nei riguardi dei volumi. Per quanto concerne le portate, introdotte le grandezze:

p = portata in ingresso all'invaso.

q = portata in uscita

$dw = (p-q)dt$ (equazione di continuita')

K = costante d'invaso

W = volume immagazzinato nell'invaso

$q = W/K$ (equazione dell'invaso lineare)

la relazione tra portata entrante ed uscente (si veda ad es. MOISELLO [1986]) e':

$$q(t) = 1/K e^{-t/K} \int_0^t p(\tau) e^{\tau/K} d\tau + q_0 e^{-t/K} \quad (*)$$

dove q_0 e' la portata uscente all'inizio del periodo, cioe' a $t=0$ (condiz. iniziale).

Volendo calcolare il deflusso in uscita dall'invaso in un periodo di tempo unitario (intervallo $[0,1]$) bastera' integrare primo e secondo membro della relazione (*).

Generalizzazione dell'equazione del deflusso da invaso lineare

La portata in uscita da un invaso lineare e':

$$q(t) = 1/K e^{-t/K} \int_0^t p(\tau) e^{\tau/K} d\tau + q_0 e^{-t/K}$$

dove $P(\tau)$ e' l'ingresso (di dimensione (volume/tempo) = portata) mentre q_0 e' la portata in uscita al tempo 0.

In termini di volume in uscita (deflusso), si ha:

$$D(T) = \int_0^T 1/K e^{-t/K} \int_0^t p(\tau) e^{\tau/K} d\tau dt + \int_0^T q_0 e^{-t/K} dt$$

cioe'

$$D(T) = \int_0^T \frac{1}{K} e^{-t/K} \int_0^t p(\tau) e^{\tau/K} d\tau dt + Kq_0 [1 - e^{-T/K}]$$

per l'invaso lineare, Kq_0 e' appunto il volume V_0 inizialmente invasato, per cui l'equazione dell'esaurimento del volume proprio in termini di deflusso e':

$$D_0(T) = V_0 [1 - e^{-T/K}]$$

se riscriviamo la relazione nei termini

$$D_0(T) = c_K(T) V_0, \quad \text{sara' :}$$

$$c_K = e^{-T/K} = 1 - c_K = \text{coefficiente di esaurimento dell'invaso.}$$

In maniera analoga, quando ci si riferisce alla ricarica $P(\tau)$, si puo' parlare di deflusso dovuto alla sola ricarica e di coefficiente di esaurimento della ricarica: $r_K = 1 - f_K$.

Si puo' quindi scrivere l'espressione del deflusso da invaso come somma di un contributo dovuto al volume invasato all'inizio

del periodo e di un contributo dovuto alla ricarica:

$$D(t) = f_K(T) R(t) + c_K(T) V_0$$

dove la ricarica e':

$$R(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$$

Definiamo allora le grandezze:

$$DF = \int_0^1 q(t) dt \qquad R = \int_0^1 p(t) dt$$

$$f_K = \frac{\int_0^1 \frac{1}{K} e^{-t/K} \int_0^t p(\tau) e^{\tau/K} d\tau dt}{\int_0^1 p(t) dt}$$

ed il deflusso di falda nell'intervallo (0,1) diventa:

$$DF = R f_K + \int_0^1 q_0 e^{-t/K} dt$$

quindi:

$$DF = R f_K + Kq_0[1-e^{-1/K}]$$

Adottando la convenzione di chiamare con V_{t-1} il volume immagazzinato in falda all'inizio dell'intervallo t (di durata qualsiasi, e di durata 1 nel nostro caso) e tenendo presente che $V_0 = Kq_0$ e quindi $V_{t-1} = Kq_0$, abbiamo, per il generico intervallo t :

$$DF_t = V_{t-1}(1-e^{-1/K}) + R_t f_K$$

Il primo termine del secondo membro rappresenta l'esaurimento del volume di falda in assenza di ricarica (motivo per cui $c_K(=1-e^{-1/K})$ e' definito fattore di esaurimento del volume d'invaso profondo).

Il secondo termine rappresenta invece l'esaurimento del volume di ricarica ed f_K e' detto fattore di esaurimento del volume di ricarica. La grandezza f_K dipende dalle caratteristiche dell'invaso (dalla costante d'invaso) e dalla forma della legge $p(t)$; ha poi espressione funzionale nel caso in cui $p(t)$ si assume di forma semplice.

A 3.1 CONTROLLO DI IDENTITA' DELLE MEDIE DEI MODELLI CONCETTUALE E STOCASTICO DEI DEFLUSSI ANNUI

a. modello concettuale

Nel caso di dati originari (non sottratti della media), si ha:

$$D_t - c_K D_{t-1} = (1 - ar_K) I_t - (c_K - ar_K) I_{t-1}$$

ponendo $\alpha = ar_K$, $I_t = c + e_t$, $M = c_K - ar_K$, $\theta = M / (1 - \alpha)$ effettuando l'operazione di media sul primo e secondo membro si ottiene:

$$\mu(D_t)(1 - c_K) = \mu(I_t)(1 - \alpha)[1 - \theta]$$

dev'essere perciò:

$$\mu(D_t) = \mu(I_t)(1 - \alpha) \frac{[1 - \theta]}{[1 - c_K]}$$

essendo $c_K = e^{-1/K} = \phi$, l'uguaglianza delle medie di D ed I presuppone

$$(1 - \alpha) \frac{[1 - \theta]}{[1 - \phi]} = 1$$

che corrisponde all'espressione con la quale si ricava α dai parametri del modello statistico, per cui e' automaticamente soddisfatta.

b. modello stocastico

Nel caso di dati originari (non sottratti della media), si ha:

$$D_t [1 - B\phi] = (\epsilon_t + c) [1 - B\theta]$$

effettuando le operazioni di media, tenendo presente che $E[\epsilon_t]=0$, risulta:

$$c = \mu(D_t) \frac{[1-\phi]}{[1-\theta]}$$

per avere identita' tra questa relazione e quella del modello concettuale, poiche' vale:

$$\frac{[1-\phi]}{[1-\theta]} = (1-\alpha)$$

dev'essere, detta $\mu=\mu(D_t)$ la media generale della serie:

$$c = \mu (1-\alpha)$$

il che significa che il coefficiente c che si stima col modello ARMA(1,1) nella forma sopra riportata non e' la media generale della serie. In altri termini, l'applicazione della corrispondenza modello concettuale-modello stocastico nei parametri, non puo' avvenire sulle serie non sottratte nella media perche' si altererebbe la media del secondo membro.

c. modello concettuale (serie a media zero)

poniamo μ =media generale della serie

$$(D_t - \mu) - c_K (D_{t-1} - \mu) = (1 - ar_K) (I_t - \mu) - (c_K - ar_K) (I_{t-1} - \mu)$$

confermando il significato dato in a. ad α e θ :

$$D_t - c_K D_{t-1} = (1 - ar_K) I_t - (c_K - ar_K) I_{t-1} + \mu [1 - c_K - (1 - \alpha)(1 - \theta)]$$

$$\mu(D_t) (1 - c_K) - \mu(I_t) (1 - \alpha)(1 - \theta) = \mu [1 - c_K - (1 - \alpha)(1 - \theta)]$$

l'espressione e' una identita' nell'ipotesi che la media dell'input eguagli quella del deflusso.

d. modello stocastico (serie a media zero)

$$(D_t - \mu) [1 - B\Phi] = \epsilon_t [1 - B\Theta]$$

effettuando l'operazione di media si ha ($E[\epsilon_t] = 0$):

$$[\mu(D_t) - \mu] [1 - \Phi] = 0$$

A 3.2 CAMPO DI ESISTENZA DEI PARAMETRI DEL MODELLO STOCASTICO DEI DEFLUSSI ANNUI

Per il significato concettuale che hanno, i parametri a e K non possono assumere valori negativi ed a deve essere inferiore ad 1. Queste condizioni portano a limitare il campo di variazione dei parametri stocastici

La condizione $K > 0$ (K espresso in anni) porta ad imporre:

$$0 < \phi < 1$$

essendo, inoltre $0 \leq a \leq 1$ e $0 \leq r_K \leq 1$ si ha:

$$0 \leq ar_K \leq 1$$

$$\text{e quindi } r_K a \geq 0 \Rightarrow \phi \geq \theta$$

$$r_K a \leq 1 \Rightarrow \phi \leq 1$$

condizione, quest'ultima, di stazionarieta' del modello ARMA(1,1) e quindi da garantire in ogni caso. Dall'espressione di θ , si puo' notare che esso e' positivo solo quando $\phi > ar_K$.

Lo spazio dei parametri, delimitato dalle condizioni:

$$0 < \phi < 1 \quad ; \quad \phi \geq \theta$$

e' indicato in figura A 3.1.

Va evidenziata la circostanza che la regione ammissibile per i parametri ϕ e θ si identifica con la zona nella quale la curva di autocorrelazione decade lentamente verso lo zero (il decadimento e' piu' lento nel triangolo superiore, che corrisponde alla condizione $\theta > 0$). Ritroviamo cosi', anche se in senso piu' lato, il risultato di O'CONNELL [1971] i cui esperimenti di simulazione avevano mostrato che l'effetto Hurst e' preservato dal modello ARMA(1,1) quando vale $\phi > \theta > 0$.

Mentre non e' possibile definire la necessarieta' della condizione $\theta > 0$ dal punto di vista concettuale, essa si ritrova (come si vedra' nel cap.7) nelle stime effettuate.

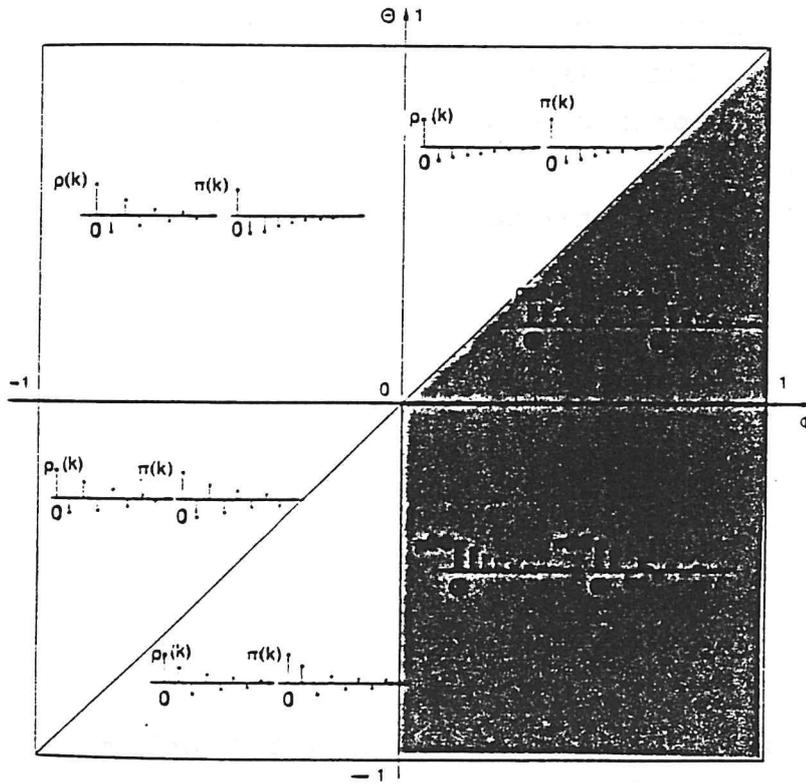


figura A 3.1 Regione di significativita' dei parametri ϕ e θ del modello stocastico dei deflussi annui

A 3.3 DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI ESAURIMENTO DELLA RICARICA CON VARIE IPOTESI SULLA DISTRIBUZIONE DELL'INPUT

1. ricarica uniformemente distribuita tra (1-T) ed 1

Definito $r = R/T = p(\tau)$, f_K ha l'espressione:

$$f_K(T) = \frac{1}{R} \int_0^T \frac{1}{K} e^{-t/K} \int_0^t r e^{\tau/K} d\tau dt$$

cioe'

$$f_K(T) = \frac{1}{R} \int_0^T \frac{1}{K} e^{-t/K} r K (e^{t/K} - 1) dt$$

$$f_K(T) = \frac{1}{R} \int_0^T r (1 - e^{-t/K}) dt$$

poiche' $r = R/T$ si ha:

$$f_K(T) = \frac{1}{R} \int_0^T R/T dt - \int_0^T R/T e^{-t/K} dt$$

$$f_K(T) = \frac{1}{R} \{ R - [RK/T (1 - e^{-t/K})] \}$$

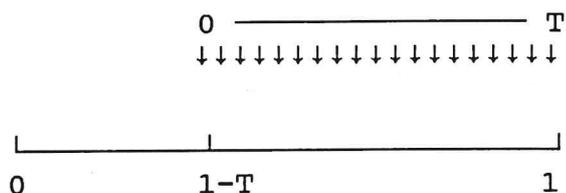
cioe':

$$f_K(T) = 1 - K/T (1 - e^{-T/K})$$

che da' luogo a:

$r_K(T) (= 1 - f_K(T)) = K/T (1 - e^{-T/K})$
--

Lo schema corrispondente e'



Nel caso particolare di ricarica uniforme in tutto il periodo $[0,1]$, che corrisponde a porre $T=1$, si ha:

$$f_K = 1 - K (1 - e^{-1/K})$$

per cui:

$$r_K = K (1 - e^{-1/K})$$

mentre, nel caso in cui si ponga $T=0$, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} K/T (1 - e^{-T/K}) = \frac{0}{0}$$

per cui, passando al limite della derivata, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-T/K} / K}{1/K} = 1$$

Vale perciò':

$$T \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f_K(T) \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad r_K(T) \rightarrow 1$$

2. ricarica concentrata all'istante T compreso tra 0 ed 1

Questo ingresso corrisponde ad una funzione impulsiva di area R, precisamente:

$$q(\tau) = \delta(\tau - T)$$

dove δ e' la funzione di Dirac, per la quale e':

$$\delta(t < T) = \delta(t > T) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - T) dt = 1$$

Quindi, la portata conseguente ad un ingresso di questo tipo non e' altro che l'Idrogramma Unitario Istantaneo dell'invaso, corretto con un ritardo T sull'impulso.

$$q(t) = \frac{1}{K} e^{-t/K} \int_0^t R \delta(\tau - T) e^{\tau/K} d\tau$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq T \\ R/K e^{-(t-T)/K} & \text{se } t > T \end{cases}$$

Passando all'integrazione sul periodo [0,1] ci si limita all'intervallo [T,1] sul quale $q(t)$ e' diverso da zero, abbiamo:

$$f_K(T) = \frac{1}{R} \int_T^1 1/K e^{-(t-T)/K} dt$$

$$f_K(T) = 1 - e^{-(1-T)/K}$$

per cui:

$$r_K = e^{-(1-T)/K}$$

3. valori limite del coefficiente di esaurimento della ricarica

Con lo schema appena descritto e' possibile vedere a quali effetti in termini di coefficiente r_K portano ipotesi estreme sulla distribuzione della ricarica, e viceversa.

i. ricarica concentrata all'inizio del periodo ($T=0$).

$$r_K(0) = e^{-(1-0)/K} = e^{-1/K} = c_K = \text{coefficiente di esaurimento dell'invaso}$$

(si ha con K molto piccolo)

Quindi $r_K \rightarrow 0 \Rightarrow$ massimo contributo della ricarica al deflusso e minimo incremento del volume invasato.

ii. ricarica concentrata alla fine del periodo ($T=1$)

$$r_K(1) = e^{-(1-1)/K} = 1$$

Cio' significa che tutto l'input rimane ricarica della falda, cioe' non c'e' contributo al deflusso, e quindi:

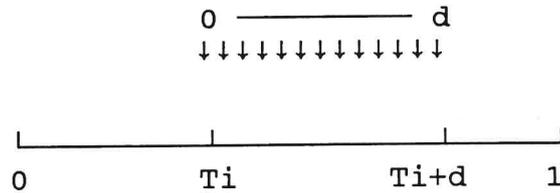
$$r_K \rightarrow 1 \Rightarrow \text{minimo contributo della ricarica al deflusso e massimo incremento del volume invasato .}$$

(si ha con K molto grande)

4. ricarica uniformemente distribuita in un periodo di durata d

Per questa ipotesi si ha: $r = R/rd$, con $0 < d < 1$

Lo schema corrispondente e'



Il calcolo puo' condursi spezzando l'integrale tra 0 ed 1 in tre termini; in particolare ci si riconduce al caso 1 ma con durata inferiore all'intervallo $[T,1]$.

Si puo' verificare facilmente che il volume di ricarica defluito al tra 0 e $Ti+d$ e' pari a:

$$R \left\{ 1 - \left[\frac{K}{d} (1 - e^{-d/K}) \right] \right\}$$

in analogia con lo schema 1 di alimentazione.

Il volume di ricarica non defluito e' quindi :

$$R \left\{ 1 - 1 - \left[\frac{K}{d} (1 - e^{-d/K}) \right] \right\}$$

cioe':

$$RK/d (1 - e^{-d/K})$$

Questo volume e' soggetto ad esaurimento esponenziale per la durata $(1 - Ti - d)$, per cui la parte che si trasforma in deflusso e' pari a :

$$\int_0^{1 - Ti - d} \frac{R}{K} \left(\frac{K}{d} (1 - e^{-d/K}) \right) e^{-td/K} dt$$

dalla cui integrazione risulta:

$$RK/d (1 - e^{-d/K}) (1 - e^{-(1-Ti-d)/K})$$

e corrisponde all'esaurimento del suddetto volume immesso istantaneamente al tempo $Ti+d$. Il volume totale defluito alla fine del periodo e' percio':

$$R [1 - K/d (1 - e^{-d/K}) + K/d (1 - e^{-d/K}) (1 - e^{-(1-Ti-d)/K})]$$

per cui vale, infine:

$$f_K(Ti,d) = \{ 1 - K/d (1 - e^{-d/K}) [1 - (1 - e^{-(1-Ti-d)/K})] \}$$

Essendo il termine sottrattivo inferiore a quello che si ha nel caso dello schema 1, il caso ora descritto porta ad un deflusso della ricarica superiore. Variando d e T fra 0 ed 1 ci si riconduce a tutti gli schemi descritti finora.

A 3.4 RICOSTRUZIONE DEL DEFLUSSO DI FALDA PROFONDA

Si mantiene la notazione impiegata nel cap. 3,, tranne a definire con DF_t il deflusso proveniente dalla falda profonda.

Equazioni del bilancio di massa dell'acquifero

$$DF_t = C_K V_{t-1} + I_t a f_K \quad (*)$$

$$V_t = V_{t-1} (1 - C_K) + I_t \cdot a (1 - f_K) \quad (**)$$

Dalla seconda equazione risulta:

$$V_{t-1} = \frac{V_t - I_t \cdot a (1 - f_K)}{(1 - C_K)}$$

per cui, sostituendo nella (*), si ha:

$$DF_t = \frac{C_K [V_t - I_t \cdot a (1 - f_K)]}{(1 - C_K)} + I_t a f_K$$

Al tempo $t-1$ vale quindi, eliminando il segno di frazione,

$$DF_{t-1} (1 - C_K) = C_K V_{t-1} - C_K I_{t-1} \cdot a + I_{t-1} a f_K$$

Essendo, d'altra parte:

$$C_K V_{t-1} = DF_t - I_t a f_K$$

si ha:

$$DF_{t-1} (1 - C_K) = DF_t - I_t a f_K + I_{t-1} a (f_K - C_K)$$

Risulta quindi una forma ARMA(1,1):

$$DF_t[1-B(1-C_K)] = I_t a f_K [1 - B (f_K - C_K)/f_K]$$

dove B , al solito, ha il significato di Backward coefficient.

A differenza di quanto visto per le forme ottenute per il modello concettuale del deflusso annuo totale, in questo caso il secondo parametro concettuale, a , non compare nell'espressione del parametro a secondo membro dell'espressione ottenuta. Ciononostante, a condizione di poter considerare la variabile $I_t a f_K$ come un white noise, si tratta ancora di una forma ARMA, in cui il parametro Media Mobile e' vincolato al parametro AR.

Per esprimere la dipendenza in senso deterministico di DF_t da DF_{t-1} e da valori noti di I_t e' piu' comoda la forma "Transfer Function":

$$DF_t = (1-C_K)DF_{t-1} + I_t a f_K - a I_{t-1} (f_K - C_K)$$

oppure, adoperando i coefficienti r_K e c_K :

$$DF_t = c_K DF_{t-1} + I_t a (1-r_K) + a I_{t-1} (r_K - c_K)$$

A 5.0 MODELLO ARMA(1,1) CONCETTUALMENTE BASATO A RESIDUO STRETTAMENTE STAZIONARIO PER I DEFLUSSI MENSILI

Il modello ARMA(1,1) a residuo pseudo periodico non e' l'unica struttura che consente di mantenere una stretta corrispondenza tra la rappresentazione concettuale e quella statistica anche se, come vedremo, e' quella che meglio sopporta la fase di stima.

E' possibile, infatti, costruirne un modello a residuo strettamente stazionario compatibile con la rappresentazione concettuale, esplicitando la struttura ipotizzata per il residuo (inteso come variabile proporzionale all'input netto).

Ponendo:

$$I_t^* = I_0 + \sum_{j=1}^6 [\alpha_j \cos(2\pi jt/12) + \beta_j \sin(2\pi jt/12)] + e_t$$

con e_t = residuo stazionario

Il modello ARMA(1,1) assumerebbe la forma:

$$[1-B\Phi]D_t^* = [1-B\Theta]e_t \Rightarrow$$

$$[1-B\Phi]D_t^* = (1-b^*r_q) \{ [1-B\Theta]I_0 + [1-B\Theta]e_t + \\ + [1-B\Theta] \sum_{j=1}^6 [\alpha_j \cos(2\pi jt/12) + \beta_j \sin(2\pi jt/12)] \}$$

Ponendo, allora:

$$C_0 = (I_0 - \Theta I_0)(1-b^*r_q)$$

$$C_j = (1-b^*r_q)\alpha_j\Theta$$

$$S_j = (1-b^*r_q)\beta_j\Theta$$

$$(1-B\Theta)e_t = \text{parte MA}$$

costruendo le serie deterministiche:

$$C_{jt} = \cos(2\pi jt/12)$$

$$S_{jt} = \sin(2\pi jt/12)$$

e tenendo presente che $BI_0 = I_0$, risulta :

$$[1-B\Phi]D_t^* = C_0 + [1-B\Theta]e_t + \\ + \alpha_1 C_t^1 - C_1 C_{t-1}^1 + \alpha_2 C_t^2 - C_2 C_{t-1}^2 + \dots + \beta_6 S_t^6 - S_6 S_{t-1}^6$$

Si ottiene perciò un modello di regressione multipla, con componenti AR ed MA con 27 parametri dei quali 12 (C_1, C_2, \dots, S_6) sono si' ridondanti, perche' proporzionali a $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_6)$ ma necessari alla equivalenza formale tra modello concettuale e statistico.

Le difficoltà di stima di questo modello dipendono non tanto dal numero dei parametri quanto dalla mancanza del requisito di incorrelazione tra le variabili. Infatti le serie deterministiche C_{jt} e $C_{j,t-1}$ sono praticamente uguali. Cio' implica che se X e' la matrice che ha per colonne tutte le variabili indipendenti, la matrice prodotto $X'X$ ha determinante molto vicino allo zero quando non c'e' indipendenza lineare tra le colonne di X . In questo caso, la matrice $X'X$ non e' invertibile ed il modello non e' stimabile (si veda, ad es., PICCOLO & VITALE, 1984).

Si potrebbe ancora pensare di sostituire l'espressione esatta del modello di regressione multipla con una approssimata, ponendo il modello nella forma :

$$(1-\Phi B)DD_t = C + (1-\Theta B)\epsilon_t + \alpha_1 C1_t + \alpha_2 C2_t + \dots + \beta_6 C6_t$$

escludendo le variabili C_{t-1} ed i relativi coefficienti. Tuttavia, non c'e' differenza sostanziale tra lo stimare i 12 coefficienti (che rappresentano in sostanza le medie mensili) prima della stima dell'ARMA o contemporaneamente ad esso. Cio' farebbe di fatto ricadere nell'applicazione del modello ARMA a parametri costanti sulla serie destagionalizzata, schema che si e' visto essere non adatto alla modellazione di serie mensili a causa degli effetti negativi della destagionalizzazione.

A.5.1 PROPRIETA' DEL MODELLO ARMA(2,2)

a. controllo di identita' delle medie per il modello concettuale e stocastico

Scriviamo il modello concettuale nella forma:

$$D_t[1-B(c_k + c_q)-B^2(-c_k c_q)] = I_t[M_0-BM_1-B^2M_2]$$

dove:

$$M_0 = (1 - ar_k - br_q)$$

$$M_1 = c_k + c_q - ar_k(1+c_q) - br_q(1+c_k)$$

$$M_2 = ar_k c_q + br_q c_k - c_k c_q$$

mentre c_k, c_q, a e b sono i parametri concettuali, e r_k ed r_q dipendono da c_k, c_q e dall'ipotesi sulla distribuzione dell'input nel mese, che si e' stabilito essere uniforme.

Ammettendo che l'input abbia struttura:

$$I_t = f(\tau, t) + \epsilon_t$$

con, ad esempio, $f(\tau, t) = \mu_\tau$ per $t=\tau$, mentre $\mu(\epsilon_t)=0$, si ha:

$$D_t[1-B(c_k + c_q)-B^2(-c_k c_q)] = f(\tau, t)[M_0-BM_1-B^2M_2] + \epsilon_t[M_0-BM_1-B^2M_2]$$

Dall'operazione di media risulta quindi:

$$E[D_t][1-(c_k + c_q)-(-c_k c_q)] = E[f(\tau, t)][M_0-M_1-M_2]$$

per cui la media della variabile D_t risulta essere:

$$E[D_t] = E[f(\tau, t)] \frac{[M_0-M_1-M_2]}{[1-(c_k + c_q)-(-c_k c_q)]}$$

$E[f(\tau, t)]$ e' la media dell'input, che, per definizione, deve essere uguale a quella del deflusso, per cui deve aversi:

$$\frac{[M_0 - M_1 - M_2]}{[1 - (c_k + c_q) - (-c_k c_q)]} = 1 \quad (+)$$

Poiche' dalle espressioni dei parametri stocastici da quelli concettuali fornite nel cap.5, risulta:

$$\frac{[M_0 - M_1 - M_2]}{[1 - (c_k + c_q) - (-c_k c_q)]} = \frac{M_0 [1 - \theta_1 - \theta_2]}{[1 - \phi_1 - \phi_2]}$$

mentre e' $M_0 = (1 - ar_k - br_q)$, l'espressione (+) prende la forma :

$$(1 - ar_k - br_q) = \frac{[1 - \phi_1 - \phi_2]}{[1 - \theta_1 - \theta_2]}$$

cioe' :

$$ar_k + br_q = 1 - \frac{[1 - \phi_1 - \phi_2]}{[1 - \theta_1 - \theta_2]}$$

Questa e' l'espressione a partire dalla quale si calcolano ar_k e br_q , ragion per cui e' assicurato il rispetto della (+) nel modello concettuale. Per inciso, $ar_k + br_q$ e' la ricarica effettiva percentuale, cioe' la parte di input che non e' defluita alla fine del periodo.

Adoperando per il modello stocastico la forma analoga a quella scritta per il modello concettuale:

$$D_t [1 - B\phi_1 - B^2\phi_2] = e_t [1 - B\theta_1 - B^2\theta_2]$$

avremmo invece la non equivalenza delle due medie, perche' non ci sono condizioni che assicurino il rispetto della relazione (+). Va quindi adoperata la forma :

$$(D_t - \mu) [1 - B\phi_1 - B^2\phi_2] = \epsilon_t [1 - B\theta_1 - B^2\theta_2], \quad \text{con } E[\epsilon_t] = 0$$

per la quale e' implicita (appendice A 3.1) l'equivalenza delle medie.

b. espressioni di c_q e c_k in funzione di ϕ_1 e ϕ_2 del modello ARMA(2,2)

La forma ARMA ottenuta a partire dalle equazioni di bilancio di massa per il processo dei deflussi mensili e' condizionata, per quanto riguarda i coefficienti della parte AR, al rispetto delle relazioni:

$$\phi_1 = c_q + c_k \qquad \phi_2 = -c_q c_k$$

Ottenuti quindi ϕ_1 e ϕ_2 dalla stima, c_q e c_k possono essere calcolati tenendo presente la regola algebrica:

$$x^2 - bx + c = 0 \quad ; \quad b = x_1 + x_2 \quad ; \quad c = x_1 x_2$$

dove, nel nostro caso si ha $b = \phi_1$ $c = -\phi_2$

c_q e c_k sono quindi le radici dell'equazione algebrica di 2° grado cosi' introdotta. Poiche' per definizione e' $c_q < c_k$ si ha:

$$c_q = \frac{\phi_1 - \sqrt{(\phi_1)^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$$c_k = \frac{\phi_1 + \sqrt{(\phi_1)^2 + 4\phi_2}}{2}$$

A.5.2 CAMPO DI ESISTENZA DEI PARAMETRI AUTOREGRESSIVI DEL MODELLO
ARMA(2,2) A BASE CONCETTUALE

L'efficienza interpretativa del modello stocastico rispetto al processo fisico, si misura anche in base agli effetti che le ipotesi concettuali di base esercitano sullo spazio dei parametri. A questo proposito verrà definito, per semplicità, il solo campo di esistenza dei parametri autoregressivi Φ_1 e Φ_2 .

Nel modello ARMA(2,2) Φ_1 e Φ_2 possono assumere valori compresi nel triangolo di vertici:

$$\Phi_1=0 \quad , \quad \Phi_2=1$$

$$\Phi_1=-2 \quad , \quad \Phi_2=-1$$

$$\Phi_1=2 \quad , \quad \Phi_2=-1$$

individuato dalle condizioni:

$$-1 < \Phi_2 < 1$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 < 1$$

$$\Phi_2 + \Phi_1 < 1$$

I valori dei parametri concettuali a , b , c_k , c_q devono tutti essere compresi tra 0 ed 1. Inoltre, poiché c_k e c_q sono radici di una equazione algebrica di 2° grado, va aggiunta la condizione di positività del discriminante.

Si ha, quindi:

$$c_k > 0 \quad ; \quad c_q > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} c_k \\ c_q \end{array} \right\} = \frac{\Phi_1 \pm \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_1^2 + 4\Phi_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 > \frac{-\Phi_1^2}{4}$$

$$c_k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 + \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)} > 0$$

$$c_q > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 - \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)} > 0$$

L'ultima condizione implica la precedente e si traduce nel vincolo: $\Phi_1 > 0$

Inoltre:

$$c_q < 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 - \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)} < 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)} > \Phi_1 - 2$$

Poiche' per il modello ARMA(2,2) vale sempre $\Phi_1 < 2$, la disequazione di cui sopra e' sempre vera.

$$c_k < 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 + \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)} < 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)} < 2 - \Phi_1$$

Essendo 1° e 2° membro sempre positivi, si puo' passare ai quadrati, ottenendo alla fine:

$$\Phi_1 + \Phi_2 < 1$$

condizione sempre soddisfatta per i modelli ARMA(2,2) stazionari.

Riepilogando, le limitazioni imposte a ϕ_1 e ϕ_2 dalla condizione di stazionarieta' del modello ARMA(2,2) sono:

$$\boxed{-1 < \phi_2 < 1 \qquad \phi_2 - \phi_1 < 1 \qquad \phi_2 + \phi_1 < 1}$$

mentre quelle imposto dal loro significato concettuale sono:

$$\boxed{\phi_2 > -\phi_1^2/4 \qquad \phi_1 > 0 \qquad \phi_2 < 0}$$

Tutto cio' porta a ricavare la la parte di spazio dei parametri ϕ_1 e ϕ_2 nella quale sono giustificate le relazioni con i parametri del modello concettuale (fig. 5.3.1). Questa zona (contrassegnata dal triangolo) ricade nella regione in cui sia l'autocorrelazione globale che quella parziale decadono verso lo zero rimanendo sempre positive, regione che corrisponde all'ipotesi di radici reali dell'equazione caratteristica:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$$

La parte che ci interessa di questa zona e' pero' a stretto contatto con la regione in cui le radici sono complesse, nella quale il processo mostra comportamento pseudo-periodico [si veda ad es. BOX & JENKINS, 1976] (fig. A 5.2.1)

Bisogna poi tener conto che il coefficiente c_k e' molto vicino all'unita', dato che la costante d'invaso dovrebbe essere dell'ordine degli anni. Cio' implica che:

$$c_k \rightarrow 1 \Rightarrow \quad (\text{sommando membro a membro le relazioni } \phi(c_i))$$

$$\phi_1 + \phi_2 = c_k + c_q(1-c_k) \rightarrow 1$$

Poiche' la condizione $\phi_1 + \phi_2 < 1$ significa che ϕ_1 e ϕ_2 possono stare su tutti i segmenti, interni al triangolo, paralleli a quello che unisce i punti:

$$(\phi_1 = 0, \phi_2 = 1) \quad \text{e} \quad (\phi_1 = -2, \phi_2 = 1)$$

il tendere di c_k ad 1 implica che ϕ_1 e ϕ_2 possono variare solo su segmenti molto vicini a quello limite: $\phi_1 + \phi_2 = 1$.

In definitiva, si puo' ritenere che la regione di variabilita' corrispondente ai vincoli di natura concettuale sia estremamente ristretta in confronto all'intero spazio dei parametri. Inoltre, quanto piu' si differenziano c_q e c_k tanto piu' la somma $\phi_1 + \phi_2$ si avvicina al valor limite 1

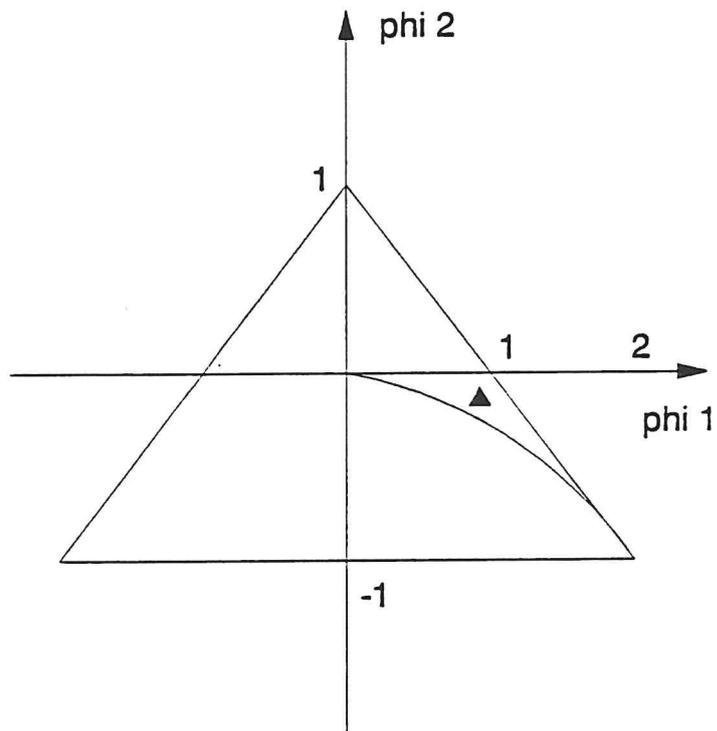


figura A 5.3.1 Regione di significativita' dei parametri ϕ_1 e ϕ_2 del modello stocastico conciso dei deflussi mensili

A 7.1 ANALISI STATISTICA PRELIMINARE DELLE SERIE TEMPORALI

restituzione grafica delle serie (A. 7.1)

media, varianza ed asimmetria generali delle serie (A. 7.1.2)

medie nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.3)

varianze nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.4)

coefficienti di variazione nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.5)

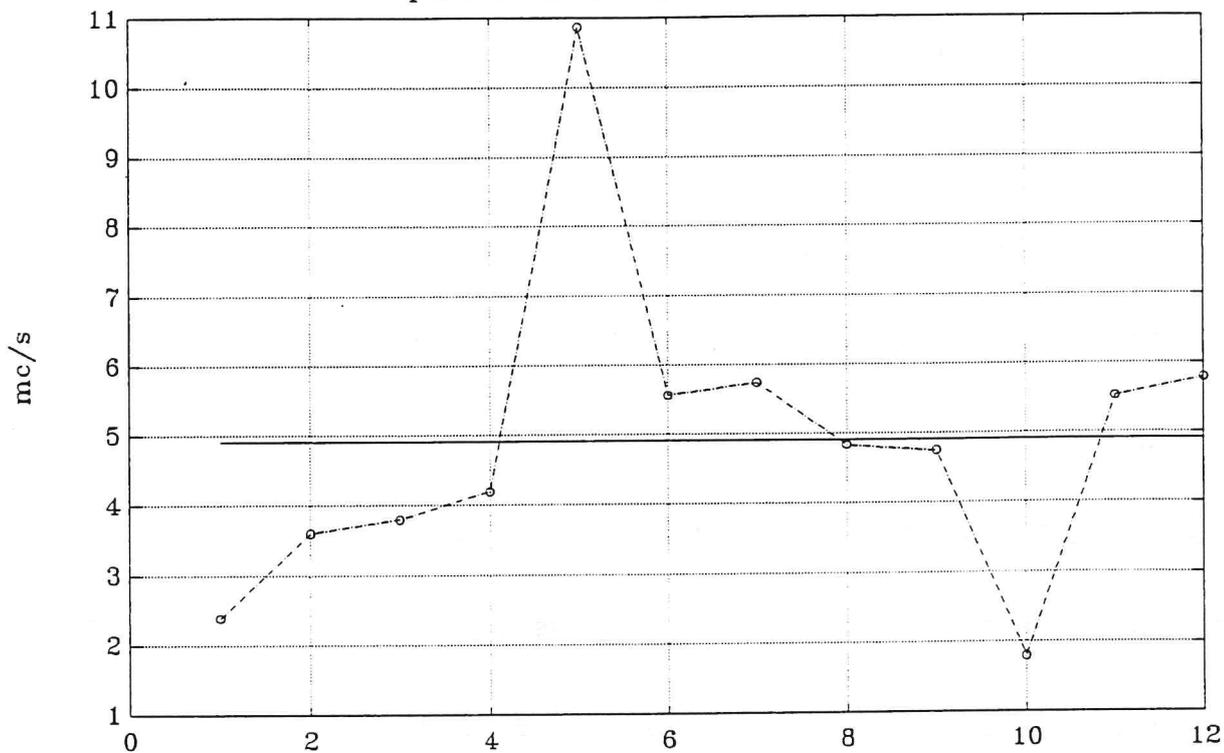
coefficienti di asimmetria nei diversi mesi dell'anno (A. 7.1.6)

autocorrelazioni globale e parziale (A. 7.1.7)

esempi di correlazioni mese-mese(A. 7.1.8)

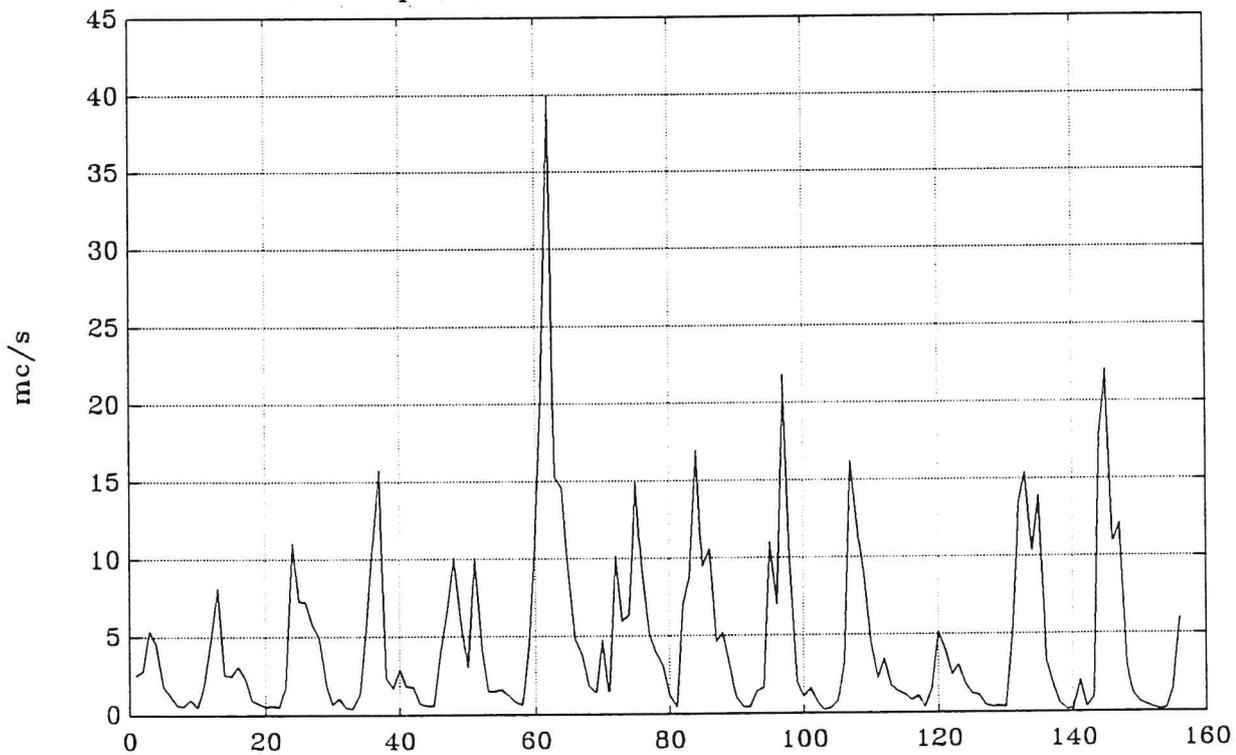
plottaggio delle serie in carta probabilistica Normale(A. 7.1.9)

portate medie annue * stazione 1



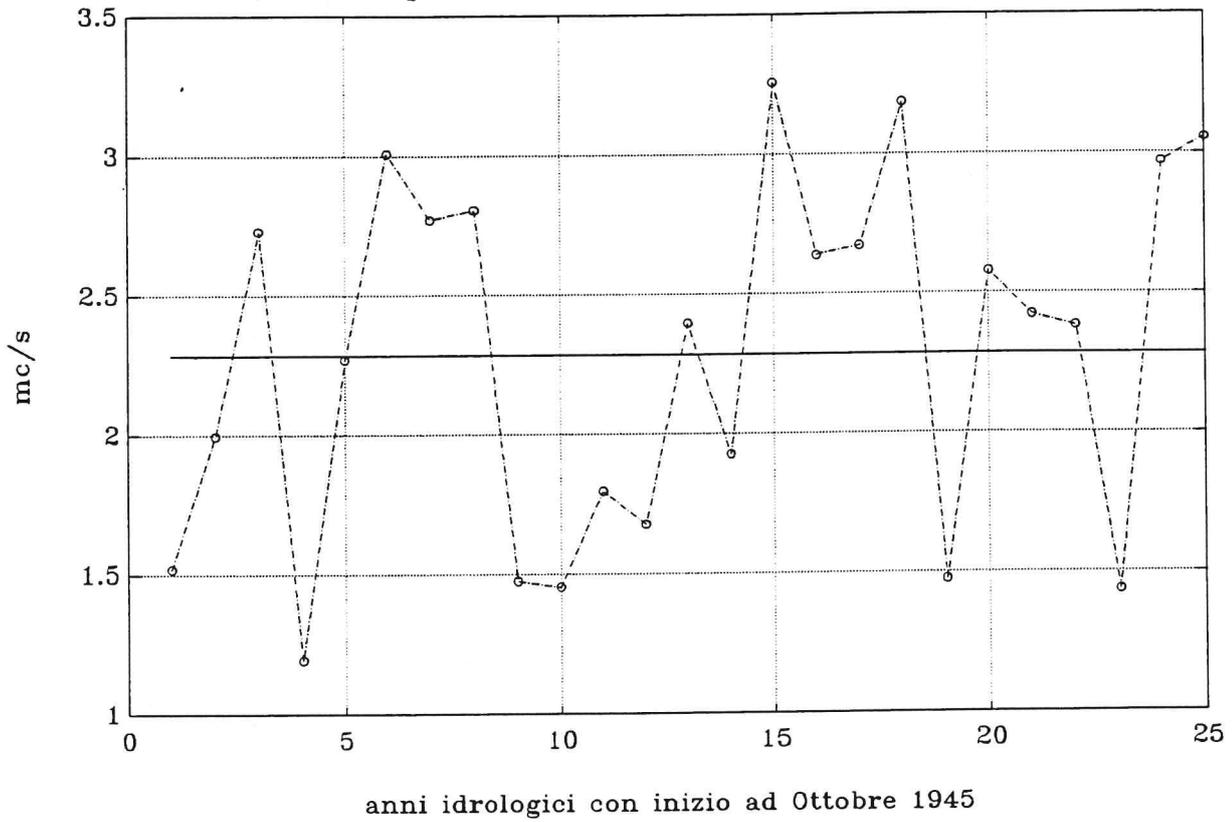
anni idrologici con inizio ad Ottobre 1958

portate medie mensili * stazione 1



tempo in mesi con inizio a Gennaio 1958

portate medie annue * stazione 2



portate medie mensili * stazione 2

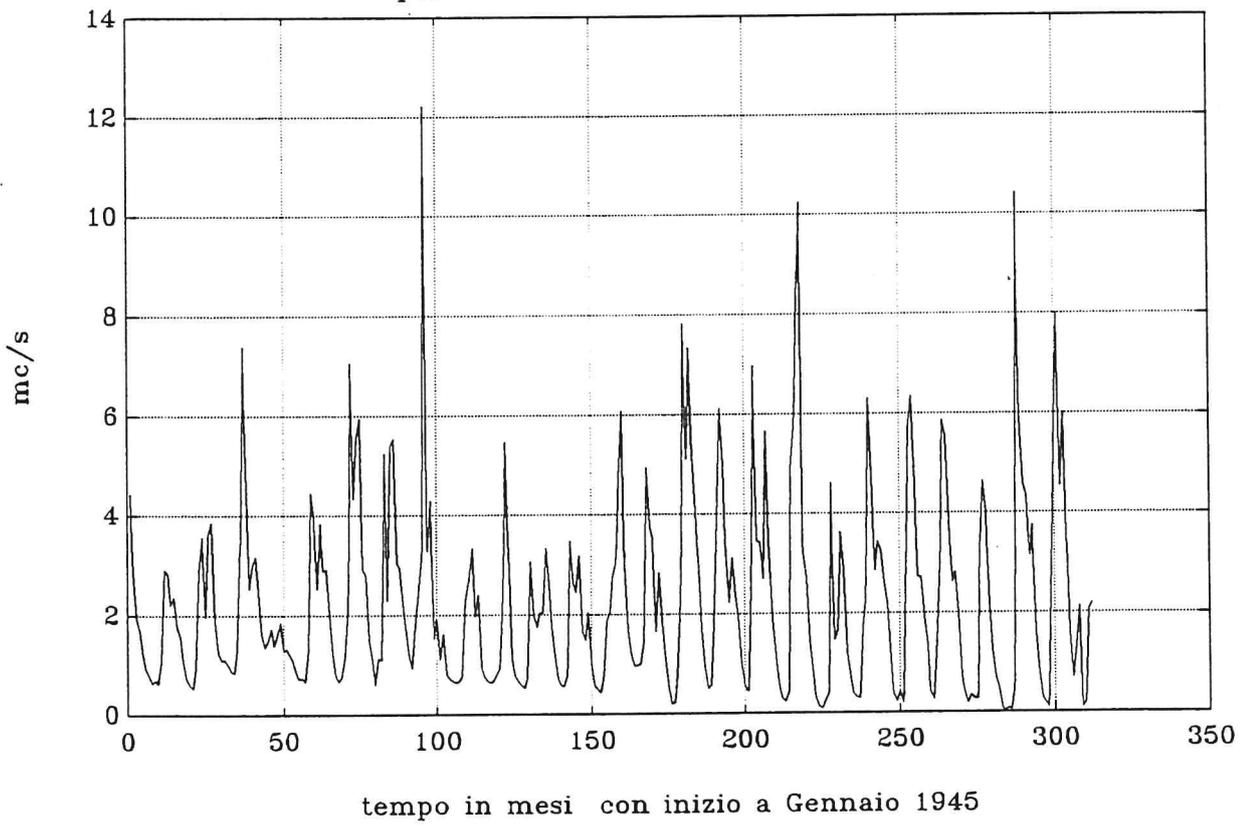
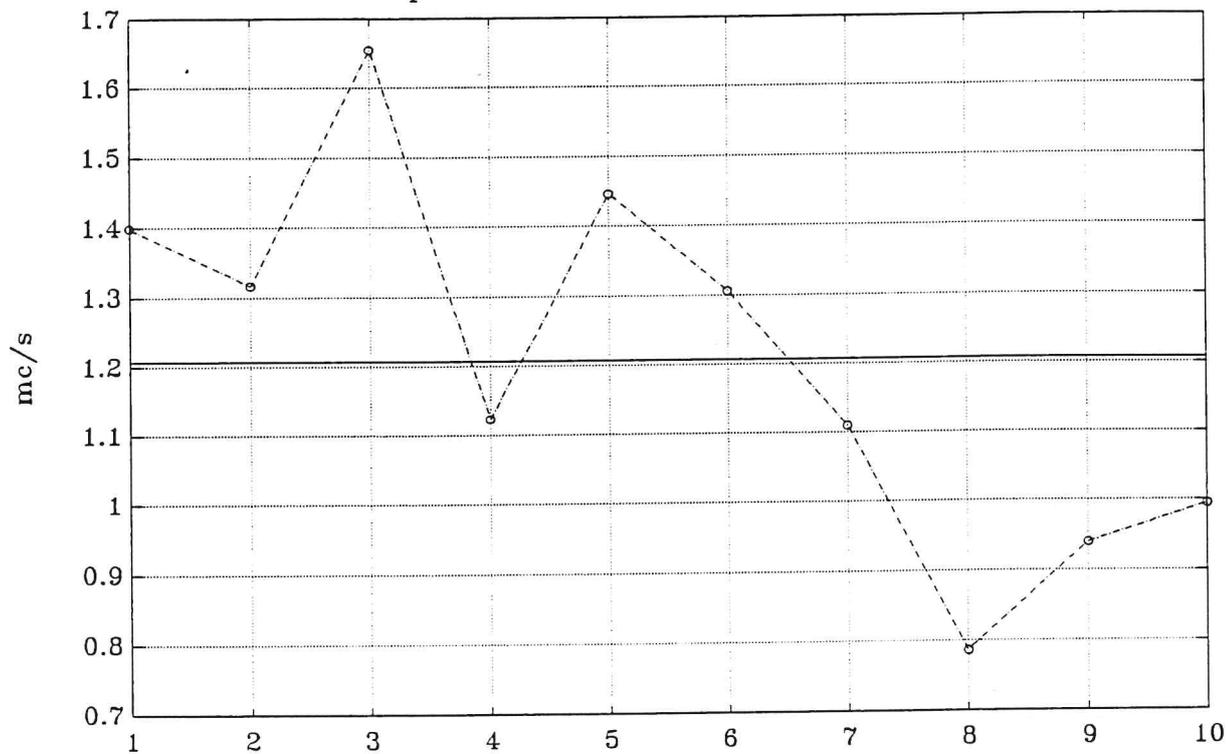


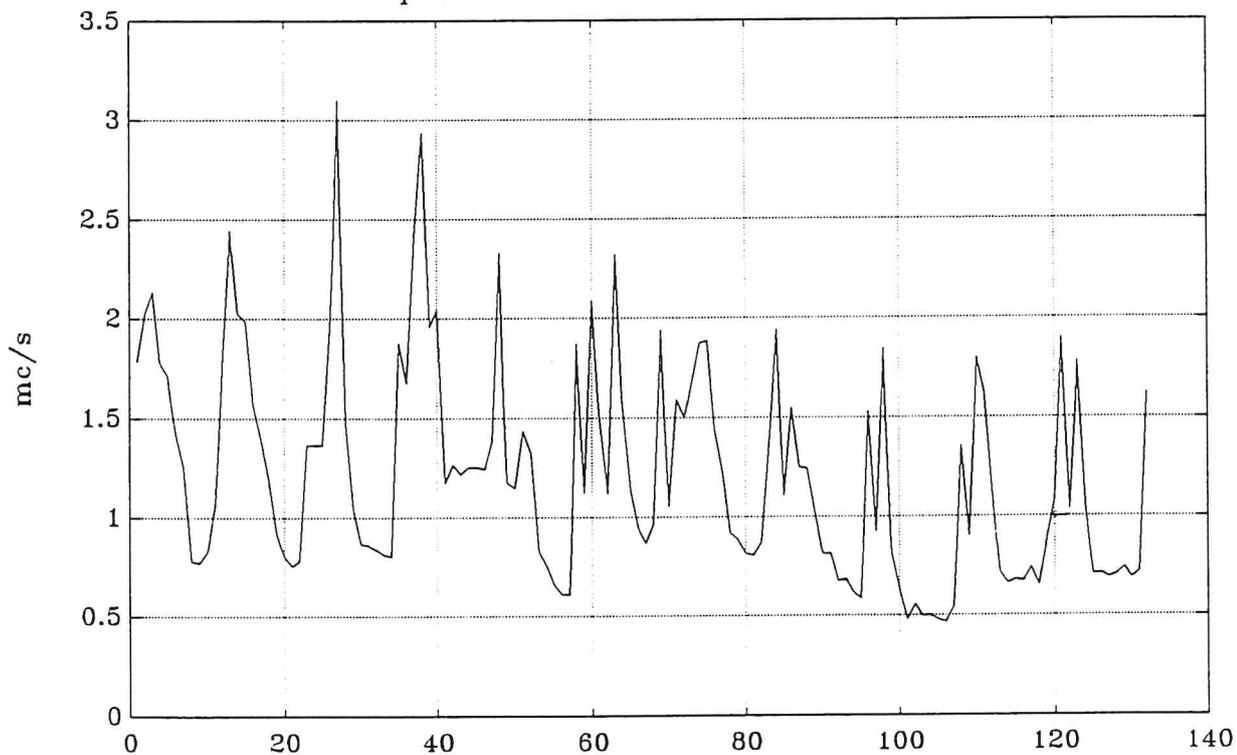
figura A 7.1.1.2

portate medie annue * stazione 3



anni idrologici con inizio ad Ottobre 1960

portate medie mensili * stazione 3



tempo in mesi con inizio a Gennaio 1960

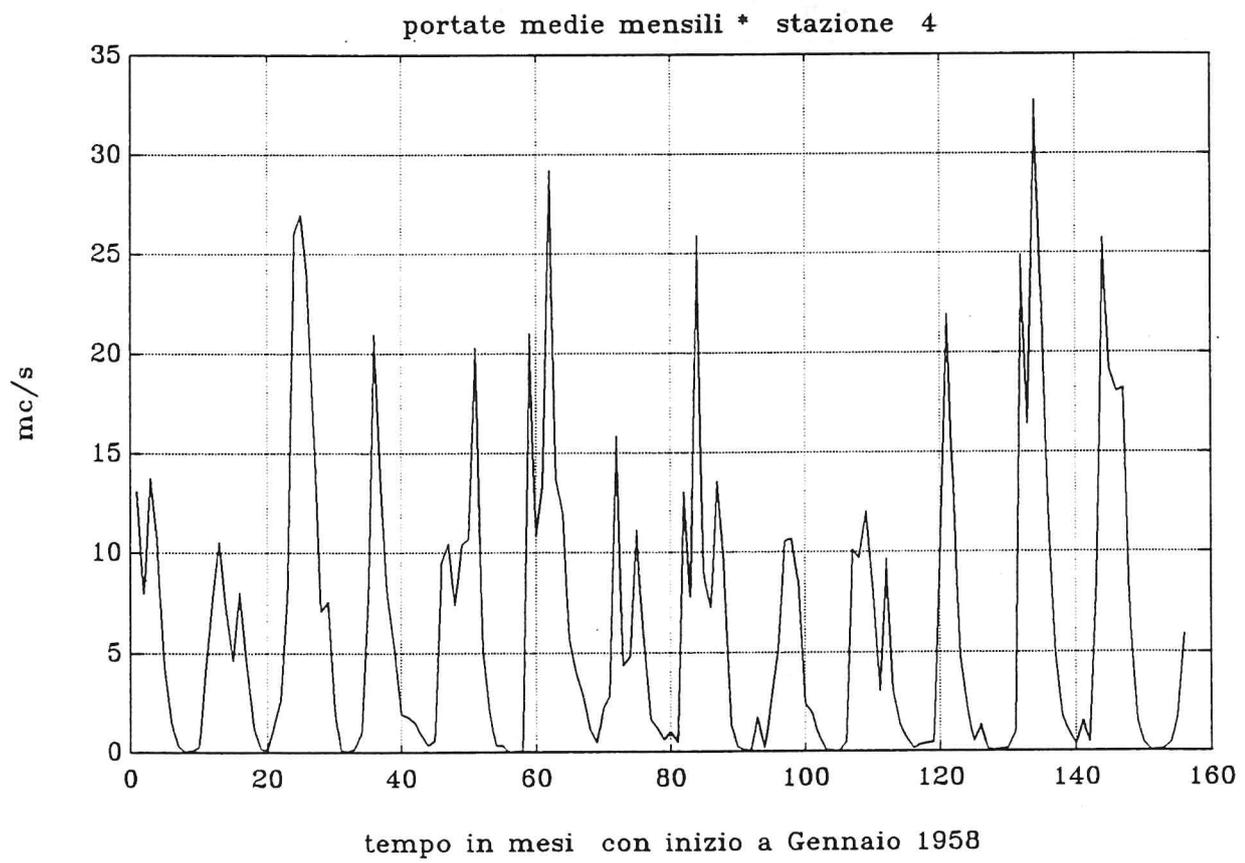
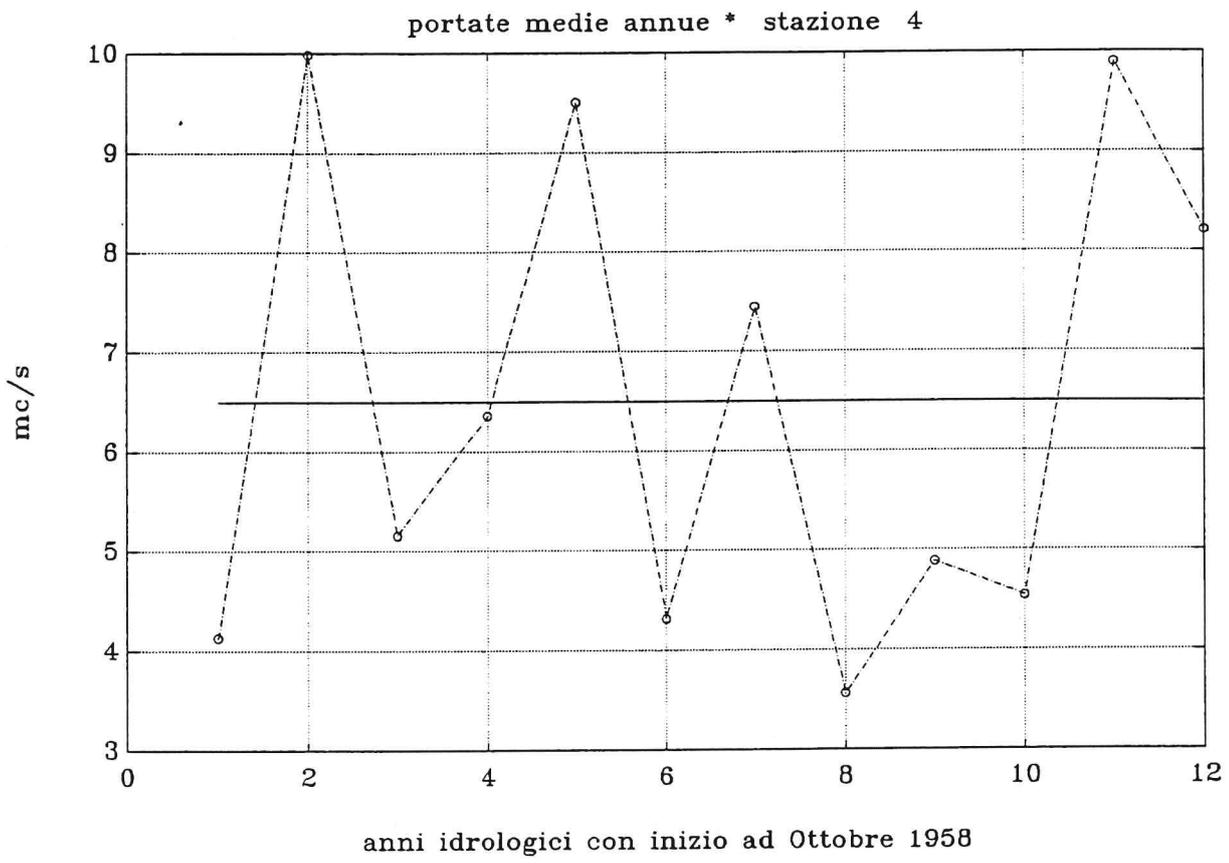
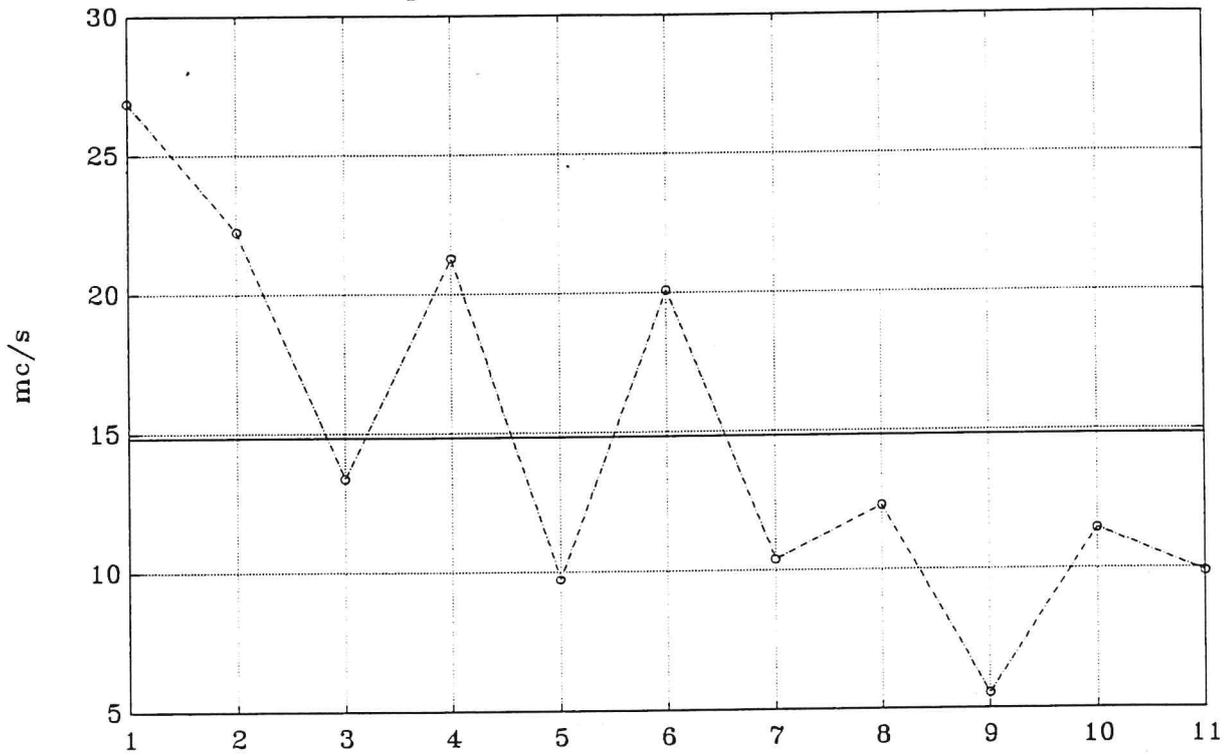


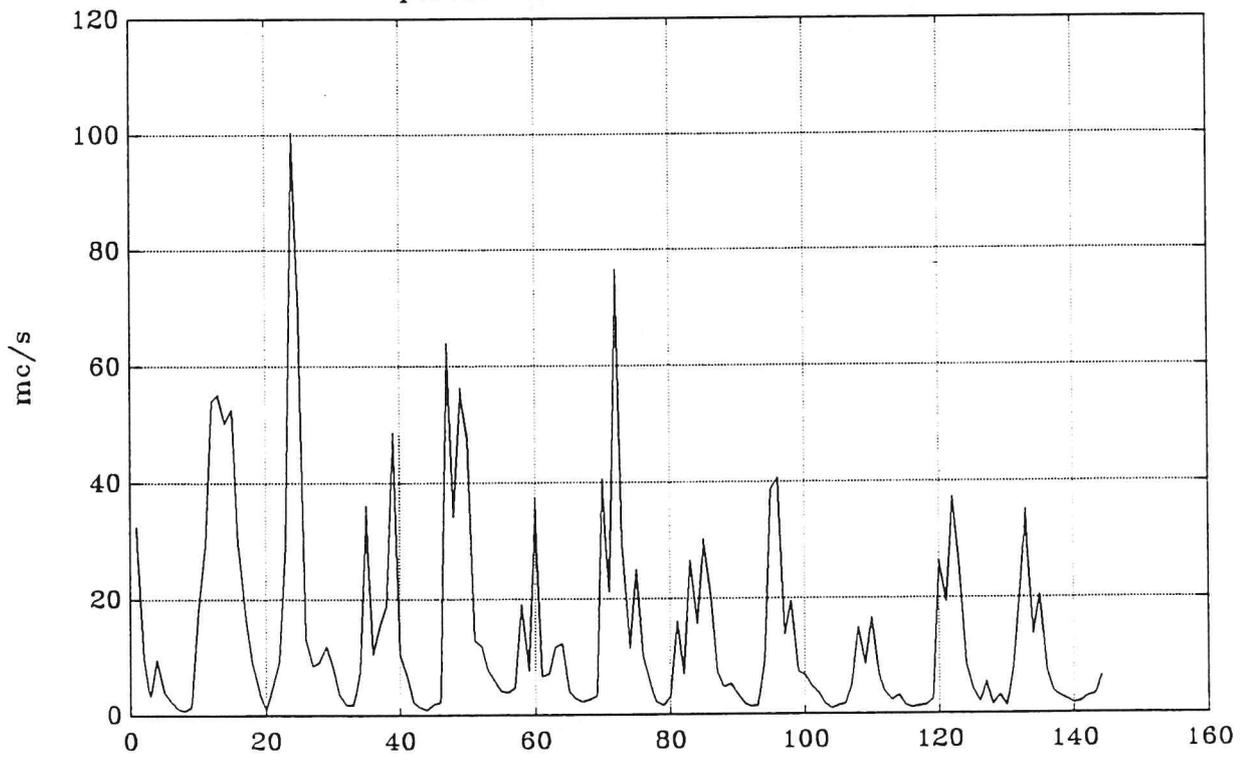
figura A 7.1.1.4

portate medie annue * stazione 5



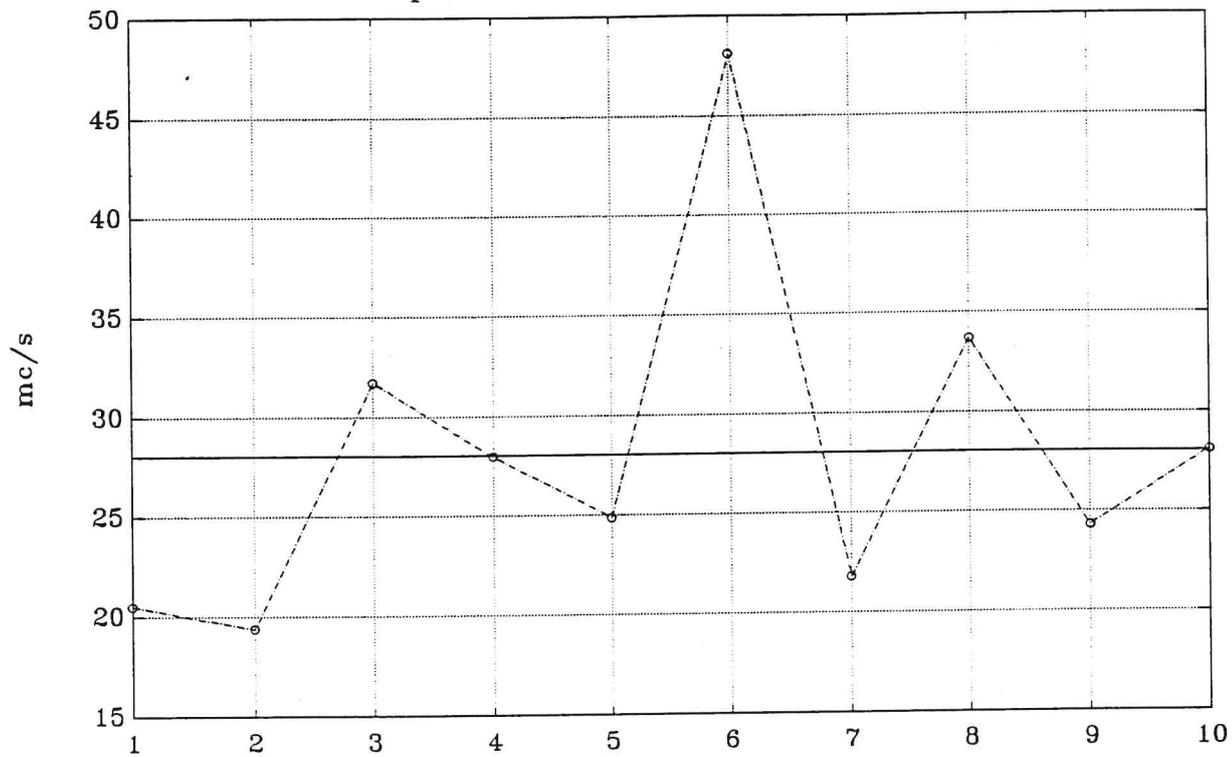
anni idrologici con inizio ad Ottobre 1959

portate medie mensili * stazione 5



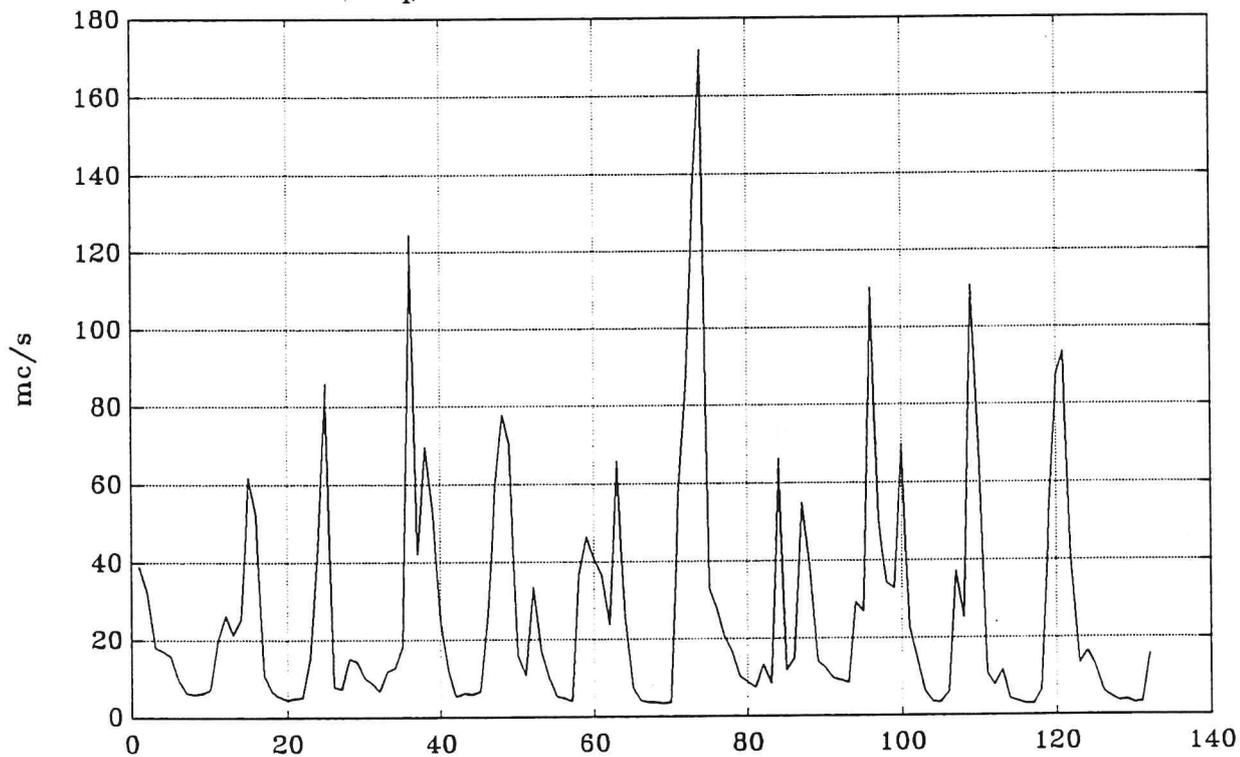
tempo in mesi con inizio a Gennaio 1959

portate medie annue * stazione 6



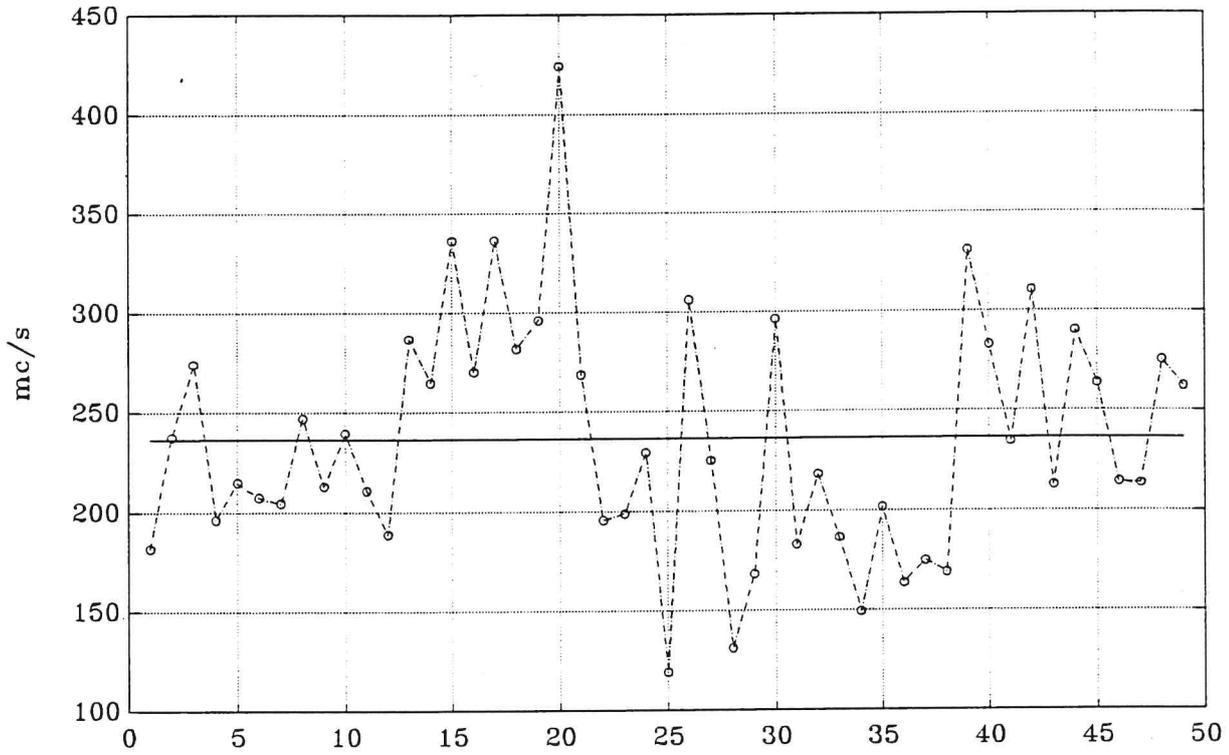
anni idrologici con inizio ad Ottobre 1957

portate medie mensili * stazione 6



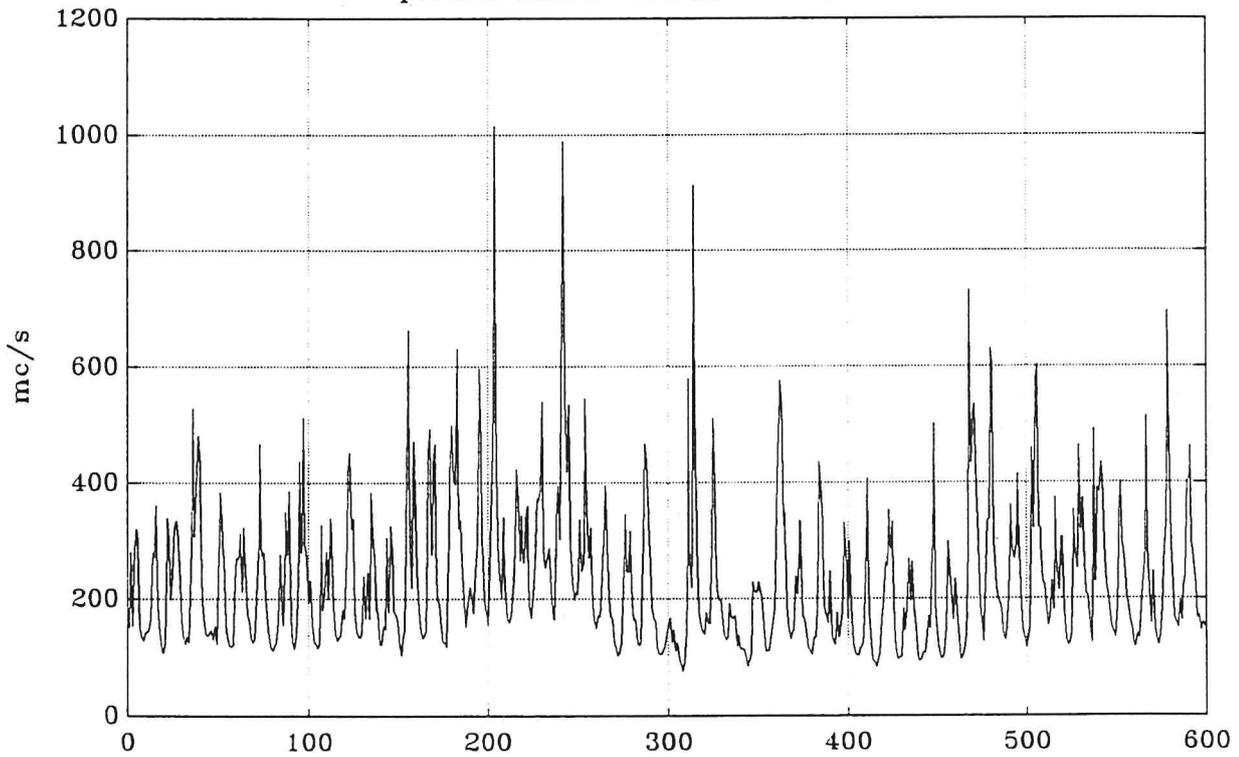
tempo in mesi con inizio a Gennaio 1957

portate medie annue * stazione 7



anni idrologici con inizio ad Ottobre 1921

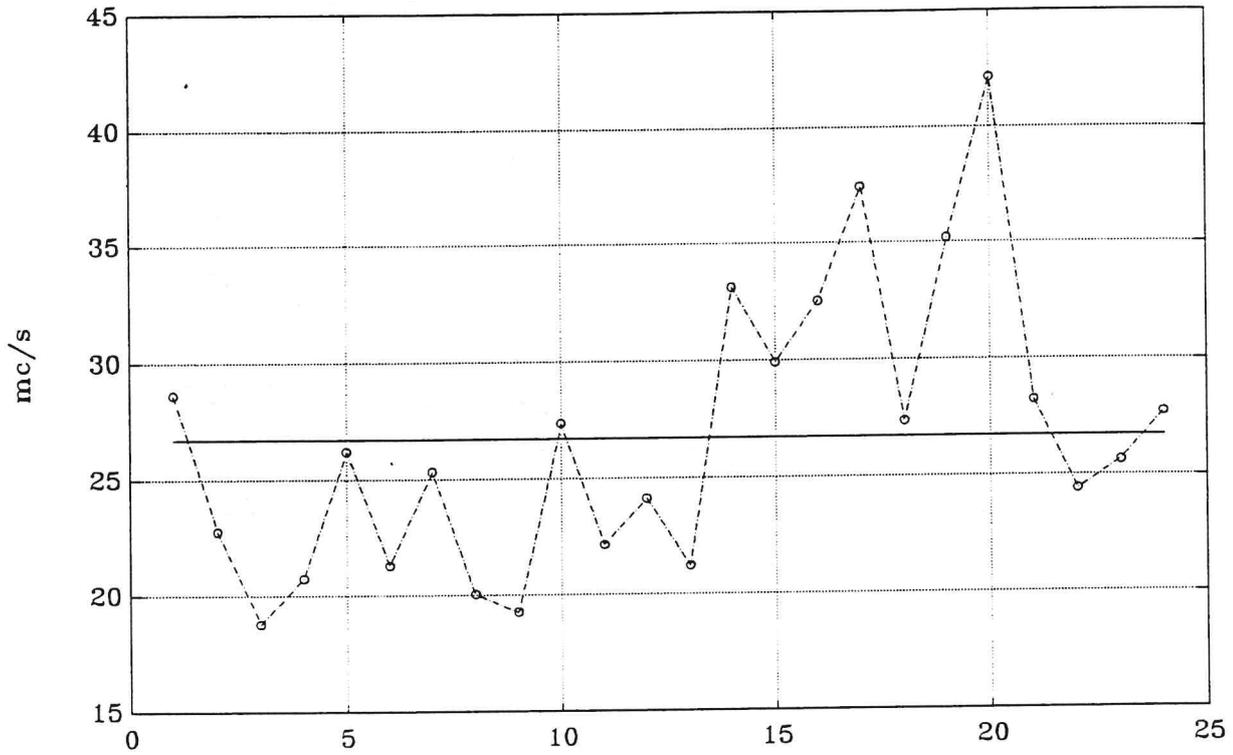
portate medie mensili * stazione 7



tempo in mesi con inizio a Gennaio 1921

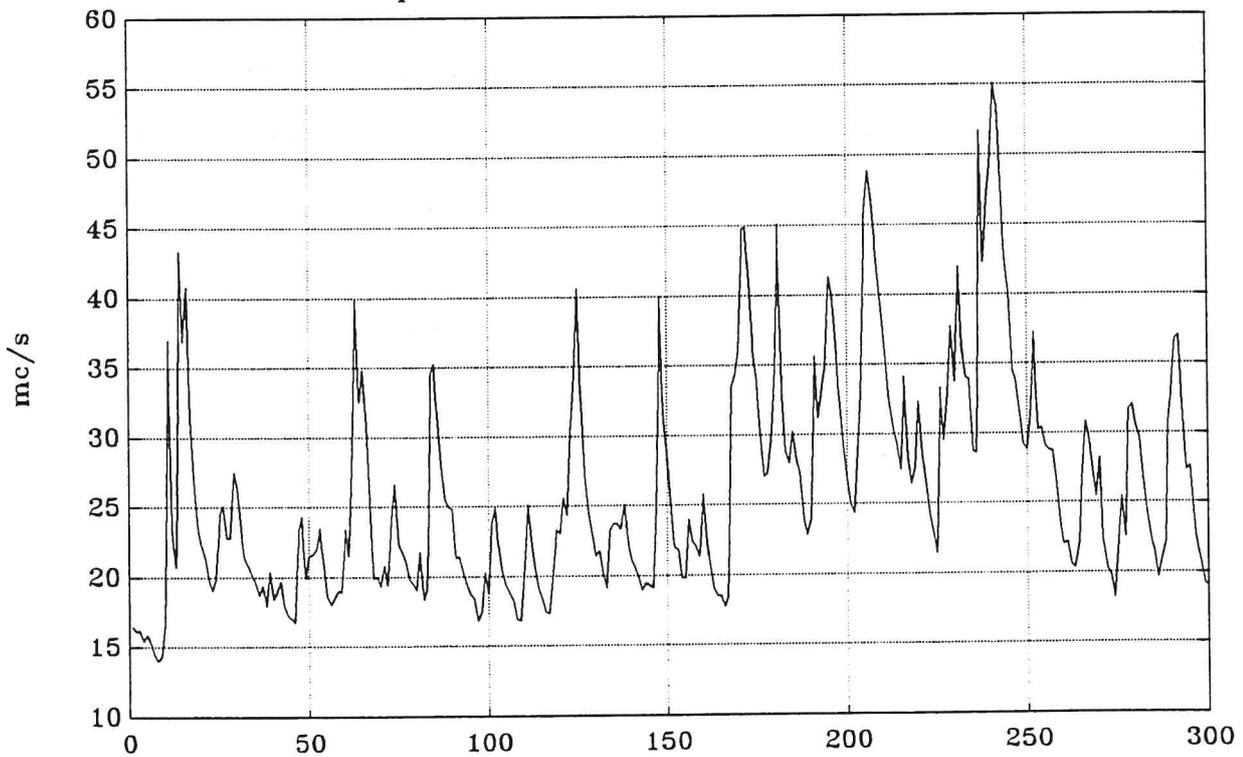
figura A 7.1.1.7

portate medie annue * stazione 8



anni idrologici con inizio ad Ottobre 1946

portate medie mensili * stazione 8



tempo in mesi con inizio a Gennaio 1946

TABELLA A 7.1.2.1

PORTATE MEDIE NELL'ANNO IDROLOGICO

stazione n.	codice	media (mc/s)	varianza	Cv	Ca
1	04	4.8998	4.7733	0.4459	1.1521
2	06	2.2821	0.3904	0.2738	-0.1653
3	11	1.2073	0.0626	0.2073	0.0382
4	12	6.4952	5.3233	0.3552	0.3064
5	20	14.8204	40.5225	0.4295	0.4166
6	32	28.0286	64.3852	0.2863	1.1412
7	53	236.3	3497.2	0.2502	0.5454
8	54	26.7267	34.4500	0.2196	0.7772

TABELLA A 7.1.2.2

PORTATE MEDIE MENSILI

stazione n.	codice	media (mc/s)	varianza	Cv	Ca
1	04	4.8998	34.8149	1.2042	2.3303
2	06	2.2821	3.8365	0.8583	1.5910
3	11	1.2073	0.2928	0.4482	0.9557
4	12	6.4952	56.7986	1.1603	1.3716
5	20	14.8204	315.6534	1.1988	2.0275
6	32	28.0286	977.3281	1.1154	1.9544
7	53	236.34	17110	0.5535	1.8242
8	54	26.7267	61.3784	0.2931	1.1160

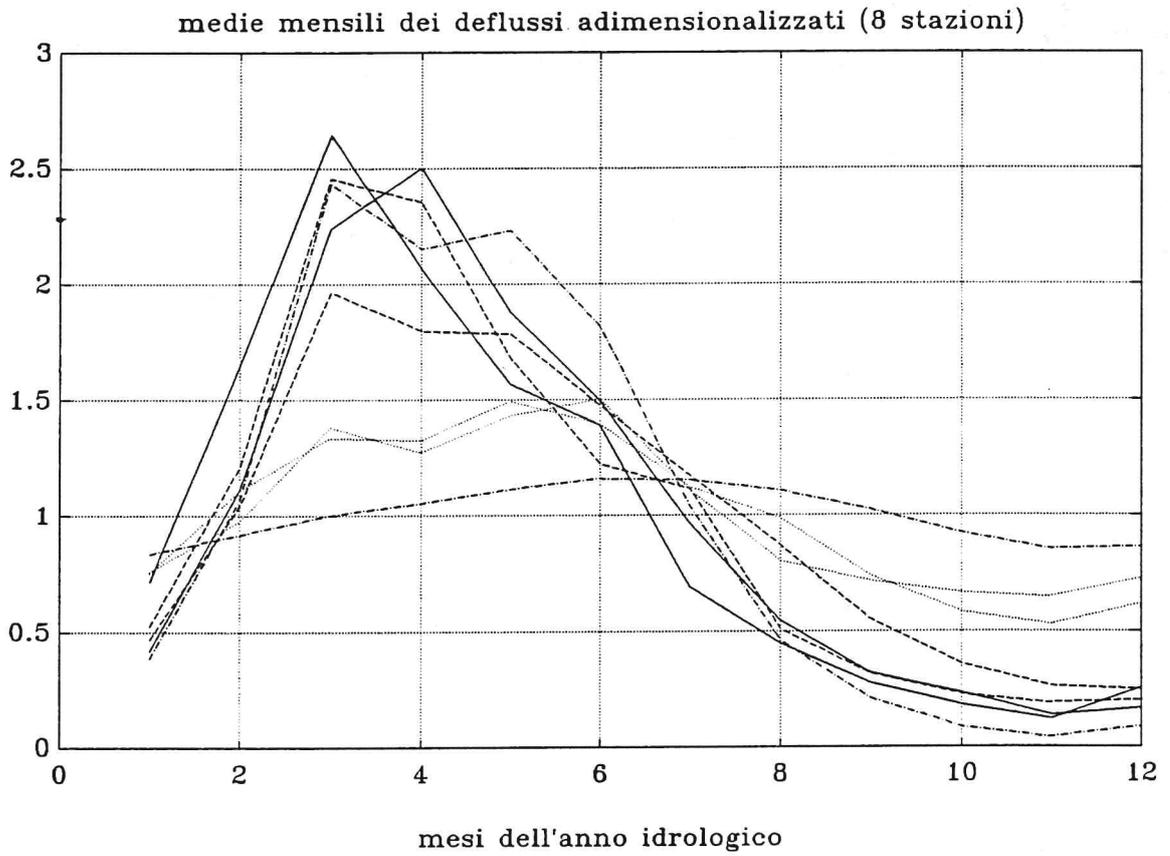


figura A 7.1.3

TABELLA A 7.1.3

MEDIE DEI DEFLUSSI NEI MESI DELL'ANNO IDROLOGICO PER LE 8 SERIE

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	2.033	1.064	0.917	2.497	10.618	14.714	178.40	22.279
nov	5.451	2.377	1.177	6.946	24.410	34.015	261.79	24.537
dic	10.964	4.485	1.667	15.801	39.187	68.762	316.04	26.754
gen	12.251	4.106	1.538	13.969	30.646	65.933	313.12	28.112
feb	9.206	4.075	1.726	14.480	23.215	47.069	353.51	29.754
mar	7.328	3.368	1.813	11.793	20.611	34.313	329.63	30.987
apr	4.717	2.676	1.342	6.746	10.280	31.240	265.61	30.829
mag	2.681	1.985	0.969	2.994	6.641	14.287	232.87	29.570
giu	1.566	1.265	0.865	1.351	4.096	8.896	175.40	27.408
lug	1.126	0.816	0.807	0.546	2.651	6.287	138.27	24.654
ago	0.661	0.598	0.782	0.258	1.729	5.239	125.46	22.800
set	0.809	0.563	0.880	0.557	3.755	5.583	145.94	23.033

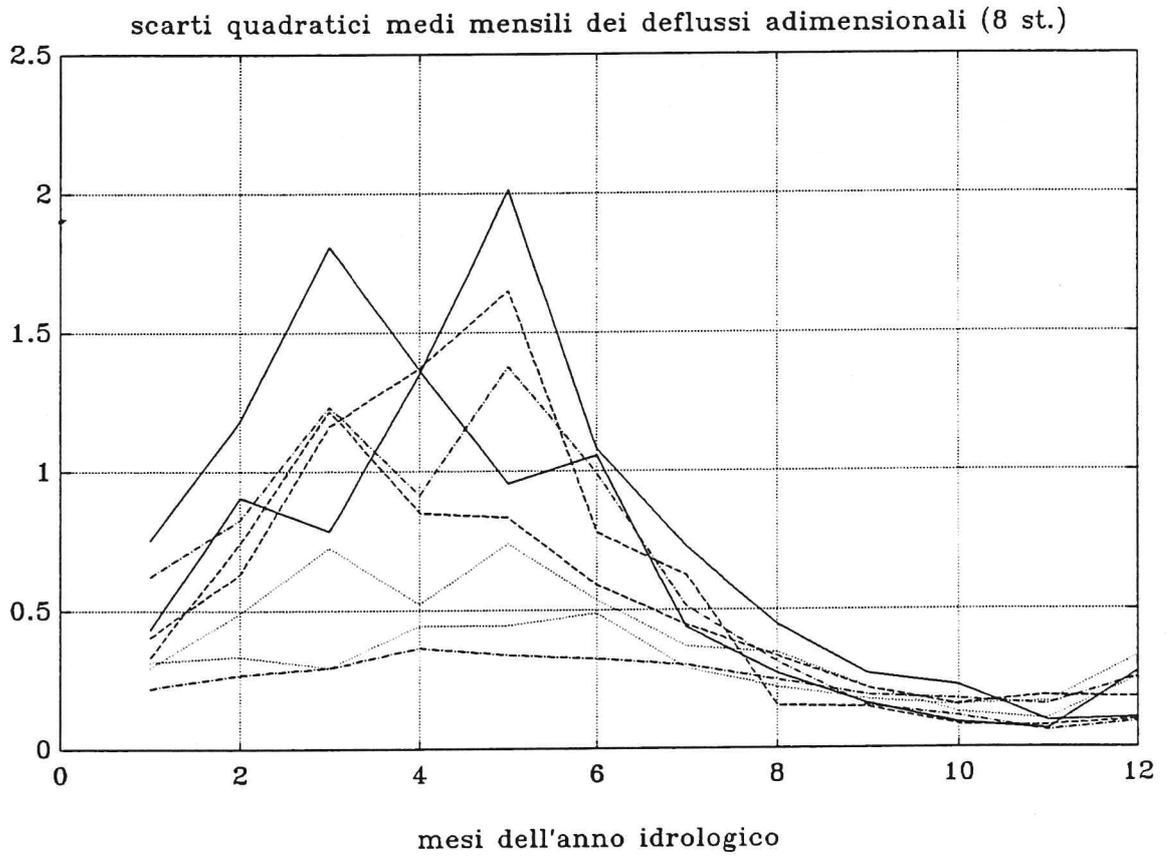


figura A 7.1.4

TABELLA A 7.1.4

scarti quadratici medi mensili per i deflussi adimensionali

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	0.4320	0.3340	0.3145	0.6235	0.7547	0.4042	0.2962	0.2211
nov	0.9068	0.7441	0.3346	0.8289	1.1813	0.6336	0.4904	0.2682
dic	0.7881	1.2156	0.2974	1.2290	1.8070	1.1608	0.7281	0.2942
gen	1.3491	0.8526	0.4435	0.9149	1.3636	1.3697	0.5212	0.3661
feb	2.0134	0.8353	0.4432	1.3748	0.9563	1.6495	0.7402	0.3389
mar	1.0765	0.5915	0.4879	0.9899	1.0555	0.7813	0.5362	0.3256
apr	0.7292	0.4464	0.2924	0.5131	0.4371	0.6267	0.3710	0.3034
mag	0.4471	0.3328	0.2217	0.3133	0.2699	0.1564	0.3476	0.2488
giu	0.2677	0.2184	0.1757	0.1529	0.1609	0.1479	0.2200	0.1927
lug	0.2256	0.1556	0.1533	0.1146	0.0888	0.0814	0.1283	0.1772
ago	0.0969	0.1890	0.1653	0.0597	0.0652	0.0762	0.1028	0.1553
set	0.1079	0.1840	0.3312	0.0912	0.2744	0.0990	0.2520	0.2542

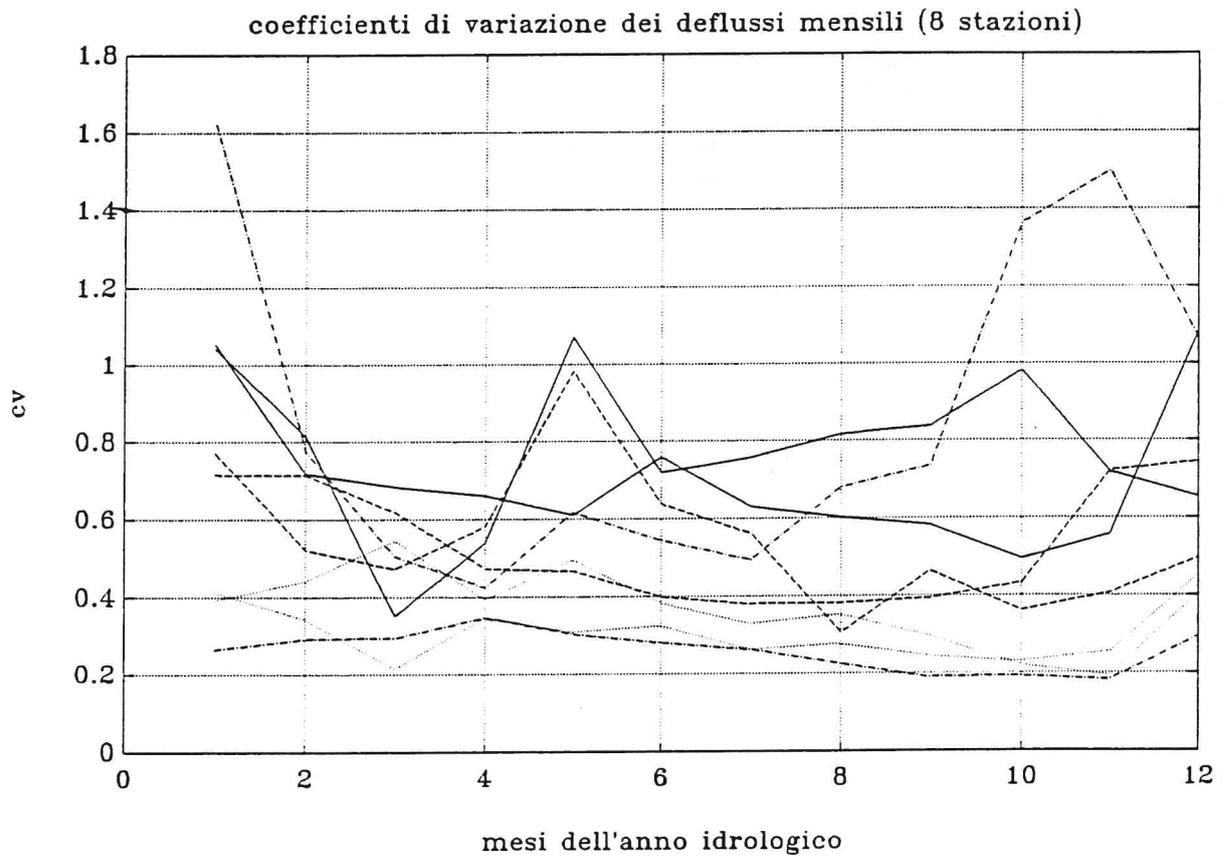


figura A 7.1.5

TABELLA A 7.1.5

coefficienti di variazione mensili per le 8 serie

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	1.0411	0.7159	0.4139	1.6213	1.0533	0.7700	0.3924	0.2652
nov	0.8150	0.7142	0.3432	0.7751	0.7172	0.5221	0.4427	0.2921
dic	0.3522	0.6185	0.2153	0.5052	0.6834	0.4732	0.5445	0.2939
gen	0.5396	0.4738	0.3481	0.4254	0.6594	0.5822	0.3934	0.3481
feb	1.0716	0.4677	0.3099	0.6167	0.6105	0.9822	0.4948	0.3045
mar	0.7197	0.4007	0.3249	0.5452	0.7589	0.6382	0.3844	0.2809
apr	0.7574	0.3806	0.2630	0.4940	0.6301	0.5623	0.3301	0.2630
mag	0.8169	0.3825	0.2762	0.6795	0.6023	0.3069	0.3528	0.2248
giu	0.8375	0.3938	0.2450	0.7349	0.5822	0.4661	0.2964	0.1879
lug	0.9815	0.4346	0.2292	1.3625	0.4961	0.3630	0.2192	0.1921
ago	0.7170	0.7210	0.2551	1.4981	0.5584	0.4077	0.1936	0.1821
set	0.6531	0.7450	0.4540	1.0639	1.0829	0.4970	0.4080	0.2950

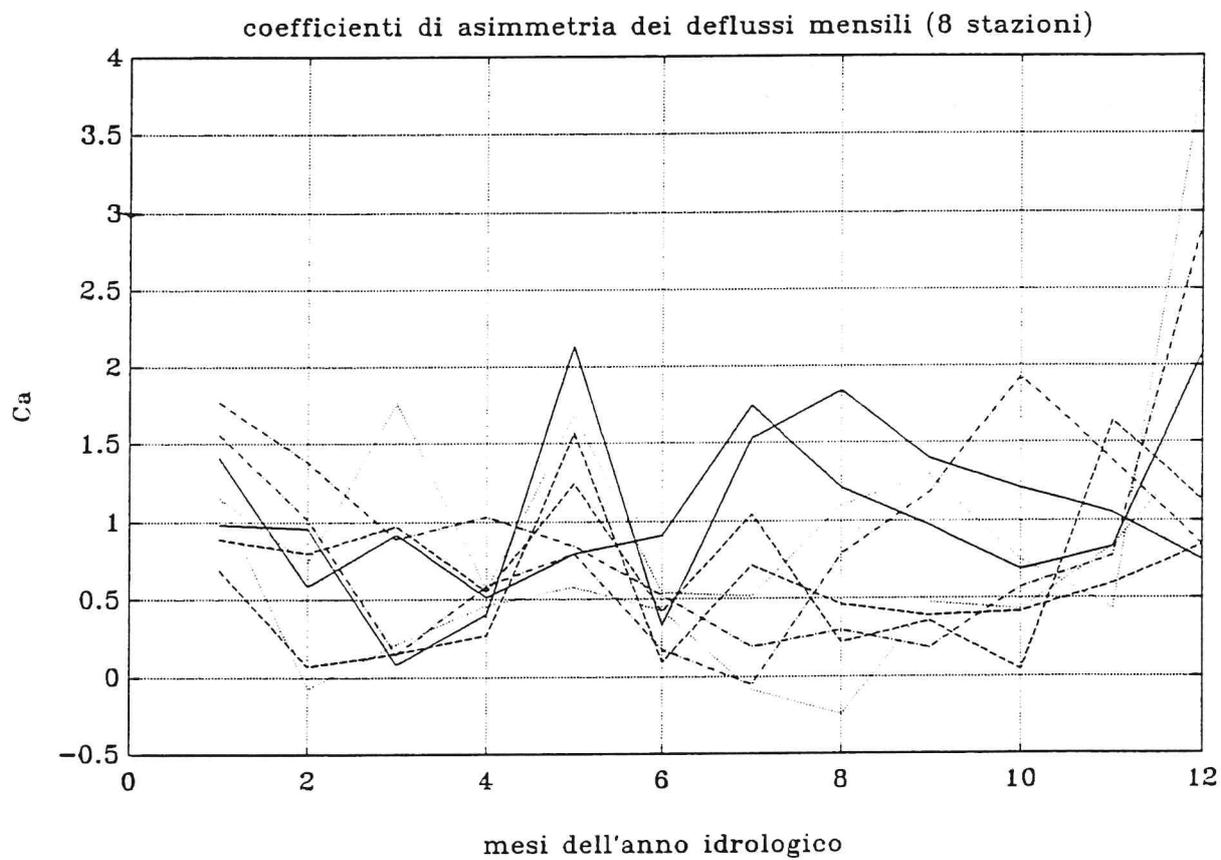


figura A 7.1.6

TABELLA A 7.1.6

coefficienti di asimmetria mensili per le 8 serie

	st #1	st #2	st #3	st #4	st #5	st #6	st #7	st #8
ott	0.9841	0.8924	1.1738	1.5608	1.4113	0.6908	1.1552	1.7677
nov	0.9578	0.7998	-0.0730	1.0171	0.5903	0.0720	0.7429	1.3802
dic	0.0813	0.9733	0.2115	0.1475	0.9209	0.1538	1.7632	0.8912
gen	0.4074	0.5572	0.4623	0.5885	0.5138	0.2681	0.5645	1.0328
feb	2.1376	1.2426	0.5809	0.7946	0.7973	1.5674	1.6891	0.8448
mar	0.3309	0.4179	0.4283	0.1801	0.9113	0.0960	0.5421	0.5251
apr	1.5305	1.0440	-0.0817	-0.0503	1.7403	0.7170	0.5206	0.1893
mag	1.8358	0.2216	-0.2435	0.7896	1.2093	0.4657	1.0979	0.2981
giu	1.3965	0.3579	0.4759	1.1839	0.9714	0.3880	1.2940	0.1842
lug	1.2065	0.0461	0.4300	1.9227	0.6882	0.4148	0.7507	0.5706
ago	1.0501	1.6367	0.8399	1.3800	0.8352	0.5968	0.4337	0.7773
set	0.7473	1.1243	1.5099	0.8456	2.0841	0.8460	3.9215	2.9239

TABELLA A 7.1.7.0

DEFLUSSI ANNUI * bacini con falda profonda *

Autocorrelazione globale e parziale

* serie n. 3

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.	*****	.	*****	1	0.378 0.378
.	*****	.	***	2	0.360 0.253
.	*	.	****	3	-0.070 -0.333
.	*	.	*	4	-0.059 -0.045
.	****	.	***	5	-0.332 -0.218

* serie n. 7

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.	***.	.	***.	1	0.260 0.260
.	**.	.	**.	2	0.182 0.123
.	****	.	***.	3	0.277 0.222
.	**.	.	.	4	0.124 -0.002
.	.	.	*	5	0.010 -0.086
.	*.	.	*	6	0.102 0.052
.	*	.	*	7	-0.050 -0.113
****	.	****	.	8	-0.339 -0.355
.	.	.	**.	9	-0.028 0.117
.	*	.	.	10	-0.069 0.028
***	.	.	*	11	-0.215 -0.069
**.	.	.	*	12	-0.119 -0.043

* serie n. 8

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.	*****	.	*****	1	0.475 0.475
.	****.	.	*.	2	0.315 0.115
.	*****	.	***.	3	0.378 0.250
.	***.	.	*	4	0.234 -0.050
.	**.	.	.	5	0.181 0.029
.	.	.	***	6	0.027 -0.201
.	**	.	**	7	-0.121 -0.178
***	.	****	.	8	-0.265 -0.289

TABELLA A 7.1.7.1

DEFLUSSI ANNUI

Autocorrelazione globale e parziale

* serie n. 2

Autocorrelations			Partial Autocorrelations			ac	pac
.	*	.	.	*	.	1	0.051 0.051
.	.	.	.	*	.	2	-0.038 -0.041
.	3	-0.007 -0.003
.	***	.	.	***	.	4	-0.205 -0.207
.	**	.	.	**	.	5	-0.145 -0.130
.	****	.	.	****	.	6	-0.279 -0.306
.	*	.	.	*	.	7	0.062 0.061
.	*	8	0.056 -0.035
.	***	.	.	***	.	9	0.249 0.243
.	***	.	.	**	.	10	0.265 0.154
.	*	.	.	*	.	11	-0.059 -0.073
.	12	0.038 -0.003

TABELLA A 7.1.7.2

DEFLUSSI MENSILI

Autocorrelazione globale e parziale * serie n. 7

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
. *****	. *****	1 0.599	0.599
. ****	. .	2 0.337	-0.034
. **	* .	3 0.156	-0.051
* .	*** .	4 -0.079	-0.224
*** .	* .	5 -0.221	-0.112
*** .	* .	6 -0.269	-0.056
*** .	. .	7 -0.234	0.021
* .	. **	8 -0.081	0.143
. *	. *	9 0.065	0.086
. ****	. **	10 0.217	0.133
. *****	. **	11 0.354	0.141
. *****	. **	12 0.432	0.158
. ****	. .	13 0.346	-0.031
. ***	* .	14 0.199	-0.042
. *	. .	15 0.052	-0.022
** .	** .	16 -0.145	-0.116
*** .	. .	17 -0.262	-0.037
**** .	* .	18 -0.299	-0.043
*** .	. .	19 -0.262	-0.010
* .	. *	20 -0.114	0.057
. *	. *	21 0.051	0.056
. **	. .	22 0.170	-0.000
. ****	. *	23 0.321	0.107
. *****	. *	24 0.378	0.062
. ****	. .	25 0.322	0.026

TABELLA A 7.1.7.3

DEFLUSSI MENSILI

Autocorrelazione globale e parziale * serie n. 2

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.	*****	.	*****	1	0.588 0.588
.	****	.	*	2	0.305 -0.062
.	.	***	.	3	0.015 -0.214
***	.	***	.	4	-0.222 -0.205
*****	.	**	.	5	-0.378 -0.177
*****	.	**	.	6	-0.445 -0.159
*****	.	.	*	7	-0.389 -0.072
***	.	.	.	8	-0.216 0.037
.	.	.	.	9	-0.027 0.024
.	***	.	***	10	0.243 0.204
.	*****	.	**	11	0.418 0.145
.	*****	.	*	12	0.448 0.042
.	*****	.	**	13	0.422 0.124
.	***	.	*	14	0.198 -0.104
.	.	.	.	15	0.013 0.020
***	.	**	.	16	-0.242 -0.138
*****	.	.	.	17	-0.378 -0.029
*****	.	.	*	18	-0.433 -0.070
*****	.	.	.	19	-0.350 0.023
***	.	.	.	20	-0.210 -0.027
.	.	.	.	21	-0.006 -0.002
.	***	.	*	22	0.214 0.092
.	*****	.	*	23	0.391 0.067
.	*****	.	*	24	0.459 0.092
.	*****	.	*	25	0.359 -0.050

TABELLA A 7.1.8.1

DEFLUSSI MENSILI

Correlazione tra i deflussi nel mese 7 con i deflussi nel mese 6 (serie n.8)

COR{D08_7,D08_6(-i)}		COR{D08_7,D08_6(+i)}		i	lag	lead
.	*****	.	*****	0	0.867	0.867
.	**	.	*	1	0.134	0.104
.	**	.	****	2	0.118	0.297
.	**	.	****	3	0.149	0.293
.	*	.	*****	4	0.083	0.403
.	*	.	***	5	0.064	0.246
.	**	.	*	6	-0.120	0.098
.	.	.	*	7	-0.007	0.070
.	****	.	*	8	-0.291	-0.112
.	.	.	.	9	-0.036	-0.036
.	**	.	*	10	-0.165	-0.073
.	**	.	****	11	-0.128	-0.316
.	**	.	***	12	-0.151	-0.248

Correlazione tra i deflussi nel mese 7 con i deflussi nel mese 1 (serie n.8)

COR{D08_7,D08_1(-i)}		COR{D08_7,D08_1(+i)}		i	lag	lead
.	****	.	****	0	0.323	0.323
.	****	.	*****	1	0.288	0.524
.	**	.	****	2	0.181	0.342
.	*	.	*****	3	0.065	0.440
.	**	.	****	4	0.153	0.320
.	*	.	***	5	0.106	0.223
.	.	.	***	6	-0.025	0.247
.	.	.	.	7	-0.036	-0.012
.	*	.	*	8	-0.079	0.044
.	*	.	**	9	-0.073	-0.164
.	**	.	*	10	-0.160	-0.102
.	**	.	****	11	-0.164	-0.288
.	**	.	*****	12	-0.133	-0.417

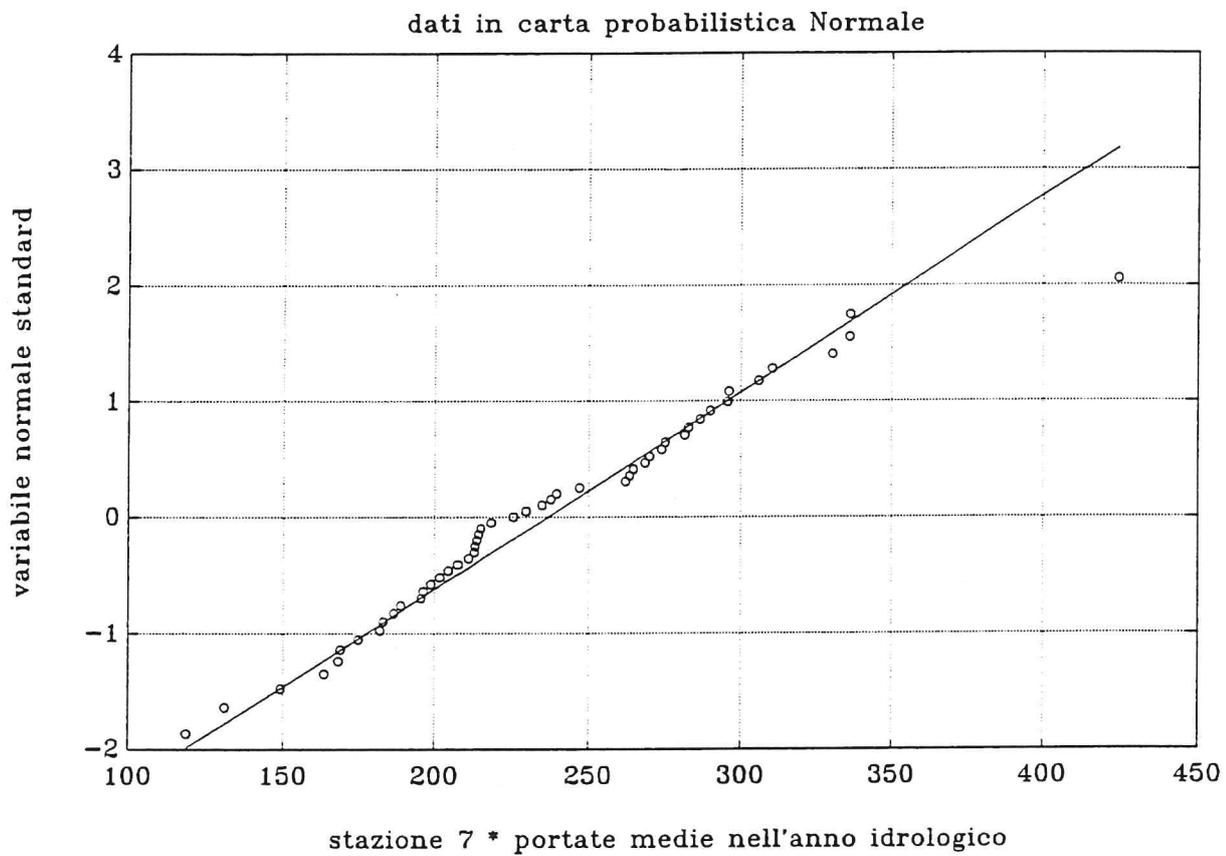


figura A 7.1.9.1

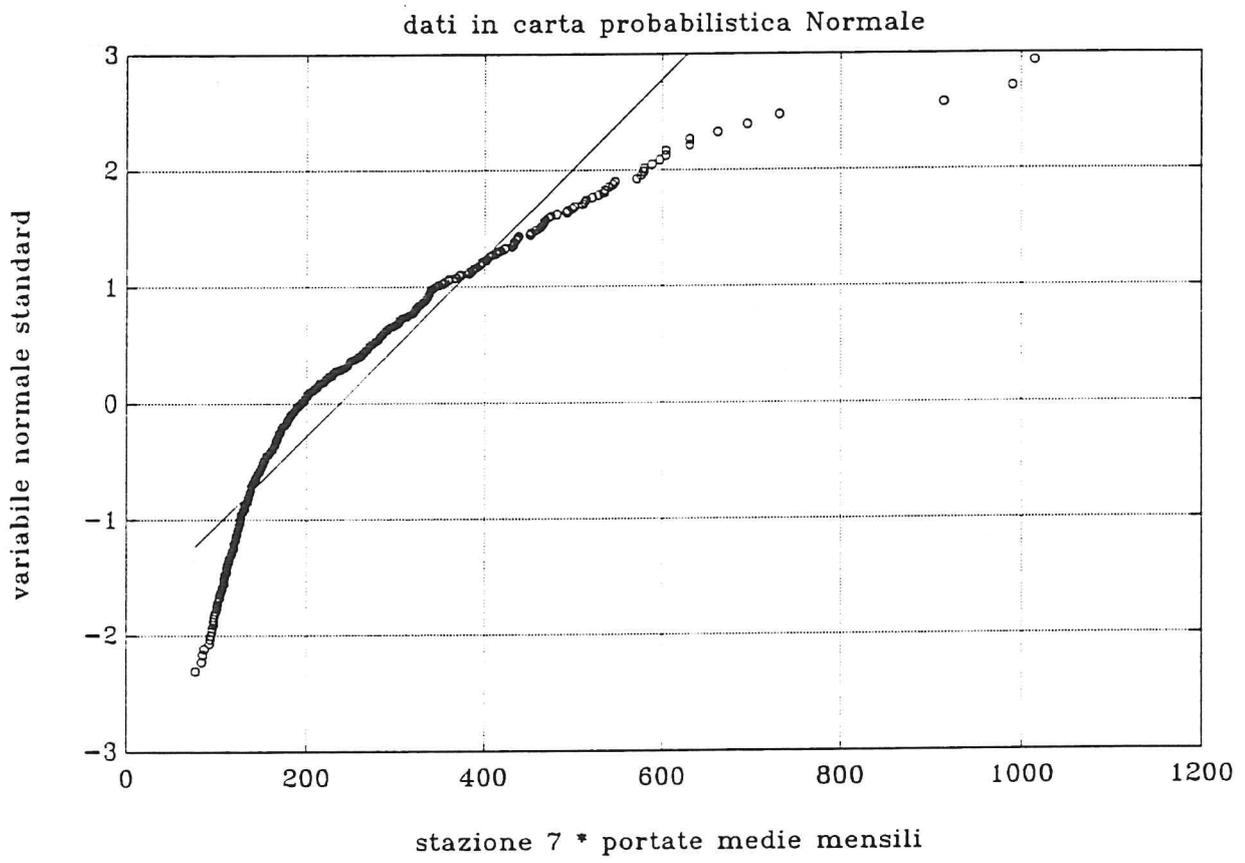


figura A 7.1.9.2

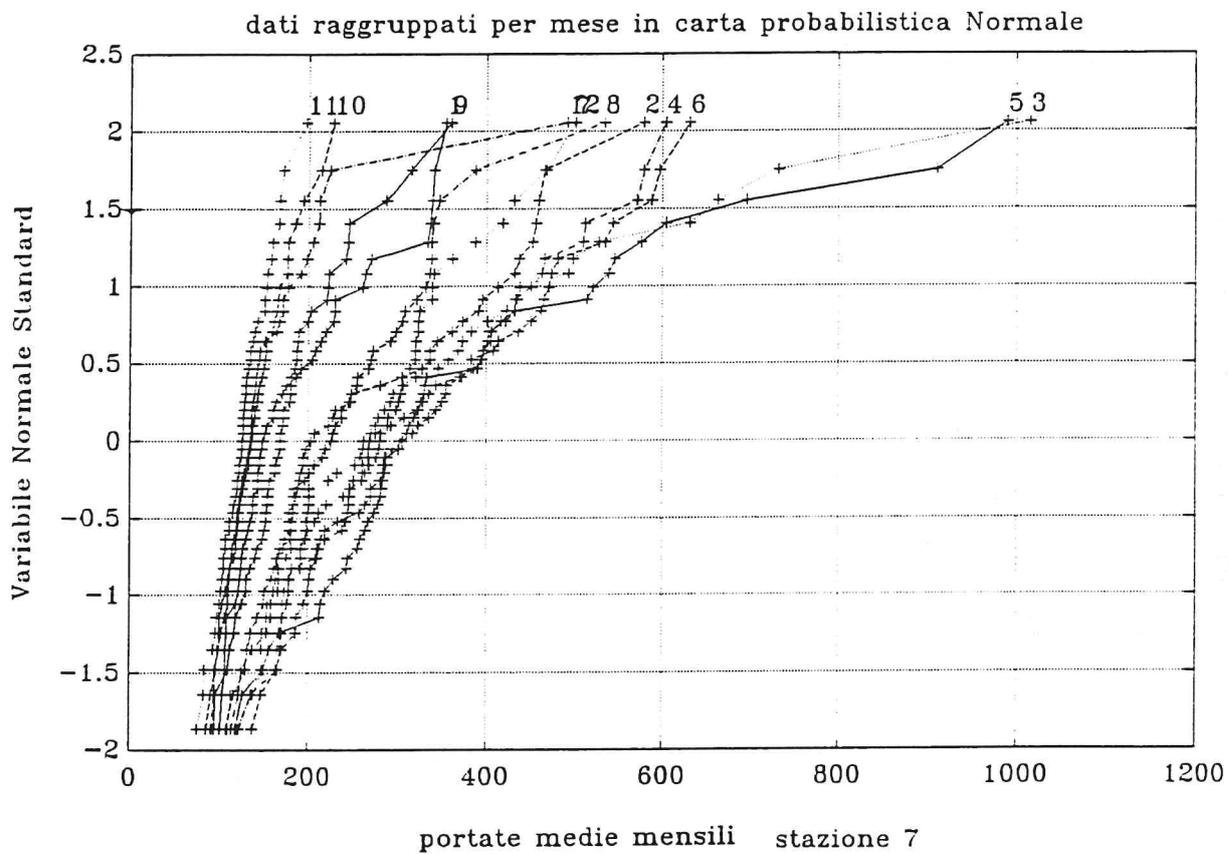


figura A 7.1.9.3