

Capitolo 2

Il rischio di nubifragio: curve di possibilità pluviometrica

Introduzione

In questo capitolo vengono presentati dei richiami teorici sulla distribuzione di Gumbel e sulle procedure di definizione delle curve di possibilità pluviometrica. Infine viene descritto il metodo, impiegato nell'applicazione web, per calcolare i parametri puntuali della legge di Gumbel a partire dalle stime delle precipitazioni massime riportate nel PAI. Parametri che in definitiva sono impiegati nella determinazione delle curve segnalatrici corrispondenti ad un generico tempo di ritorno.

2.1 La distribuzione di probabilità di Gumbel

Considerando i massimi annuali $X_{(n)}$ di una grandezza idrologica come i massimi di una serie di n variabili casuali (X_1, X_2, \dots, X_n) , se queste risultano indipendenti ed identicamente distribuite con funzione di ripartizione $F_X(x)$, in base all'assioma della probabilità composta si può scrivere la funzione di ripartizione dei massimi $X_{(n)}$ come:

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n \quad (2.1)$$

Raramente la $F_X(x)$ risulta essere nota, quando però si considerano campioni di grandi dimensioni, cosicché i valori massimi di $X_{(n)}$ risultano spostati nel campo dei valori più grandi della grandezza idrologica, è sufficiente conoscere l'andamento della $F_X(x)$ in prossimità dei valori massimi e dedurre da questo l'andamento della $F_{X_{(n)}}(x)$ per diversi valori di n .

In altre parole, per n tendente a infinito è possibile individuare la distribuzione asintotica di $X_{(n)}$ a prescindere dalla distribuzione delle variabili (X_1, X_2, \dots, X_n) , ma soltanto in base all'andamento della sua coda superiore:

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n = \left[1 - n(1 - F) + \frac{n(n-1)}{2}(1 - F)^2 + \right. \\ \left. - \frac{n(n-1)(n-2)(1 - F)}{6} + \dots \right] \quad (2.2)$$

e facendo il passaggio al limite, per n tendente all'infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_{(n)}}(x) = \left[1 - n(1 - F) + \frac{n^2}{2}(1 - F)^2 + \right. \\ \left. - \frac{n^3}{6}(1 - F)^3 + \dots \right] = e^{-n(1-F)} \quad (2.3)$$

per n sufficientemente grande si può dunque scrivere che $F_{X_{(n)}}(x) = e^{-n(1-F(x))}$. Si dimostra che la distribuzione del massimo $X_{(n)}$ tende solo a 3 distribuzioni asintotiche:

$$\Phi_1 = \exp \left[-e^{-\alpha(x-\varepsilon)} \right] \quad \alpha > 0 \quad (2.4)$$

$$\Phi_2 = \exp \left[- \left(\frac{V}{x} \right)^\vartheta \right] \quad x \geq 0, V > 0; \vartheta > 0 \quad (2.5)$$

$$\Phi_3 = \exp \left[- \left(\frac{x}{V} \right)^\vartheta \right] \quad x \leq 0, V < 0; \vartheta > 1 \quad (2.6)$$

La distribuzione asintotica del tipo 1 è conosciuta come EV1¹ o distribuzione di Gumbel. Questa vale quando la coda superiore della variabile originaria cade in maniera esponenziale, cioè se, per n abbastanza grande vale:

$$F_X(x) = 1 - e^{-g(x)} \quad (2.7)$$

essendo $g(x)$ una funzione crescente di x .

Infatti, ponendo $g(x) = \alpha x$, la (2.7) diventa:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad (2.8)$$

e con i seguenti semplici passaggi si ricava la relazione (2.4):

$$F_{X_{(n)}}(x) = e^{-n(1-F_X(x))} = \exp[-ne^{\alpha x}] = \exp[-e^{-\alpha(x-\varepsilon)}] = \Phi_1(x) \quad (2.9)$$

¹Acronimo inglese di Extreme Value.

avendo posto $n = e^{\alpha\varepsilon}$.

L'espressione (2.5) rappresenta invece la legge di distribuzione asintotica del tipo 2, nota anche come legge di Frechet. Al pari della Gumbel, per n che tende ad infinito, tende asintoticamente ad 1, ma più lentamente.

La relazione (2.6) è invece conosciuta come la distribuzione asintotica del terzo tipo, che non ha interesse in campo idrologico in quanto limitata superiormente.

Ritornando alla distribuzione del primo tipo, quella che ci interessa in questo ambito, la (2.4) può essere scritta come:

$$F_X(x) = \exp [-e^{-\alpha(x-\varepsilon)}] = \exp (-\Lambda e^{-\alpha x}), \quad \alpha > 0 \quad (2.10)$$

dove α ed ε sono i parametri della distribuzione, $\Lambda = e^{\alpha\varepsilon}$ rappresenta il numero medio di eventi indipendenti nell'intervallo di tempo $[0, t]$, mentre $1/\alpha$ è il valore medio della grandezza dell'evento.

La funzione densità di probabilità è esprimibile come:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \alpha \exp [-\alpha(x - \varepsilon) - e^{-\alpha(x-\varepsilon)}] \quad (2.11)$$

mentre si dimostra [15] che per media, varianza e moda sono valide le espressioni:

$$\mu = \varepsilon + \frac{0.57722}{\alpha} \quad (2.12)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \quad (2.13)$$

$$\tilde{x} = \varepsilon \quad (2.14)$$

Dalle relazioni (2.12) e (2.13) si ricavano quelle che esprimono i parametri α ed ε in funzione della media μ e dello scarto quadratico medio σ :

$$\varepsilon = \mu - 0.450\sigma \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma\sqrt{6}}{\pi} \quad (2.16)$$

Il parametro $1/\alpha$, che è direttamente proporzionale allo scarto quadratico medio σ , rappresenta una misura di dispersione e controlla la forma del grafico che rappresenta la funzione di densità di probabilità: quanto più α è grande, tanto più addensata è la distribuzione. Invece il parametro ε come si è visto coincide con la moda della distribuzione, per cui controlla la posizione del grafico.

Noti scarto quadratico medio σ e media μ , è possibile determinare il coefficiente di variazione Cv e quello di asimmetria Ca della distribuzione:

$$Cv = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\pi}{\sqrt{6}(\alpha\varepsilon + 0.57722)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}(\ln \Lambda + 0.57722)} \quad (2.17)$$

$$Ca = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = 1.1396 \quad (2.18)$$

Dalle relazioni sopra riportate, si evince che mentre il coefficiente di variazione Cv dipende solo da Λ , quello di asimmetria Ca è indipendente dal valore dei parametri.

Per svincolarsi dai due parametri α e ε è sufficiente introdurre la variabile ridotta

$$y = \alpha(x - \varepsilon) \quad (2.19)$$

per cui la funzione di ripartizione e quella di densità di probabilità divengono rispettivamente:

$$F(y) = \exp [-e^{-y}] \quad (2.20)$$

$$f(y) = \exp [-e^{-y} - y] \quad (2.21)$$

La moda \tilde{y} , la media $\mu(y)$ e lo scarto quadratico medio $\sigma(y)$ di questa distribuzione sono forniti dalle relazioni:

$$\tilde{y} = 0 \quad (2.22)$$

$$\mu(y) = \gamma \cong 0.5772 \quad (2.23)$$

$$\sigma(y) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \quad (2.24)$$

avendo indicato con γ la costante di Eulero.

Ricordiamo che, fissato un evento estremo X_i , per tempo di ritorno T si intende il tempo che mediamente si deve attendere affinché tale evento sia uguagliato o superato:

$$T = \frac{1}{1 - P_i} \quad (2.25)$$

avendo indicato con P_i la probabilità di non superamento corrispondente all'evento X_i fissato. Volendo conoscere il valore della grandezza in esame che è lecito attendersi dopo un tempo di ritorno T , è necessario esplicitare il quantile X_T esprimendo la funzione di ripartizione (2.10) in funzione di T :

$$X_T = \epsilon - \frac{1}{\alpha} \ln \left[\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] = \epsilon \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha \epsilon} \ln \left[\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \right\} \quad (2.26)$$

Considerando le relazioni (2.15) e (2.16) che legano i momenti teorici (stimati con il metodo dei momenti) ai parametri α ed ϵ si può pervenire ad una relazione tra il valore di progetto X_T e media e coefficiente di variazione del campione:

$$X_T = \mu \left\{ 1 - Cv \left[0.45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \left(\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right) \right] \right\} \quad (2.27)$$

In definitiva, il valore di progetto X_T risulta essere il risultato del prodotto della media μ per una quantità che rappresenta il tasso di crescita della media stessa in funzione del periodo di ritorno, quantità che è chiamata fattore di crescita con il periodo di ritorno, K_T . Per cui si può scrivere:

$$X_T = \mu K_T \quad (2.28)$$

La rappresentazione del valore atteso X_T secondo la relazione (2.28) risulta molto utile nella determinazione su base regionale delle leggi di frequenza, poiché molto spesso il fattore di crescita K_T risulta assumere un valore costante in ampie regioni. Questo tipo di rappresentazione in realtà è un caso particolare del cosiddetto *metodo indice* [16].

Tale metodo, porta a selezionare una curva di frequenza unica in ogni regione ritenuta omogenea, eliminandone un fattore di scala. Si considerino ad esempio N stazioni di misura per le quali sia disponibile una serie di dati campionari $(x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})$ di dimensione n_i : una volta identificata la legge di probabilità più adatta per ciascuna delle serie disponibili, con il metodo indice viene individuata una distribuzione unica nella regione (distribuzione regionale) dei dati preventivamente standardizzati rispetto ad una grandezza indice $\xi_{indice,i}$, detto anche fattore di scala. In altre parole, l'insieme di tali siti rappresenta una regione omogenea se le distribuzioni di probabilità nelle N stazioni di misura sono identiche a meno del fattore di scala $\xi_{indice,i}$.

La grandezza indice $\xi_{indice,i}$ in genere viene assunta pari al valore medio μ_i , modale \tilde{x}_i o mediano \check{x}_i della distribuzione relativa al sito i -esimo, mentre la curva regionale di frequenza adimensionale è la curva di crescita del valore indice col periodo di ritorno, K_T :

$$K_T = \frac{x_{i,T}}{\xi_{indice,i}}, \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad (2.29)$$

Il fattore di crescita K_T quindi dipende, per una data regione omogenea, dal modello probabilistico adottato e dal parametro ξ_{indice} preso come riferimento, e misura la variabilità relativa degli eventi alle diverse frequenze. Il valore indice invece è una grandezza locale, caratteristica del sito in esame.

Se viene assunto come valore indice la media μ_i , ed i dati locali vengono regolarizzati per mezzo della legge di Gumbel, allora la relazione (2.29) coincide con la (2.27) e K_T assume la forma seguente:

$$K_T = 1 - Cv \left[0.45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \quad (2.30)$$

Da quest'ultima relazione si evince che l'ipotesi di distribuzione unica regionale della variabile standardizzata K_T corrisponde all'ipotesi di costanza di Cv , per cui questo coefficiente è utilizzabile come criterio di omogeneità regionale.

2.2 Le curve di possibilità pluviometrica

La curva di possibilità pluviometrica, detta anche curva di possibilità climatica o curva segnalatrice, è un'espressione matematica che lega i valori delle altezze di pioggia h al tempo t di durata dell'evento piovoso. L'esperienza ha dimostrato che la relazione $h = h(t)$ si può approssimare bene con una relazione a due parametri del tipo

$$h(t) = at^n \quad (2.31)$$

essendo l'altezza di pioggia h ed il tempo t espressi rispettivamente in milimetri ed ore, mentre a ed n sono due coefficienti. Il primo rappresenta l'altezza di pioggia corrispondente ad un evento piovoso di durata unitaria (1 ora), ed è dimensionalmente espresso in mm/ora , mentre n , generalmente compreso tra 0.3 e 0.5, è detto fattore di scala, e, poiché si trova all'esponente, governa la forma della curva. Il suo andamento tipico è rappresentato nella figura 2.1. I valori assunti dai coefficienti a ed n variano nello spazio a seconda del punto considerato, per cui l'espressione della curva ha una validità limitata ad un'area di modesta estensione, e l'esperienza mostra che in una stessa località sono generalmente diversi a seconda che $t < 1$ o $t > 1$. Inoltre, i suddetti coefficienti sono tali che le curve $h = h(t)$ sono sempre crescenti, cioè l'altezza di pioggia h aumenta all'aumentare della durata t dell'evento, più rapidamente nel campo $t < 1$ e meno rapidamente per $t > 1$, mentre le curve $i = i(t)$ che rappresentano le intensità di pioggia istantanee sono decrescenti con t , più rapidamente per $t < 1$.

Per il calcolo dei coefficienti a ed n relativi ad una data località si segue una metodologia di tipo probabilistico: occorre recuperare le serie storiche dei valori $h-t$ ad esempio dagli Annali Idrologici, e per gli N anni disponibili si fa

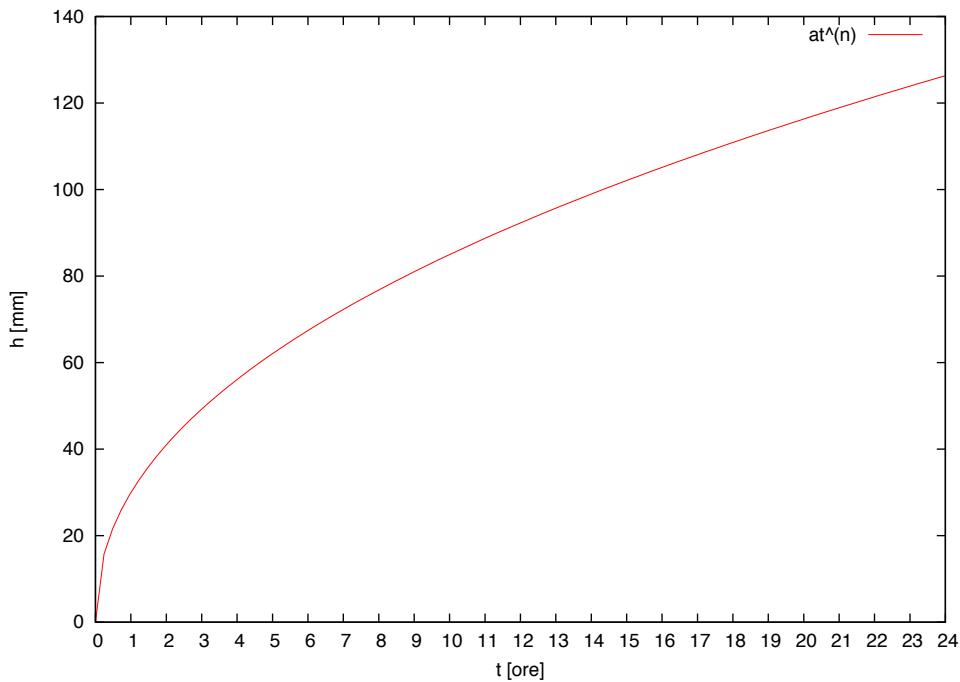


Figura 2.1: Andamento tipico della curva di possibilità pluviometrica.

riferimento alle piogge massime annuali di breve durata cadute in 1, 3, 6, 12 e 24 ore, in modo che per ogni durata t si disponga di un campione di N valori di h . Considerando le diverse serie delle altezze h_t come variabili casuali, è possibile inferire per ciascuna una funzione di ripartizione $P(h_t)$, ossia la funzione che lega h_t alla probabilità di non superamento che gli compete, tale da consentire l'estrapolazione a tempi di ritorno anche più lunghi della durata della serie osservata. La ricerca della funzione di ripartizione, per ciascun campione $(h_t - t)$, viene svolta seguendo in genere le seguenti 4 fasi:

1. formulazione dell'ipotesi di lavoro: viene scelta una legge di distribuzione di probabilità per la regolarizzazione di ogni serie di dati pluviometrici;
2. verifica dell'ipotesi di lavoro per via grafica tramite l'impiego della carta probabilistica relativa alla legge di probabilità scelta;
3. stima dei parametri della distribuzione attraverso il metodo dei momenti, oppure il metodo della massima verosimiglianza;
4. verifica dell'ipotesi di lavoro con i test statistici: definita la $P(h_t)$, è necessario verificare se gli scarti fra la funzione di ripartizione e la distri-

buzione delle frequenze cumulate debbano o meno ritenersi significativi dal punto di vista probabilistico.

Per quel che riguarda il presente lavoro, si ricorda che è già nota la legge di distribuzione di probabilità che è stata impiegata nel PAI, e che si tratta della legge di Gumbel. Vediamo dunque come la legge EV1 venga applicata al calcolo delle curve di possibilità pluviometrica.

La massima altezza di pioggia, corrispondente ad un evento di durata t e superata mediamente una volta ogni T anni, secondo la relazione (2.28) può essere scritta come:

$$h_{t,T} = \mu_t K_T \quad (2.32)$$

avendo indicato con μ_t la media della distribuzione di probabilità del massimo di altezza di pioggia per l'assegnata durata t , e con K_T è il coefficiente di crescita col tempo di ritorno T . Quest'ultimo coefficiente in generale è dipendente dal modello probabilistico adottato, e nel caso della legge di Gumbel, per quanto si è detto nella sezione precedente, vale:

$$K_T = 1 - Cv \left[0.45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \quad (2.33)$$

La media μ_t è una funzione, in quanto descrive la variazione dell'altezza media di precipitazione in funzione della durata t . Anche K_T risulta essere una funzione della durata, poiché il coefficiente di variazione Cv assume valori diversi a seconda della durata considerata. Tuttavia è lecito assumere un valore costante di Cv per tutte le durate tra 1 e 24 ore, caratteristico del processo di precipitazione estrema, dato che la variabilità di questa grandezza risulta essere piuttosto limitata.

La legge che lega la media dei massimi di precipitazione alla durata, nel caso più semplice è definibile secondo la legge di potenza:

$$\mu_t = \bar{a} t^n \quad (2.34)$$

dove \bar{a} ed n sono parametri da stimare. In particolare \bar{a} non è altro che una stima del valore μ_{1h} .

Mettendo in evidenza tutte le grandezze che intervengono nell'espressione della curva di possibilità pluviometrica, la (2.32) diventa:

$$h_{t,T} = \bar{a} \cdot K_T \cdot t^n \quad (2.35)$$

Per determinare completamente la (2.35) occorre quindi stimare complessivamente 3 parametri: la media dei massimi di pioggia per la durata di un'ora,

\bar{a} , il fattore di scala n ed il coefficiente di variazione Cv , la cui determinazione implica la conoscenza di media μ e scarto σ oppure dei parametri α ed ε della legge di Gumbel.

Dato che la relazione (2.34) è una legge di potenza, i coefficienti \bar{a} e n si possono stimare tramite regressione lineare sui valori dei logaritmi di μ_t e t . Riguardo il coefficiente di variazione Cv , come accennato sopra, per eliminarne la dipendenza dalla durata ci si può ricondurre ad un valore caratteristico dell'intero processo: in pratica, si può assumere come valore di Cv il valore medio dei coefficienti di variazione stimati per le diverse durate t .

2.3 Stima delle precipitazioni intense per tempi di ritorno arbitrari

Nel resto di questo capitolo viene esposta la procedura seguita per la determinazione della famiglia di curve di possibilità pluviometrica, in corrispondenza di ogni stazione pluviometrica ed ogni baricentro delle celle del grigliato in cui è stato discretizzato il bacino del Po. Si tratta di ricostruire tutti i parametri necessari alla definizione della relazione (2.35) a partire dalle curve segnalatrici riportate nel PAI. Per prima cosa occorre ricostruire puntualmente la legge di Gumbel, cosicché una volta noti α e ε sia possibile ricavare il coefficiente di crescita col tempo di ritorno, K_T , ed il valore medio dei massimi di precipitazione corrispondenti a $t = 1h$, ossia \bar{a} . Riguardo il coefficiente n invece si cercherà una qualche legge che ne descriva la variazione in funzione del tempo di ritorno, a partire dai dati del PAI.

2.3.1 Ricostruzione puntuale della legge di Gumbel

Nel PAI le curve di possibilità pluviometrica per il tempo di ritorno T sono espresse come

$$h_T(t) = at^n \quad (2.36)$$

dove a rappresenta l'altezza di pioggia legata ad un evento della durata di un'ora, attesa per il tempo di ritorno T . Facendo un confronto con la curva nella forma (2.35), si ricava la relazione seguente:

$$a = \bar{a}K_T = \bar{a} \left\{ 1 - Cv \left[0.45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \right\} \quad (2.37)$$

quindi l'altezza di pioggia per $t = 1$, a , è pari al prodotto della media $\mu(a) = \bar{a}$ per il tasso di crescita della media col tempo di ritorno K_T , in accordo con

quanto detto precedentemente.

Chiarito il legame che intercorre tra le due forme possiamo procedere con la ricostruzione della legge di Gumbel.

Ricordando l'espressione (2.19) della variabile ridotta per la legge di Gumbel, è possibile per ogni punto (stazione o baricentro del grigliato) scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y_{20} = \alpha(a_{20} - \varepsilon) \\ y_{500} = \alpha(a_{500} - \varepsilon) \end{cases} \quad (2.38)$$

in cui a_{20} e a_{500} sono i valori noti del coefficiente a per i tempi di ritorno di 20 e 500 anni, mentre y_{20} e y_{500} sono i valori della variabile ridotta corrispondenti a $T = 20$ e $T = 500$ anni. Stabilito il legame tra probabilità di non superamento e tempo di ritorno definito nella relazione (2.25), nota la funzione di ripartizione $P(y)$ della variabile ridotta espressa dalla (2.20), e ricordando, per come è stata definita la variabile y , che $P(a) = P(y)$, il valore della variabile ridotta corrispondente al tempo di ritorno T si può ottenere come:

$$y_T = -\ln[-\ln P(a)], \quad P(a) = 1 - \frac{1}{T}$$

E' quindi immediata la risoluzione del sistema che fornisce i valori di α ed ε , valori riferiti a $t = 1$ ora, per il punto considerato:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{y_{500} a_{20} - y_{20} a_{500}}{y_{500} - y_{20}} \\ \alpha = \frac{y_{20}}{a_{20} - \varepsilon} \end{cases}$$

2.3.2 Calcolo dei parametri a ed n

Noti i parametri α ed ε è possibile, tramite le relazioni (2.15) e (2.16), risalire a parametri statistici della popolazione degli a , ossia delle altezze di pioggia $h_{t=1}$, quali la media $\mu(a)$, lo scarto quadratico medio $\sigma(a)$ ed il coefficiente di variazione Cv :

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= \frac{1.283}{\alpha} \\ \bar{a} &= \mu(a) = \varepsilon + 0.450\sigma \\ Cv &= \frac{\sigma(a)}{\mu(a)} \end{aligned}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare il fattore di crescita della media K_T col tempo di ritorno e quindi anche il coefficiente a dalla relazione

(2.37), ma per determinare completamente le curve segnalatrici pertinenti ad un tempo di ritorno, occorre ancora calcolare il parametro n , che regola la variazione dell'altezza di pioggia in funzione della durata.

Analizzando più nel dettaglio le curve del PAI, si nota che il parametro n può assumere tre comportamenti ben definiti:

1. n cresce all'aumentare del tempo di ritorno;
2. n diminuisce all'aumentare del tempo di ritorno;
3. n varia in maniera casuale col tempo di ritorno.

Nella tabella 2.1, sia per le celle del grigliato che per le stazioni di misura, è riportato in quanti casi n assume uno dei comportamenti appena descritti.

CELLE DEL GRIGLIATO			
	n crescente	n decrescente	n casuale
Numero:	4675	16771	679
%	21.13	75.80	3.07
STAZIONI DI MISURA			
	n crescente	n decrescente	n casuale
Numero:	71	155	3
%	31.00	67.69	1.31

Tabella 2.1: Numero e percentuale dei punti in cui n aumenta, diminuisce o varia casualmente con il tempo di ritorno.

Nei primi due casi, è quindi possibile ricercare una legge che descriva la variazione di n in funzione del tempo di ritorno, tale da permettere l'estrapolazione del valore del coefficiente a tempi di ritorno qualsiasi. Nell'ultima circostanza, invece, questa maniera di procedere risulta impossibile, e l'unica via percorribile è quella di calcolare un valore medio di n , costante per qualsiasi tempo di ritorno.

Prendendo in considerazione le stazioni pluviometriche e disponendo su un diagramma cartesiano in scala semilogaritmica le quattro coppie di valori (T, n_T) , si nota che queste si allineano abbastanza bene lungo una retta, come mostrato ad esempio nella figura 2.2 nel caso della stazione di Mantova.

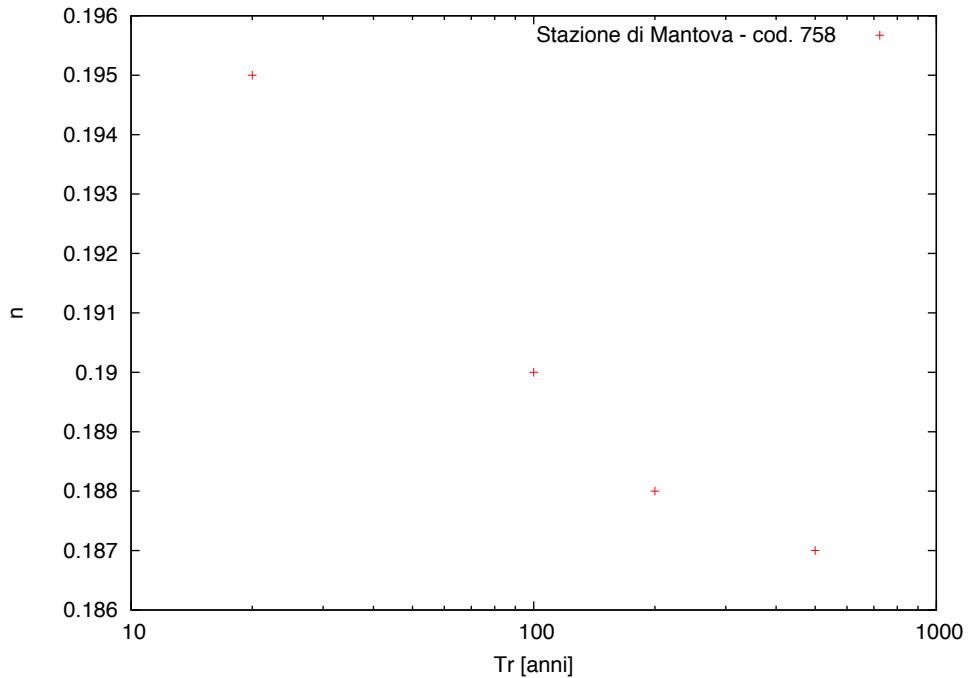


Figura 2.2: Stazione di Mantova: andamento del coefficiente n in funzione del tempo di ritorno.

La tendenza del coefficiente n a variare linearmente in funzione del logaritmo del tempo di ritorno è comune a tutti i punti, sia nel caso delle stazioni che dei punti del grigliato: si decide allora di utilizzare un'interpolazione lineare tra i valori di n corrispondenti ai tempi di ritorno $\log(20)$ e $\log(500)$ per poter determinare il coefficiente n relativo ad un tempo di ritorno qualsiasi. L'equazione della retta interpolatrice, valida nella località considerata, assume quindi l'espressione:

$$n_T = n_{20} + \frac{n_{500} - n_{20}}{\log(500) - \log(20)} [\log(T) - \log(20)] \quad (2.39)$$

2.3.3 Errori di ricostruzione

La modalità di calcolo dei parametri della distribuzione di Gumbel descritta sopra, implica che i coefficienti a che si ottengono coincidono con quelli forniti nel PAI solo per i tempi di ritorno di 20 e 500 anni, mentre per $T = 100$ e $T = 200$ anni è possibile valutare l'*errore di ricostruzione* del coefficiente a , che non è altro che lo scostamento tra il valore del PAI e quello

restituito dal calcolo, esprimibile come:

$$|a_{PAI,T} - a_T|$$

Nella tabella 2.2 sono riportati i valori minimo, massimo e medio dell'errore di ricostruzione sia per le celle del grigliato che per le stazioni di misura.

CELLE DEL GRIGLIATO			
T	E min	E max	E medio
100	0.0000	0.8192	0.0273
200	0.0000	1.7052	0.0258
STAZIONI DI MISURA			
T	E min	E max	E medio
100	0.0000	0.8290	0.0212
200	0.0000	1.8202	0.0237

Tabella 2.2: Valori dell'errore di ricostruzione di a

Come si nota dai valori riportati in tabella, sebbene lo scostamento medio sia modesto, quello massimo raggiunge dei picchi elevati, sia nel caso delle celle del grigliato che per le stazioni di misura. Si decide allora di rappresentare su un grafico l'andamento degli errori percentuali di ricostruzione (con segno), per i due tempi di ritorno, considerando tutte le 229 stazioni.

Per il tempo di ritorno di 100 anni, figura 2.3, c'è una stazione che ha un errore, pari a 0.8290, che si scosta di parecchio dalla media, la stazione Treviglio (codice 1005), mentre per $T = 200$ anni, figura 2.4, ce ne sono due, la stazione Cumiana Bivio (codice 1457) e quella denominata Breno (codice 787), i cui errori di ricostruzione valgono rispettivamente 1.8202 e 0.4504. Per tentare di comprenderne il motivo si decide di ricorrere all'ausilio della carta probabilistica di Gumbel.

Per ognuna delle 3 stazioni menzionate sono disponibili le serie storiche delle piogge intense impiegate nel PAI per la determinazione della legge probabilistica: disponendo i valori delle serie storiche relative al tempo di pioggia $t = 1$ ora sulla carta, rappresentando la corrispondente legge di Gumbel, determinata analiticamente a partire dalle serie stesse, e sovrapponendo infine i 4 valori di a calcolati nel PAI per i noti 4 tempi di ritorno, si ottengono i cartogrammi riportati nelle figure 2.5, 2.6 e 2.7. Come si nota dai cartogrammi, nel PAI vengono sempre sovrastimate le altezze di pioggia, e ciò va a favore di sicurezza. Inoltre non sempre la legge di Gumbel risulta essere la

distribuzione che meglio approssima il campione, come risulta evidente nel caso della stazione Breno.

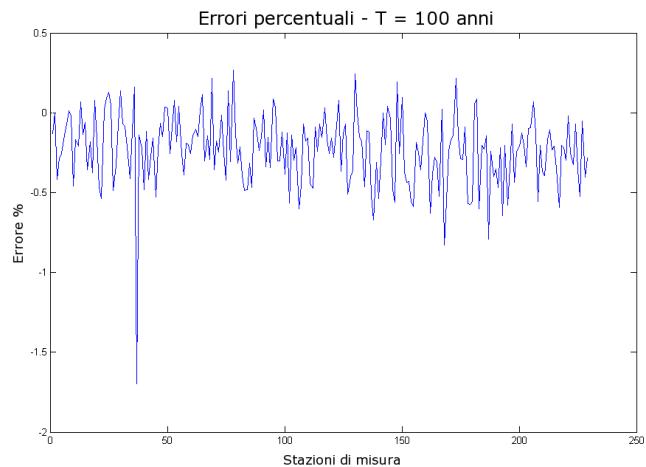


Figura 2.3: Errore di ricostruzione di a: errori percentuali, T=100.

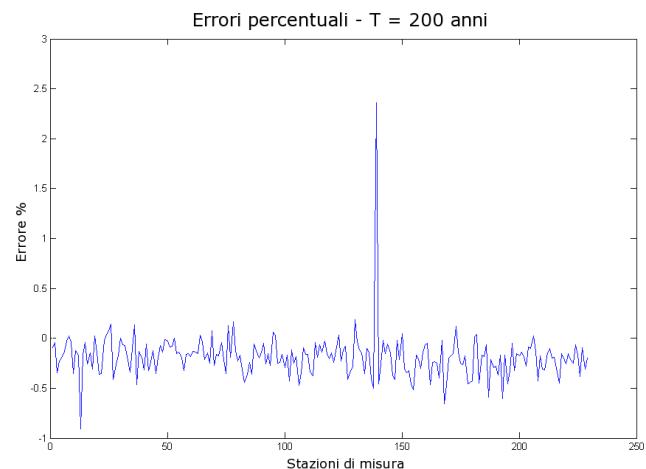


Figura 2.4: Errore di ricostruzione di a: errori percentuali, T=200.

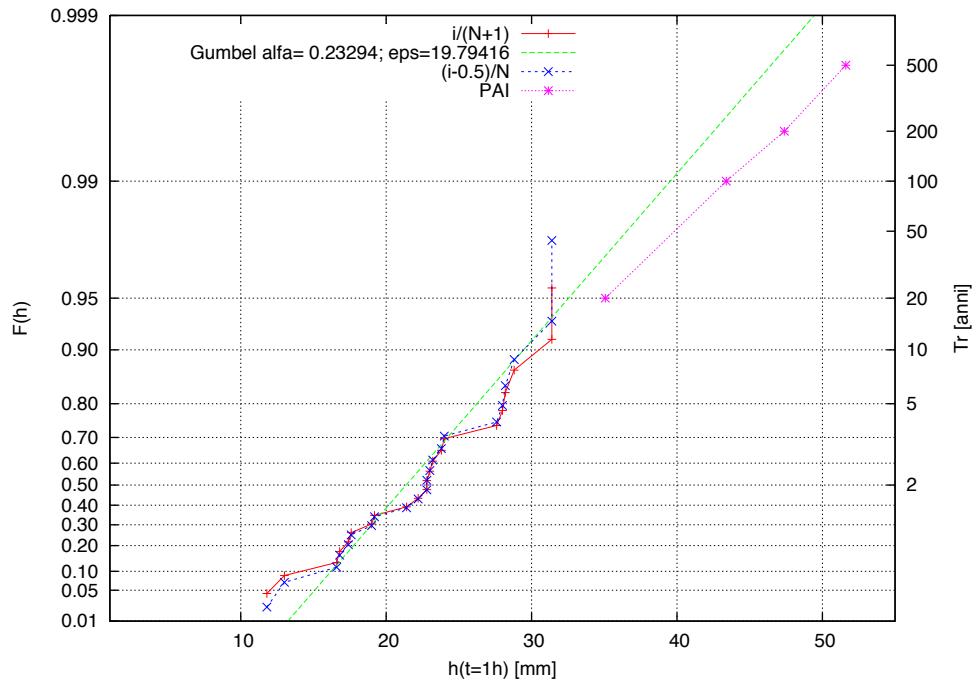


Figura 2.5: Cartogramma di Gumbel per la stazione Breno (787).

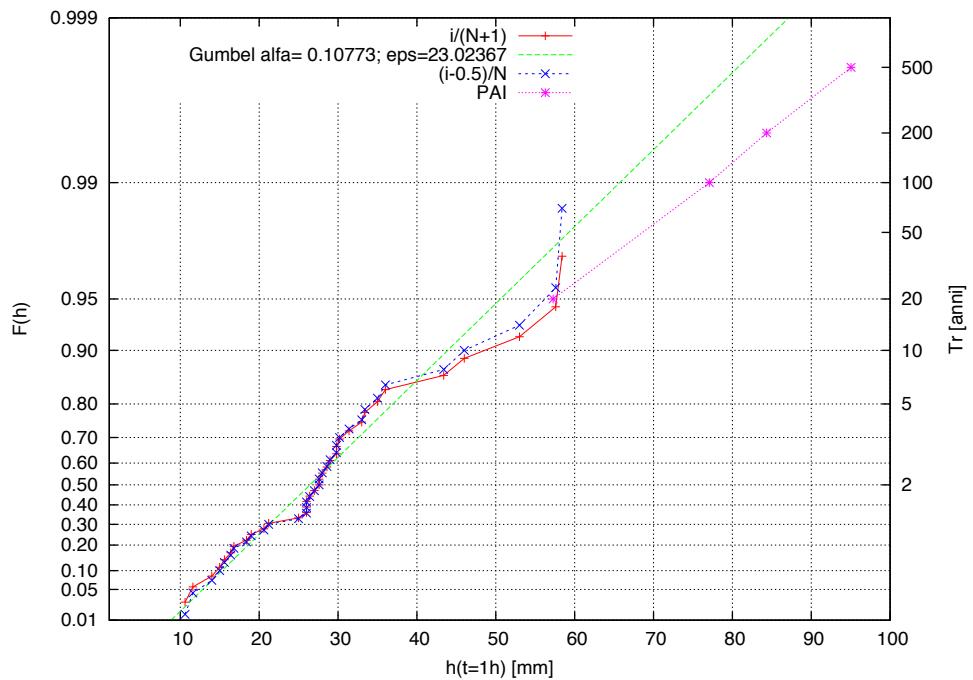


Figura 2.6: Cartogramma di Gumbel per la stazione Treviglio (1005).

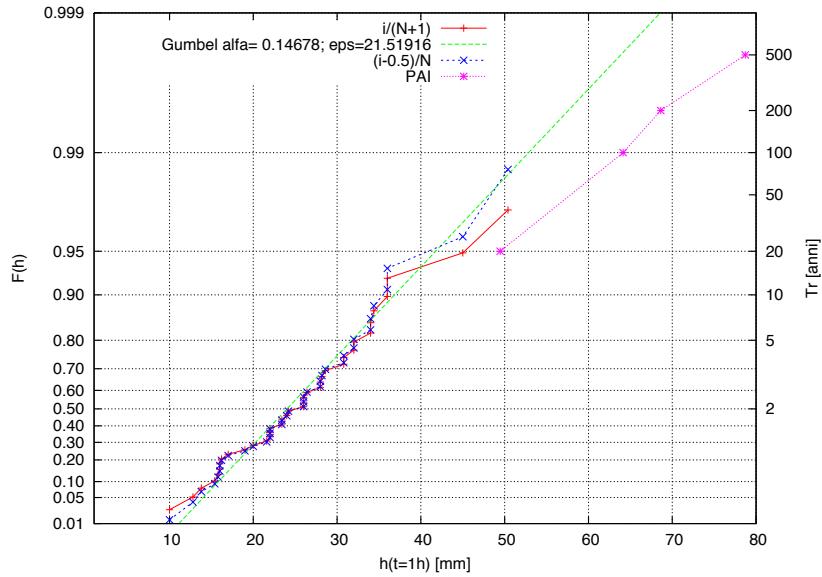


Figura 2.7: Cartogramma di Gumbel per la stazione Cumiana Bivio (1457).

Riguardo i coefficienti n , risulta che i valori di n calcolati tramite la (2.39) coincidono con quelli forniti nel PAI solo per i tempi di ritorno di 20 e 500 anni, mentre nel caso di $T = 100, 200$ anni è possibile valutare l'errore di ricostruzione come $|n_{PAI,T} - n_T|$. Nella tabella 2.3 sono indicati il valore minimo, massimo e medio dell'errore di ricostruzione per i due tempi di ritorno considerati, sia per le stazioni di misura che per le celle del grigliato, mentre le figure 2.8 e 2.9 rappresentano la distribuzione spaziale dell'errore di ricostruzione di n , relativo a $T = 100$ e $T = 200$ anni, nel caso dei punti del grigliato.

CELLE DEL GRIGLIATO				
T	E min	E max	E medio	
100	0.0000	0.0055	0.0012	
200	0.0000	0.0040	0.0010	
STAZIONI DI MISURA				
T	E min	E max	E medio	
100	0.0000	0.0043	0.0011	
200	0.0000	0.0050	0.0014	

Tabella 2.3: Valori dell'errore di ricostruzione di n .

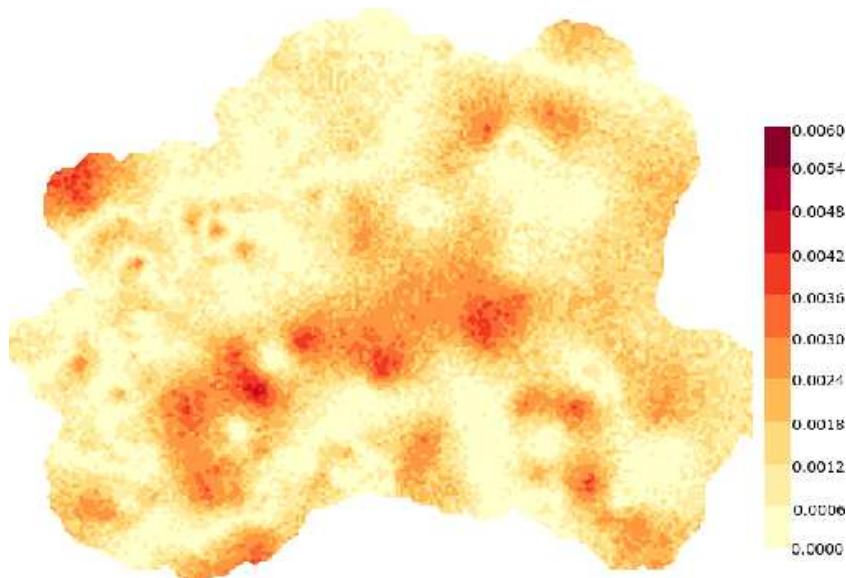


Figura 2.8: Distribuzione spaziale sul bacino del Po dell'errore di ricostruzione di n per $T = 100$.

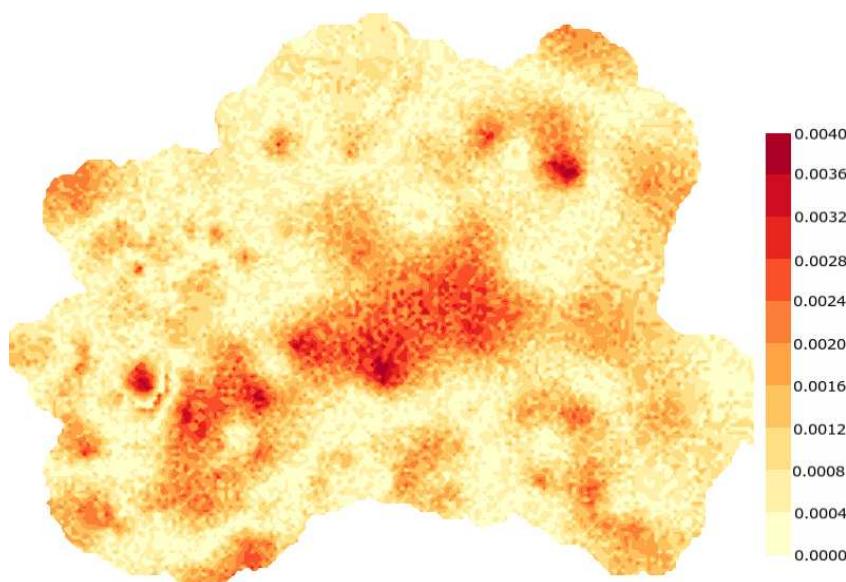


Figura 2.9: Distribuzione spaziale sul bacino del Po dell'errore di ricostruzione di n per $T = 200$.