STIMA DELLA PIENA INDICE

STIMA LOCALE

- Anche se basata su un numero molto limitato di osservazioni (5-6)

STIMA REGIONALE

1) Metodi basati su regressioni rispetto a parametri morfo-climatici

2) Metodi a base geomorfoclimatica (es. Formula razionale)

1) Metodi basati su regressioni multiple rispetto a parametri morfo-climatici

$$y = Xb + e$$

Dove:

$$y = \begin{cases} \bullet\ Q_{indice} \\ \bullet\ Q_{indice} / A \\ \bullet\ \ln(Q_{indice}) \\ \bullet\ \ln(Q_{indice} / A) \end{cases} \quad \text{con} \quad Q_{indice} = \begin{cases} \bullet\ Q_{media} \\ \bullet\ Q_{mediana} \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} \bullet\ \text{parametri morfologici} \\ \bullet\ \text{parametri climatici} \\ \bullet\ \text{parametri di uso del suolo} \end{cases}$$

b = coefficienti di regressione

e = residui della regressione

Regressione lineare semplice: definizione del modello

Variabile aleatoria Y funzione in una variabile non-random x

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

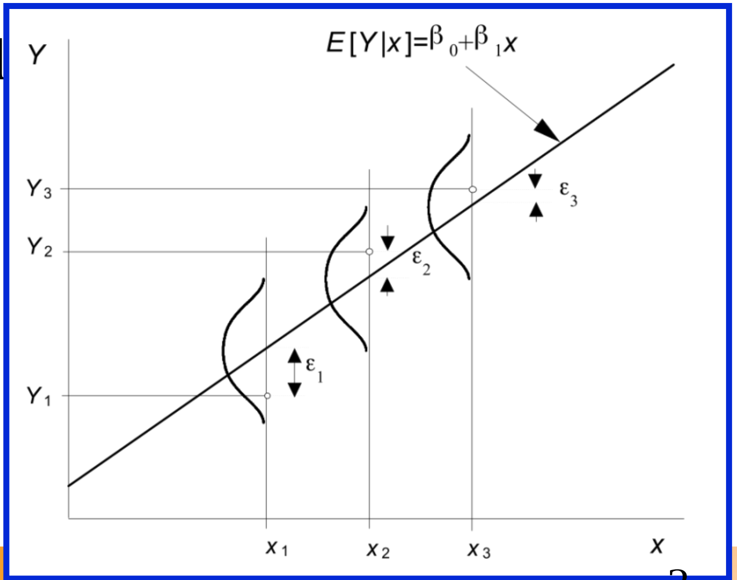
β_0 e β_1 sono parametri incogniti, coefficienti di regressione;

β_0 è l'intercetta e β_1 è il coefficiente angolare (relazione lineare tra Y e x);

Y variabile dipendente, x variabile indipendente.

La v. a. ε rappresenta la differenza tra la variabile aleatoria Y e la componente deterministica, $\beta_0 + \beta_1 x$; termine di errore.

$E[\varepsilon] = 0$ e $Var[\varepsilon] = \sigma^2$, costante e indip. d



⇓ si ricava la seguente *relazione*:

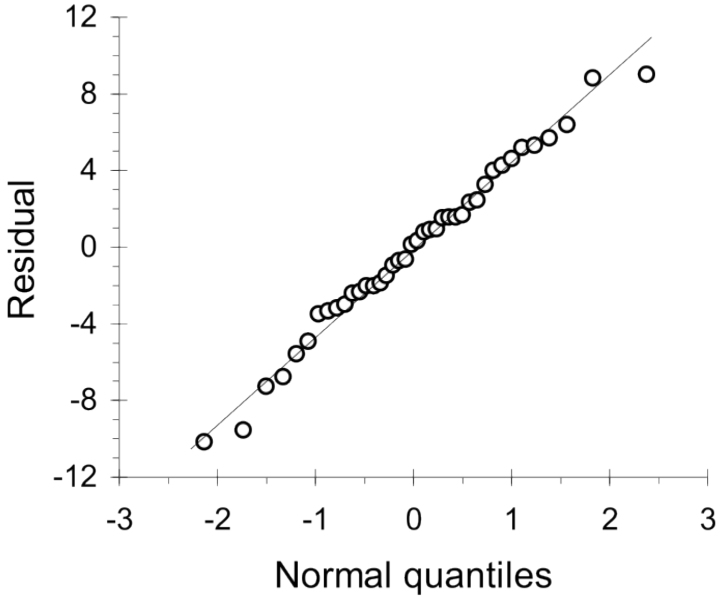
$$E[Y \mid x] = \beta_0 + \beta_1 x$$

Regressione Lineare Semplice: Controllo delle ipotesi

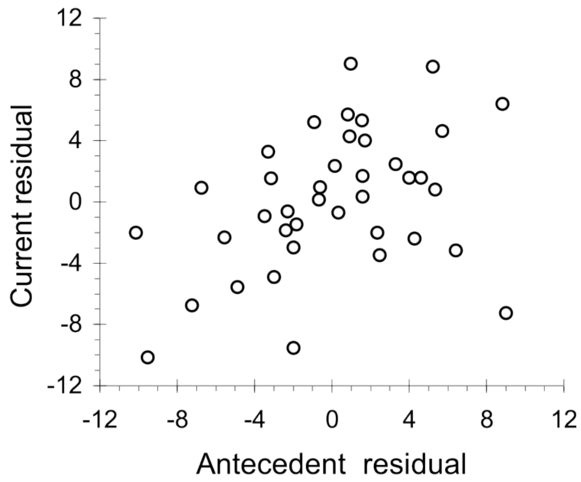
1. Controllo che $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$
2. Controllo di indipendenza dei residui

Questa analisi dovrebbe mostrare la presenza di outliers o osservazioni "viziate" da errori di misura

1.Carta probabilistica Normale



2.Controllo indipendenza dei residui



Regressione Lineare Multipla: Definizione del modello

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_{p\text{-}1} x_{p\text{-}1} + \varepsilon$$

Y è la variabile da spiegare, x_1, x_2,...,$x_{p\text{-}1}$ sono p-1 variabili esplicative, β_0, β_1, β_2,..., $\beta_{p\text{-}1}$ sono p parametri (coefficienti di regressione). I parametri β_1, β_2,..., $\beta_{p\text{-}1}$ sono chiamati coefficienti di regressione parziale.

ε rappresenta il termine di errore, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Regressione Lineare Multipla: stima dei parametri attraverso il metodo dei minimi quadrati

I p parametri incogniti β_0, β_1, β_2,..., $\beta_{p\text{-}1}$ sono rappresentati dal vettore colonna β di dimensione $(p \times 1)$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix}$$

Regressione Lineare Multipla: stima dei parametri

Le osservazioni x_{ij} sono contenute nella matrice di dimensione $(n \times p)$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p-1} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np-1} \end{bmatrix}$$

Gli n termini di errore ε_i e le n osservazioni della variabile Y sono contenuti nei vettori ε and Y di dimensione $(n \times 1)$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Il modello di regressione multipla può essere scritto in forma matriciale come

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Regressione Lineare Multipla: Stima dei parametri

Il valore medio $E[\mathrm{Y}]$ di Y è

$$E[\mathrm{Y}] = \mathrm{X}\beta$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} \ldots - \beta_{p-1} x_{ip-1})^2$$

Minimizzazione somma quadratica degli scarti

$$\begin{cases} \partial S^2/\partial \beta_0 = 0 & n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_{ip-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \partial S^2/\partial \beta_1 = 0 & \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ip-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \partial S^2/\partial \beta_{p-1} = 0 & \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ip-1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ip-1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} x_{ip-1} \ldots + \hat{\beta}_{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_{ip-1} x_{ip-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{ip-1} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{X}^T\mathrm{X}\ \hat{\beta} = \mathrm{X}^T\mathrm{y}} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = (\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^T\mathrm{y}}$$

Adattamento dei dati al modello (1)

Coefficiente di determinazione, R^2 (coefficiente di correlazione multipla)

$$R^2 = 1 - \frac{SS_E}{SS_y}$$

dove $$SS_E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad SS_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Fornisce la quota di variabilità di Y spiegata attraverso le variabili esplicative x_i.
R^2=1 perfetto adattamento del modello ai dati

Coefficiente di deteminazione R^2_{adj} (corretto in base al numero *p* dei parametri)
n è il numero delle osservazioni

$$R^2 adj = 1 - \frac{SS_E}{SS_y} \frac{n-1}{n-p}$$

Esempio: stima della piena indice per i bacini piemontesi

$$q_{indice} = c_0 \times A^{c1}$$

$$q_{indice} = \mathrm{c}_0 \times A^{c1} \times a_1^{c2}$$

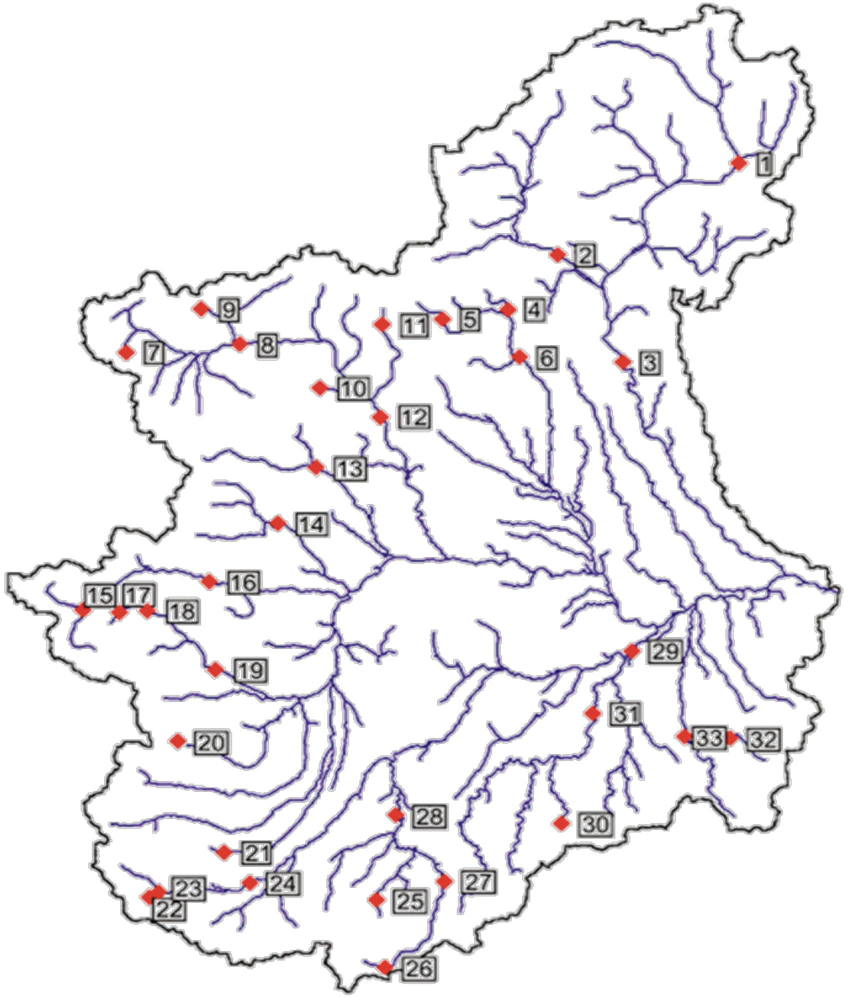
$$q_{indice} = \mathrm{c}_0 \times A^{c1} \times a_1^{c2} \times n^{c3}$$

$$q_{indice} = \mathrm{c}_0 \times A^{c1} \times a_1^{c2} \times n^{c3} \times DH^{c4}$$

$$q_{indice} = \mathrm{c}_0 \times A^{c1} \times a_1^{c2} \times n^{c3} \times DH^{c4} \times S^{c5}$$

esame di una serie di modelli di regressione con numero variabile di parametri

Esempio: stima della piena indice per i bacini piemontesi

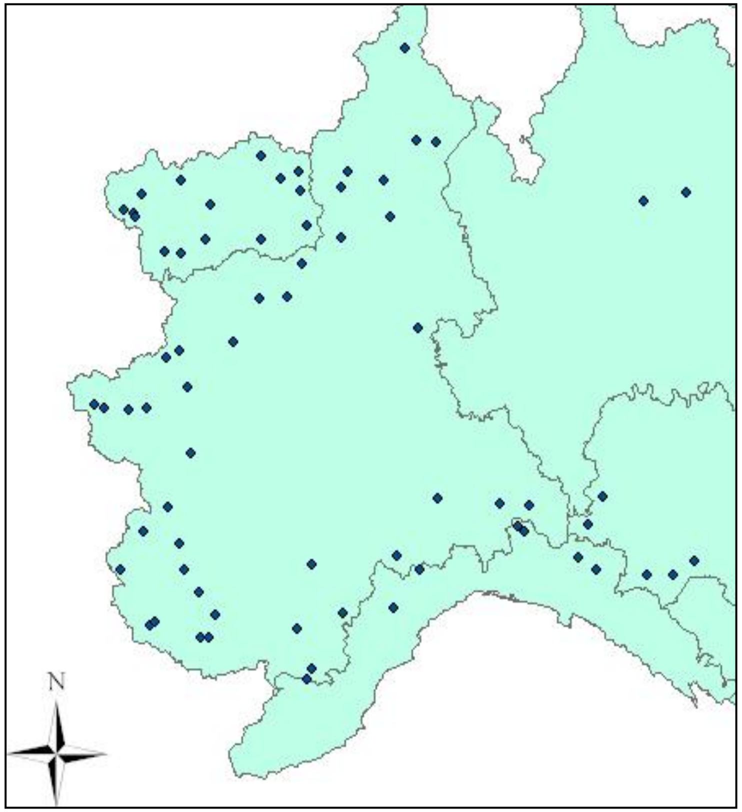


Dati utilizzati in Piemonte

Massimi annui delle portate al colmo di piena e delle portate medie giornaliere in 81 stazioni, di cui:

- 58 storiche (S.I.M.N)
- 13 Enel
- 26 sbarramenti (sui 46 di interesse) di cui 10 con misure al colmo

Parametri geomorfoclimatici considerati (Caso Piemonte)



44 parametri geomorfoclimatici:

- morfologia (30): area, lunghezza asta principale, rapporti di Horton, pendenze, coord. punti caratteristici del bacino, etc.;
- suolo (7): indici di uso del suolo (Corine), CN, permeabilità apparente;
- piovosità (7): a, n, afflusso medio annuo, regimi pluviometrici.

Criteri seguiti (Caso Piemonte)

Si sono considerati modelli di regressione:

→ *parsimoniosi :* le variabili esplicative sono al massimo 4

→ caratterizzati da una buona *capacità descrittiva* (misurabile in termini di R^2)

→ per cui tutte le variabili esplicative coinvolte siano *significative* (test di Student con livello di significatività =1 %)

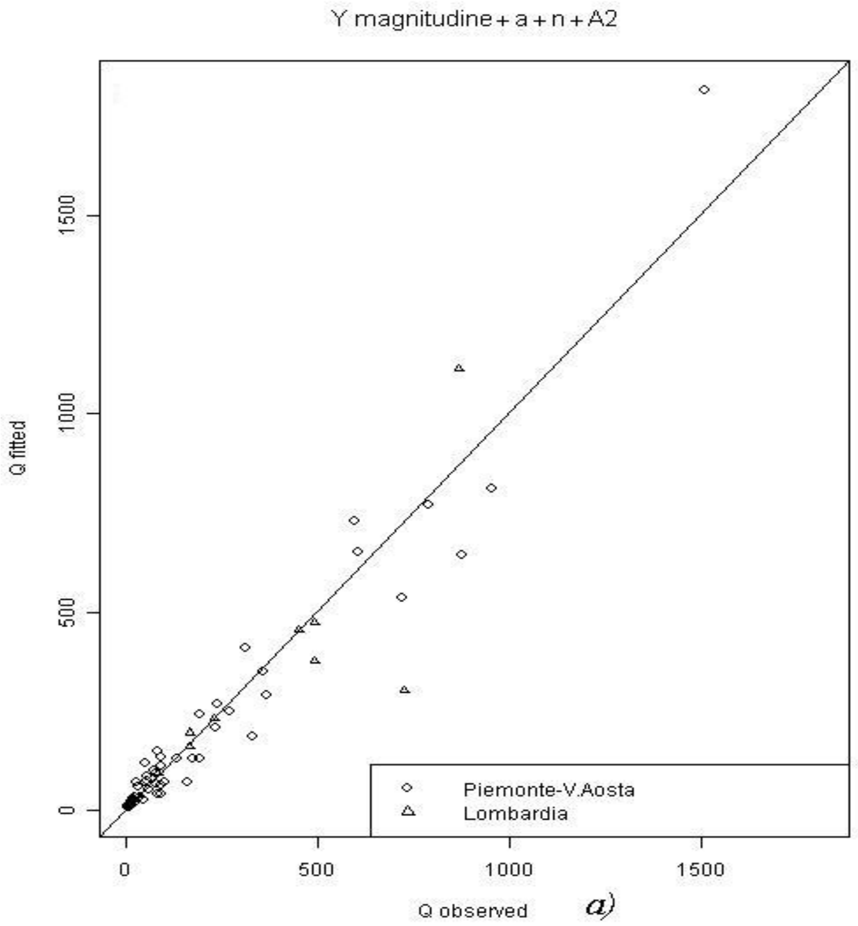
→ *stabili* al variare dei dati di taratura (*assenza di multicollinearità*, cioè dipendenti da grandezze non correlate tra loro)

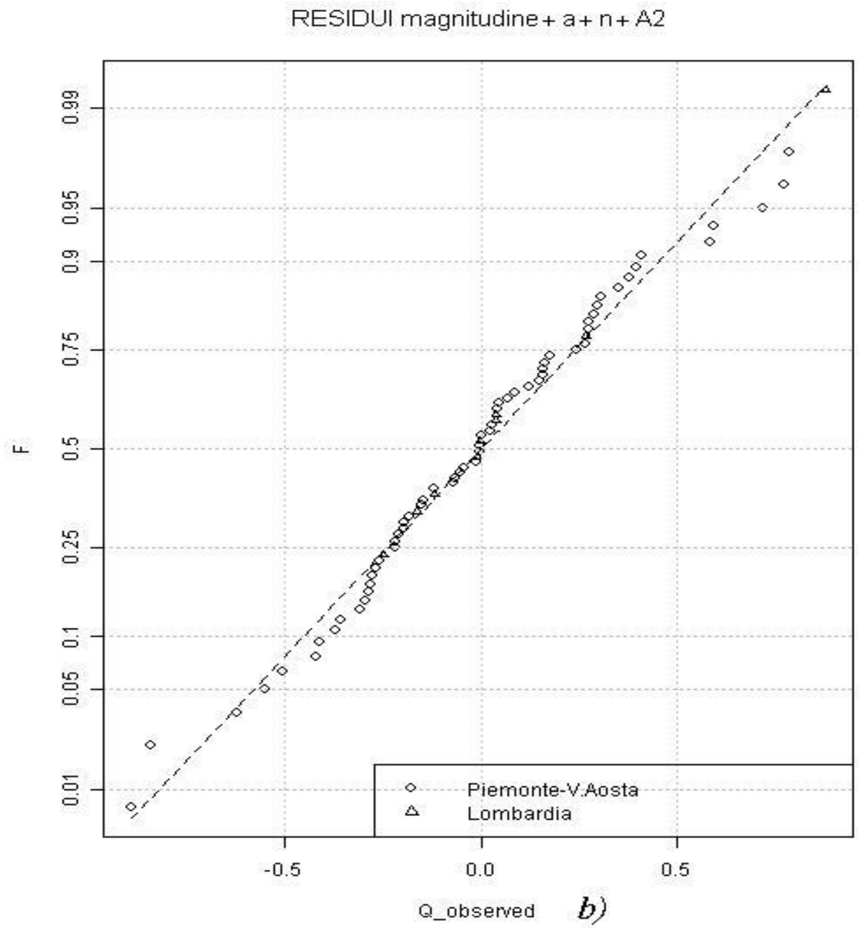
ANALISI DEI RISULTATI MEDIANTE:

- verifica delle caratteristiche dei residui

- calcolo delle *statistiche d'errore* (*RMSE, MAE e MAPE*) riferite ad una *y* convenzionale (*Q/A*)

Verifica di qualità di adattamento e delle caratteristiche dei residui





Qualità di adattamento

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2} \qquad MAE = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\left|y_j - \hat{y}_j\right| \qquad MAPE = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{y_j - \hat{y}_j}{y_j}\right|$$

- ✓ RMSE= Root Mean Square Error (conferisce un peso maggiore agli errori più elevati)
- ✓ MAE= Mean Absolute Error (conferisce un peso lineare agli errori più elevati)
- ✓ MAPE= Mean Absolute Percent Error (conferisce ad ogni errore lo stesso peso)
- ✓ R^2_{adj} (corretto in base al numero dei parametri)

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{y^T y - \beta^T X^T y}{y^T y - \frac{1}{s}\left(\sum_{j=1}^{j} y_j\right)^2} \cdot \frac{(s-1)}{(s-p)}$$

- ✓ Importante valutare il comportamento in siti non strumentati:

CALCOLO DELLE STATISTICHE DOPO LA PROCEDURA DI *CROSS - VALIDAZIONE*

Esempio: stima della piena indice per i bacini piemontesi

$$y = ln\ (Q_{indice}\ /\ A)$$

X_1	X_2	X_3	X_4	Intercett a	Coeff. X_1	Coeff. X_2	Coeff. X_3	Coeff. X_4	R^2	RMSE postCV	MAPE postCV
a				-6.004	1.805				0.72	0.37	0.31
Slope_medio1	afflusso			-16.301	-0.963	2.68			0.78	0.32	0.34
Y_sc	Lungh_vett_or	a		-282.74	17.92	-0.36	2.21		0.83	0.32	0.39
Lungh_vett_or	a	n	A_2	-7.52	-0.23	2.82	2.45	-0.63	0.85	0.34	0.31

Relazione finale di stima

Considerati:

✓ gli errori;

✓ l'allineamento dei punti (y_{fitted}, $y_{observed}$) sulla bisettrice;

✓ la facilità di determinare i descrittori

la migliore relazione stimata è:

$$\overline{Q} = 1.5243 \cdot 10^{-4} \cdot C_{H_{med}} \cdot \mathrm{aff} \cdot a \cdot A^{0.5(1+n)}$$

$\overline{Q}$ = piena indice in m³/s

$$C_{H_{med}} = \ln\left(e - (e-1)\frac{H_{med}}{3500}\right)$$

A = area del bacino in Km²

Hmed =quota media del bacino

a [mm/h] ed n [] = coefficienti della CPP

aff =afflusso medio annuo

Relazione da modello regressivo ARPIEM 2012

$$Q_{\text{ind}} = 0.01324 \cdot \text{area}^{0.7995} \cdot \text{IDF}_a^{2.82089} \cdot \text{IDF}_n^{2.06805} \cdot \text{LCV}_{1h}^{1.33232}.$$