

DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' PER L'IDROLOGIA

18 ottobre 2016

Indice

2	Schede distribuzione	7
2.1	Distribuzione uniforme	7
2.2	Distribuzione esponenziale	9
2.3	Distribuzione Normale	10
2.4	Distribuzione Lognormale a 2 parametri	12
2.5	Distribuzione lognormale a 3 parametri	13
2.6	Distribuzione di Gumbel	15
2.7	Distribuzione GEV	17

Note di versione:

Rispetto alla edizione 2011 le variazioni sono:

corretto un refuso sulla nota della LN

corrette le espressioni dei logaritmi di Gumbel e GEV

specificate le espressioni per il coefficiente di asimmetria della GEV

Corretto il pedice di TAU in TAU3 negli L-momenti della GEV

Capitolo 2

Schede distribuzione

2.1 Distribuzione uniforme

$$F(x) = \frac{x - \theta_{1i}}{\theta_{1s} - \theta_{1i}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_{1s} - \theta_{1i}}$$

$$x(F) = \theta_{1i} + (\theta_{1s} - \theta_{1i})F$$

<i>Momenti</i>	<i>L Momenti</i>
$\mu = \frac{1}{2}(\theta_{1i} + \theta_{1s})$	$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\theta_{1i} + \theta_{1s})$
$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\theta_{1s} - \theta_{1i})^2$	$\lambda_2 = \frac{1}{6}(\theta_{1s} - \theta_{1i})$
$c_v = \frac{2}{\sqrt{12}} \frac{(\theta_{1s} - \theta_{1i})}{(\theta_{1i} + \theta_{1s})}$	$\tau_3 = 0$
$\gamma = 0$	$\tau_4 = 0$
<i>Parametri(M)</i>	<i>Parametri(L_M)</i>
$\theta_{1s} = 2\mu - \theta_{1i}$	$\theta_{1s} = 2\lambda_1 - \theta_{1i}$
$\theta_{1i} = \theta_{1s} - 2\sqrt{3}\sigma$	$\theta_{1i} = \theta_{1s} - 6\lambda_2$

Proprietà

La distribuzione uniforme viene generalmente utilizzata per generare campioni casuali da qualsiasi altra distribuzione, oppure per assegnare una probabilità ad una variabile casuale di cui non si hanno informazioni disponibili e per cui non si possa ipotizzare un'altra distribuzione a priori.

E' utilizzata per rappresentare variabili aleatorie continue di cui è noto a priori che i loro valori possibili appartengono ad un dato intervallo e all'interno di questo intervallo tutti i valori sono equiprobabili.

Per tale motivo al posto di θ_1 e θ_2 (parametri di posizione e scala) vengono introdotti due parametri che definiscono l'intervallo di probabilità: θ_{1i} e θ_{1s} detti appunto *limite inferiore* e *superiore della distribuzione* (infatti il campo di esistenza è compreso tra questi due estremi).

2.2 Distribuzione esponenziale

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}}$$

$$x(F) = \theta_1 - \theta_2 \ln(1 - F)$$

<i>Momenti</i>	<i>L Momenti</i>
$\mu = \theta_1 + \theta_2$	$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2$
$\sigma^2 = \theta_2^2$	$\lambda_2 = \theta_2/2$
$c_v = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$	$\tau_3 = 1/3$
$\gamma = 2$	$\tau_4 = 1/6$
$k = 9$	

<i>Parametri(M)</i>	<i>Parametri(L_M)</i>
$\theta_1 = \mu - \sigma$	$\theta_1 = \lambda_1 - 2\lambda_2$
$\theta_2 = \sigma$	$\theta_2 = 2\lambda_2$

Proprietà speciali

E' una funzione di distribuzione continua, strettamente correlata con la funzione di distribuzione di Poisson nel senso che se gli eventi della variabile aleatoria sono distribuiti secondo una distribuzione di Poisson, allora i tempi fra arrivi successivi (τ) sono distribuiti secondo una distribuzione esponenziale.

$$f(\tau) = \Lambda e^{-\Lambda\tau} \text{ per } 0 \leq \tau \leq \infty, \Lambda > 0$$

Il parametro della distribuzione di Poisson Λ , uguale al numero medio di arrivi nell'unità di tempo corrisponde allora al reciproco del tempo medio di attesa: $E[X] = 1/\Lambda$

2.3 Distribuzione Normale

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2} \right)^2} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2} \right)^2}$$

$$x(F) = \theta_1 + \theta_2 \Phi^{-1}(F)$$

<i>Momenti</i>	<i>L Momenti</i>
$\mu = \theta_1$	$\lambda_1 = \theta_1$
$\sigma^2 = \theta_2^2$	$\lambda_2 = 0,5642\theta_2$
$c_v = \frac{\theta_2}{\theta_1}$	$\tau_3 = 0$
$\gamma = 0$	$\tau_4 = 0.1226$
$k = 3$	

<i>Parametri(M)</i>	<i>Parametri(L_M)</i>
$\theta_1 = \mu$	$\theta_1 = \lambda_1$
$\theta_2 = \sigma$	$\theta_2 = \pi^{1/2} \lambda_2$

Forma Canonica

Variabile normale standardizzata o ridotta

$$y = \frac{(x-\mu)}{\sigma} = \frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$F(-y) = 1 - F(y)$$

Valori notevoli di $y(F)$ e di $F(y)$

$$F(y) = (0.025, 0.50, 0.975)$$

$$y = (-1.96, 0.00, 1.96)$$

$$y = (-2.0, -1.0, 0.0, 1.0, 2.0)$$

$$F(y) = (0.0228, 0.1587, 0.5, 0.8413, 0.9772)$$

Rappresentazione in carta probabilistica

$$F_i = F(x_i) = \frac{i-\alpha}{N-2\alpha+1}$$

$$\alpha = \frac{3}{8} \cong \frac{1}{2}$$

$$x = \mu + u\sigma = \theta_1 + y\theta_2$$

$$y = \frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}$$

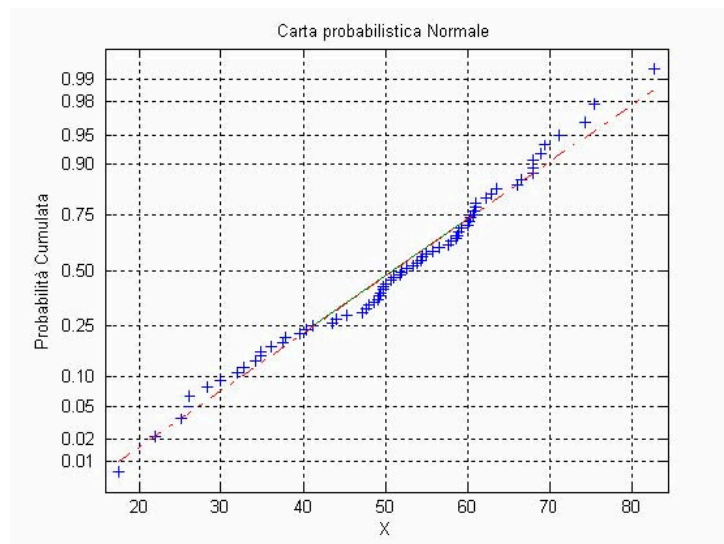


Figura 2.1

2.4 Distribuzione Lognormale a 2 parametri

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(x) - \theta_1}{\theta_2} \right)^2 \right] dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x \theta_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(x) - \theta_1}{\theta_2} \right)^2 \right] \quad x > 0$$

$$x(F) = \exp [\theta_1 + \theta_2 \Phi^{-1}(F)] \quad \theta_2 > 0$$

Momenti

$$\mu = \exp(\theta_1 + \theta_2^2/2)$$

$$\sigma^2 = [\exp(\theta_2^2) - 1] \exp(2\theta_1 + \theta_2^2)$$

L Momenti

$$\lambda_1 = \exp(\theta_1 + \theta_2^2/2)$$

$$\lambda_2 = e^{\theta_1 + \theta_2^2/2} [2\Phi(\theta_2/\sqrt{2}) - 1]$$

Parametri(M)

$$\theta_1 = \ln \mu - 1/2 \ln(1 + \sigma^2/\mu^2)$$

$$\theta_2 = \sqrt{\ln(1 + \sigma^2/\mu^2)}$$

Parametri(L_M)

$$\theta_1 = \ln \lambda_1 - \theta_2^2/2$$

$$\theta_2 = \sqrt{2} \Phi^{-1} \left(\frac{\tau+1}{2} \right)$$

Note

Il simbolo $\Phi(\cdot)$ rappresenta la funzione di probabilità cumulata della distribuzione Normale standard, e $\Phi^{-1}(\cdot)$ la relativa funzione quantile.

Proprietà speciali

Connessione con parametri della Distribuzione Normale della grandezza $y = \ln x$

La variabile casuale x ha distribuzione lognormale, con parametri θ_1 e θ_2 , se $\ln x$ ha distribuzione normale con media θ_1 e deviazione standard θ_2 .

La distribuzione lognormale si utilizza per rappresentare variabili aleatorie continue che si ritengono avere distribuzione asimmetrica.

2.5 Distribuzione lognormale a 3 parametri

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_3(x-\theta_1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x-\theta_1)-\theta_2}{\theta_3}\right)^2\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log(x-\theta_1)-\theta_2}{\theta_3}\right)$$

$$x(F) = \theta_1 + \exp(\theta_2 + \theta_3\Phi^{-1}(F))$$

Momenti

$$\mu = \theta_1 + \exp(\theta_2 + \theta_3^2/2)$$

$$\sigma^2 = [\exp(\theta_3^2) - 1] \exp(2\theta_2 + \theta_3^2)$$

$$\gamma = [\exp(\theta_3^2) + 2] \sqrt{\exp(\theta_3^2) - 1}$$

$$\kappa = e^{4\theta_3^2} + 2e^{3\theta_3^2} + 3e^{2\theta_3^2} - 3$$

L Momenti

$$\lambda_1 = \theta_1 + \exp(\theta_2 + \theta_3^2/2)$$

$$\lambda_2 = \exp(\theta_2 + \theta_3^2/2)[2\Phi(\theta_3/\sqrt{2}) - 1]$$

$$\tau_3 \approx \theta_3 \frac{A_0 + A_1\theta_3^2 + A_2\theta_3^4 + A_3\theta_3^6}{1 + B_1\theta_3^2 + B_2\theta_3^4 + B_3\theta_3^6}$$

$$\tau_4 \approx \tau_4^0 + \theta_3^2 \frac{C_0 + C_1\theta_3^2 + C_2\theta_3^4 + C_3\theta_3^6}{1 + D_1\theta_3^2 + D_2\theta_3^4 + D_3\theta_3^6}$$

Parametri(M)

$$\theta_1 = \mu - \frac{\sigma}{t}$$

$$\theta_3 = \sqrt{\log\left(1 + \frac{\sigma^2}{(\mu - \theta_1)^2}\right)}$$

$$\theta_2 = \log(\mu - \theta_1) - \frac{\theta_3^2}{2}$$

$$t = \sqrt[3]{\phi + \psi} + \sqrt[3]{\phi - \psi}$$

$$\phi = \frac{\mu_3}{2\sigma^3}$$

$$\psi = \frac{\mu_3^2}{4\sigma^6} + 1$$

Parametri(L_M)

$$\theta_1 = \xi - \frac{\alpha}{k}$$

$$\theta_2 = \log\left(-\frac{\alpha}{k}\right)$$

$$\theta_3 = -k$$

$$k \approx -\tau_3 \frac{E_0 + E_1\tau_3^2 + E_2\tau_3^4 + E_3\tau_3^6}{1 + F_1\tau_3^2 + F_2\tau_3^4 + F_3\tau_3^6}$$

$$\alpha = \frac{\lambda_2 k e^{-\theta_3^2/2}}{1 - 2\Phi(-\theta_3/\sqrt{2})}$$

$$\xi = \lambda_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3}(1 - e^{\theta_3^2/2})$$

Note

Il simbolo $\Phi(\cdot)$ rappresenta la funzione di probabilità cumulata della distribuzione Normale standard, e $\Phi^{-1}(\cdot)$ la relativa funzione quantile.

I coefficienti di approssimazione riportati nell'equazioni relative agli L-momenti sono descritti da Hosking & Wallis (1997) e validi per $|\tau_3| \leq 0.94$.

$\tau_4^0 = 1.2260172 \times 10^{-1}$		
$A_0 = 4.8860251 \times 10^{-1}$	$C_0 = 1.8756590 \times 10^{-1}$	$E_0 = 2.0466534$
$A_1 = 4.4493076 \times 10^{-3}$	$C_1 = -2.5352147 \times 10^{-3}$	$E_1 = -3.6544371$
$A_2 = 8.8027039 \times 10^{-4}$	$C_2 = 2.6995102 \times 10^{-4}$	$E_2 = 1.8396733$
$A_3 = 1.1507084 \times 10^{-6}$	$C_3 = -1.8446680 \times 10^{-6}$	$E_3 = -0.20360244$
$B_1 = 6.4662924 \times 10^{-2}$	$D_1 = 8.2325617 \times 10^{-2}$	$F_1 = -2.0182173$
$B_2 = 3.3090406 \times 10^{-3}$	$D_2 = 4.2681448 \times 10^{-3}$	$F_2 = 1.2420401$
$B_3 = 7.4290680 \times 10^{-5}$	$D_3 = 1.1653690 \times 10^{-4}$	$F_3 = -0.21741801$

2.6 Distribuzione di Gumbel

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

$$x(F) = \theta_1 - \theta_2 \ln[-\ln(F)]$$

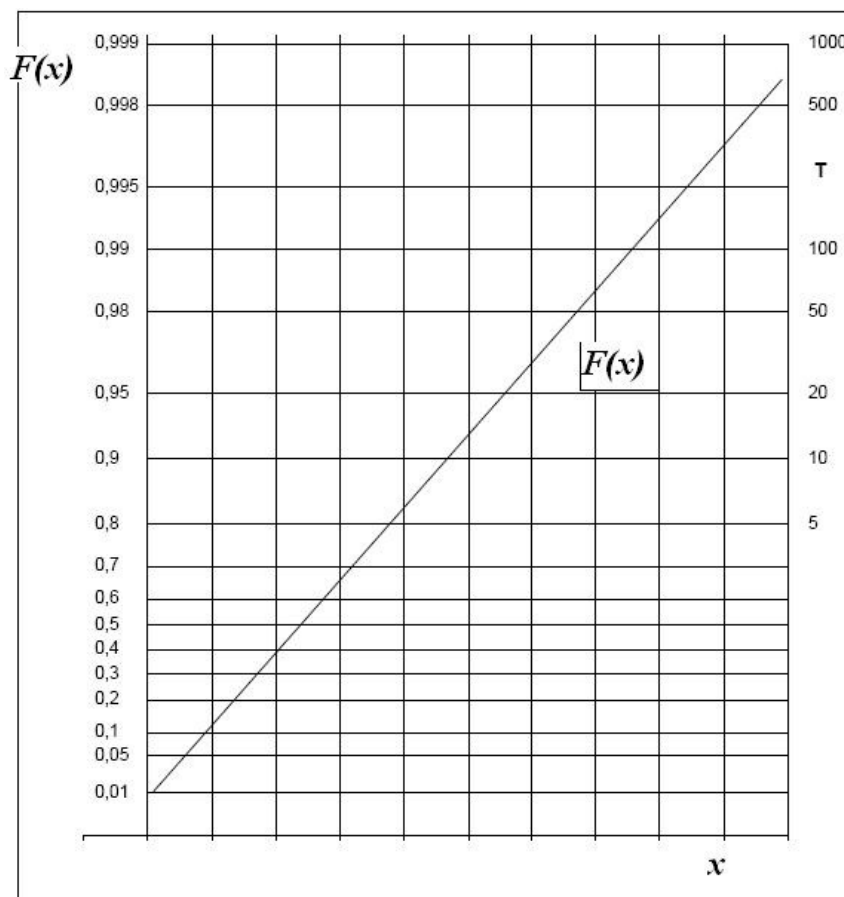
<i>Momenti</i>	<i>L Momenti</i>
$\mu = \theta_1 + 0,5772\theta_2$	$\lambda_1 = \theta_1 + 0,5772\theta_2$
$\sigma^2 = \pi^2(\theta_2^2/6)$	$\lambda_2 = \theta_2 \ln 2$
$\gamma = 1,1396$	$\tau_3 = 0,1699$
$\kappa = 5 + 2/5$	$\tau_4 = 0,1504$
<i>Parametri(M)</i>	<i>Parametri(L_M)</i>
$\theta_1 = \mu - 0,5772\sigma(\sqrt{6}/\pi)$	$\theta_1 = \lambda_1 - 0,5772\theta_2$
$\theta_2 = \sigma(\sqrt{6}/\pi)$	$\theta_2 = \lambda_2/\log 2$

Forma Canonica

Variabile normale standardizzata o ridotta

$$y = \frac{1}{\theta_2}(x - \theta_1)$$

$$F(y) = \exp[-\exp^{-y}]$$



Esempio di carta probabilistica di Gumbel

Figura 2.2: Esempio di carta probabilistica di Gumbel.

2.7 Distribuzione GEV

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(1-\theta_3)y-e^{-y}}$$

$$y = \begin{cases} -\theta_3^{-1} \ln\{1 - \theta_3(x - \theta_1)/\theta_2\} , & \theta_3 \neq 0 \\ (x - \theta_1)/\theta_2 , & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$x(F) = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2[1 - (-\ln F)^{\theta_3}]/\theta_3 , & \theta_3 \neq 0 \\ \theta_1 - \theta_2 \ln(-\ln F) , & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Momenti

$$\mu = \theta_1 + \theta_2[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]/\theta_3$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)^2 (g_2 - g_1^2)$$

$$\begin{cases} \gamma = +\frac{g_3-3g_1g_2+2g_1^3}{(g_2-g_1^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ if } \theta_3 < 0 \\ \gamma = -\frac{g_3-3g_1g_2+2g_1^3}{(g_2-g_1^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ if } \theta_3 > 0 \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{g_4-4g_1g_3+6g_2g_1^2-3g_1^4}{(g_2-g_1^2)^2} - 3$$

$$g_k = \Gamma(1 + k\theta_3)$$

L Momenti

$$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]/\theta_3$$

$$\lambda_2 = \theta_2(1 - 2^{-\theta_3})\Gamma(1 + \theta_3)]/\theta_3$$

$$\tau_3 = 2(1 - 3^{-\theta_3})/(1 - 2^{-\theta_3}) - 3$$

$$\tau_4 = \frac{5(1-4^{-\theta_3})-10(1-3^{-\theta_3})+6(1-2^{-\theta_3})}{(1-2^{-\theta_3})}$$

Parametri(M)

$$\theta_1 = \mu - \frac{\theta_2[1-\Gamma(1+\theta_3)]}{\theta_3}$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_3(\mu-\theta_1)}{[1-\Gamma(1+\theta_3)]}$$

$$\theta_3 = \frac{\theta_2(1-\Gamma)}{(\mu-\theta_1+\theta_2\Gamma)}$$

Parametri(L_M)

$$\theta_3 \simeq 7.8590c + 2.9554c^2$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_2\theta_3}{(1-2^{-\theta_3})\Gamma(1+\theta_3)}$$

$$\theta_1 = \lambda_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3} (1 - \Gamma(1 + \theta_3))$$

$$c = \frac{2}{3+\tau_3} - \frac{\log 2}{\log 3}$$

Note

Per $\theta_3 = 0$ la distribuzione GEV corrisponde ad una distribuzione di Gumbel. L'approssimazione utilizzata per il calcolo di θ_3 con il metodo degli L-momenti ha un'accuratezza migliore di 9×10^4 per $-0.5 \leq \tau_3 \leq 0.5$.