

# INFILTRAZIONE

## Flusso verticale nel suolo insaturo

$f$  = tasso di infiltrazione (effettivo)

$F$  = volume infiltrato  $\rightarrow f = \frac{dF}{dt}$

$f_c$  = tasso infiltrazione potenziale (capacità infiltrazione)

$w$  = intensità di precipitazione (naturale o artificiale)

$f = \min(f_c, w) \leftarrow$  infiltrazione effettiva

$f_c$  dipende da  $\theta$  e  $\psi$ , cioè da  $F$  e  $\psi$

## Flusso verticale nel suolo insaturo

Ai fini di  $f_c$  è più importante la diminuzione di  $\psi$  con il crescere di  $\theta$  che non l'aumento di  $K$  per  $\theta$  crescente.

$$\theta \uparrow \Rightarrow f_c \downarrow$$

Considerando spessore unitario del suolo, vale

$$f = \frac{d\theta}{dt} \text{ in superficie } (z=0)$$

Studiando  $\frac{d\theta}{dt}$  si studia  $f_c$

## Equazione di Richard

In 1 dimensione.

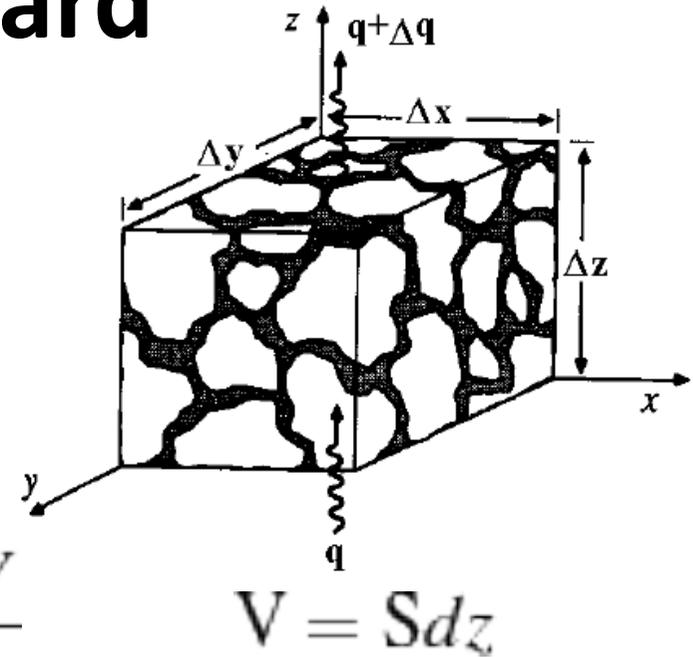
Equazione continuità:

$$\textcircled{1} \quad d\theta \cdot V = -dq \cdot S \cdot dt$$

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot V = -dqS = -dq \cdot \frac{Sdz}{dz} = \frac{-dq \cdot V}{dz}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{dq}{dz}$$

In 3 dimensioni si passa alle derivate parziali :  $\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z}$



## Richard's Equations

Equazione del moto (alla Darcy)  $\Rightarrow q = -K(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$  (2)

Combinando (1) e (2) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \frac{\partial}{\partial z} (z + \psi) \right]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]$$

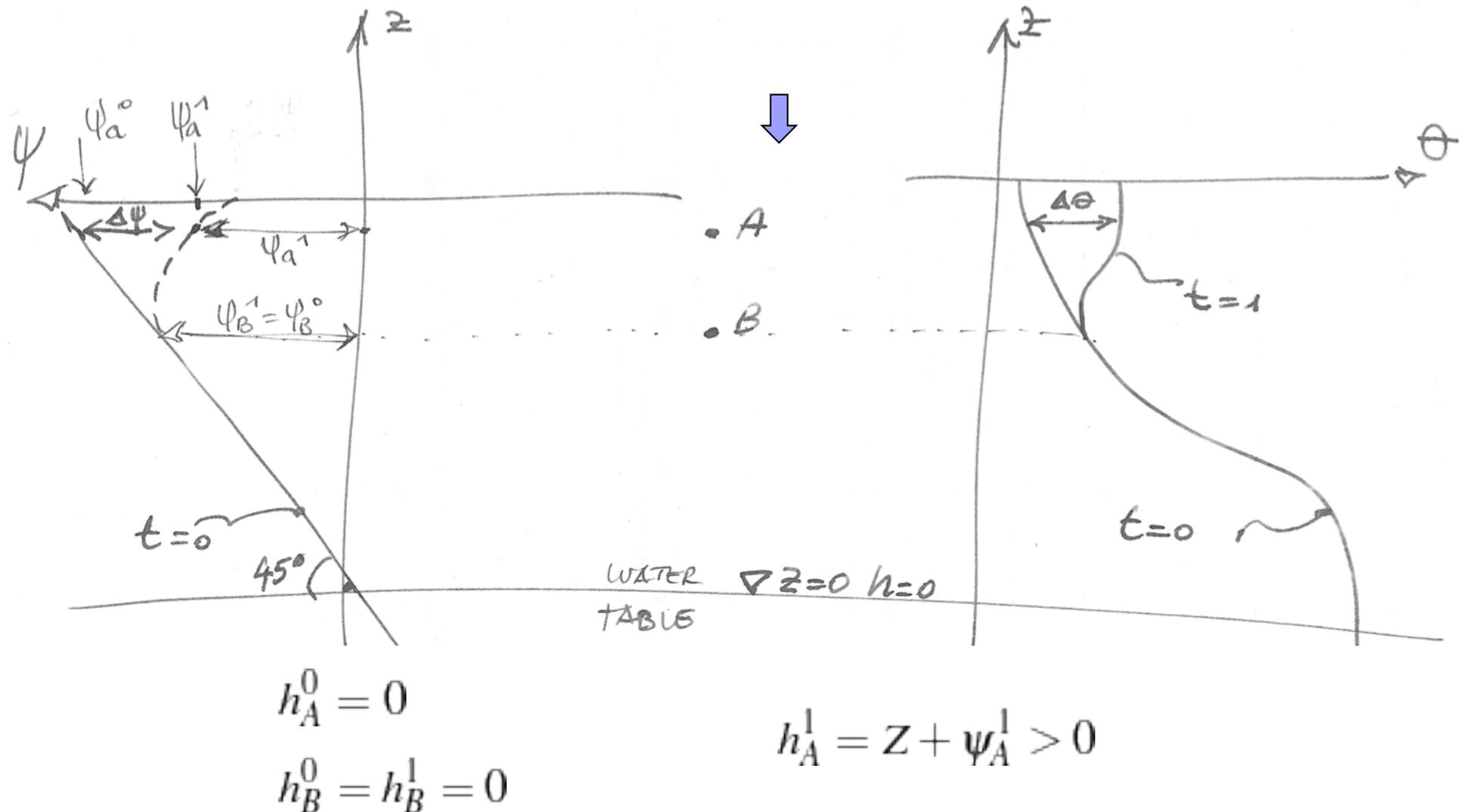
per confinare la dipendenza da  $\psi$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} ; \quad K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = D(\theta)$$

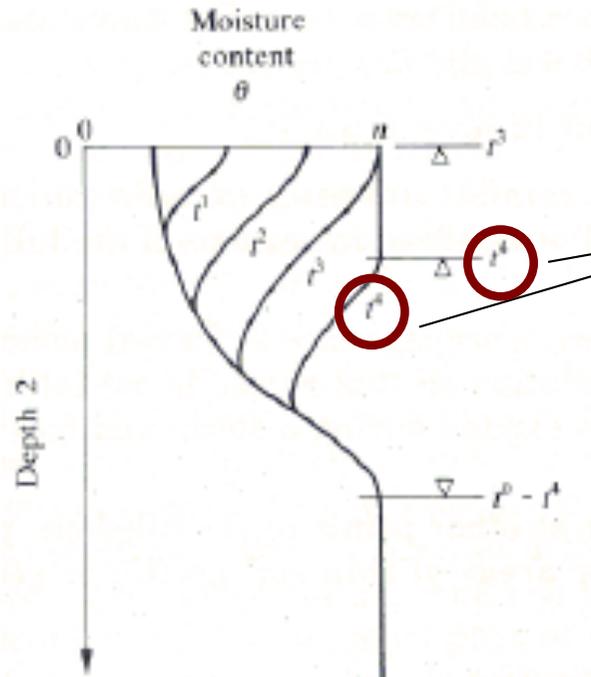
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]$$

D = Diffusività

## Schema di perturbazione del profilo di equilibrio



## Transitorio di bagnatura



$h_1 > h_2 \implies$  movimento verso il basso

a  $t = 4$  si genera runoff (overland flow)

④ = ponding condition

4+  $\implies$  wetting front

**Infiltration excess = Saturazione dall'alto:**

$t(w) >$  ponding time per le date condizioni

# Modello di Infiltrazione (Horton)

Partendo dall'equazione di Richard

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \right]$$

Basandoci sulle ipotesi che:  $k = cost$        $D = cost$

e considerata la condizione iniziale:  $\theta(z = 0) = \theta_s \quad \forall t$

Per  $w(t) > f(t)$  risulta che:

$f = f_c =$  capacità di infiltrazione:

$$\textcircled{1} \quad f_c(t) = f_1 + (f_0 - f_1)e^{-kt} \quad [K] = [1/t] \quad \begin{array}{l} f_0 = \text{condiz. iniziale} \\ f_1 = f_c(t \rightarrow \infty) \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad F_c(t) = f_1 \cdot t + (f_0 - f_1) \cdot \frac{1}{k} [1 - e^{-tk}] \quad F_c(t \rightarrow \infty) = c + f_1 \cdot t$$

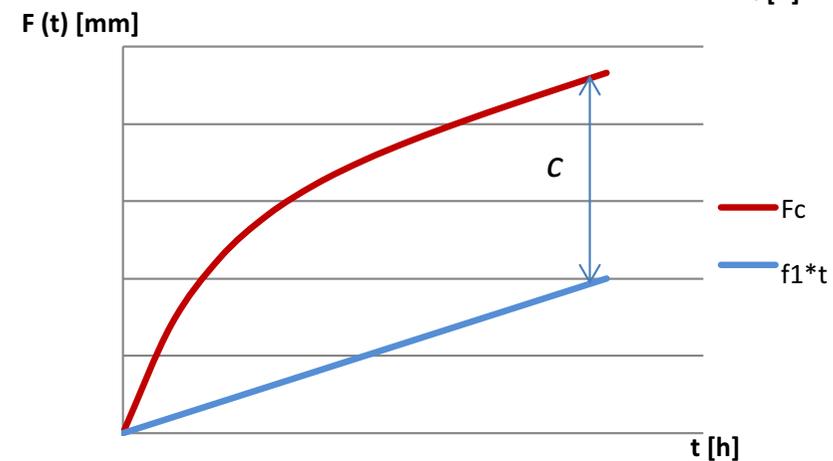
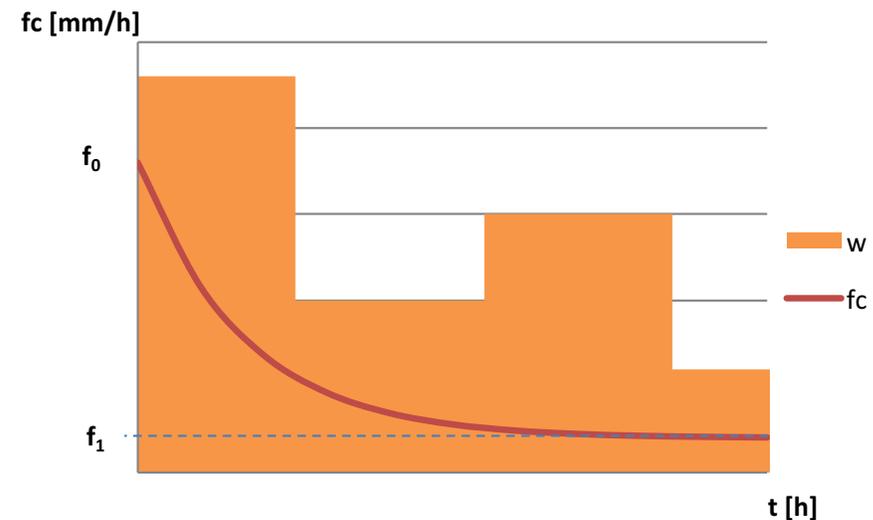
# Andamento per $w(t) > f(t)$

$$f_c(t) = f_1 + (f_0 - f_1)e^{-kt}$$

$$f_1 = f_c(t \rightarrow \infty) = k_{sat}$$

$$F_c(t) = f_1 \cdot t + (f_0 - f_1) \cdot \frac{1}{k} [1 - e^{-tk}]$$

$$F_c(t \rightarrow \infty) = c + f_1 \cdot t$$



## Andamento per $w(0) < f_0$

Se  $w(0) < f_0 \implies f(0) = w < f_c(0)$

infiltrazione effettiva < infiltrazione potenziale

Ne risulta che il volume infiltrato negli istanti iniziali vale:

$$F(t) = w \cdot t$$

La condizione al contorno

$$\theta(z=0) = \theta_s \quad \text{si ripristina al } \textit{tempo di ponding} \quad t_p$$

Per  $t > t_p$  si può riprendere ad usare una relazione  $f_c(t)$

Combinando le relazioni ① e ② :

$$\text{Dalla ① si ricava } -kt = \ln \frac{(f_c(t) - f_1)}{(f_0 - f_1)} \quad \text{③}$$

Sostituendo la ③ nella ② si ricava

$$F_c(t) = \frac{f_0 - f_c(t)}{k} - \frac{f_1}{k} \ln \frac{f_c(t) - f_1}{f_0 - f_1} \quad \text{④}$$

CONDIZIONE DI PONDING

$$\left\{ \begin{array}{l} f_c(t_p) = w \\ F_c(t_p) = w \cdot t_p \end{array} \right.$$

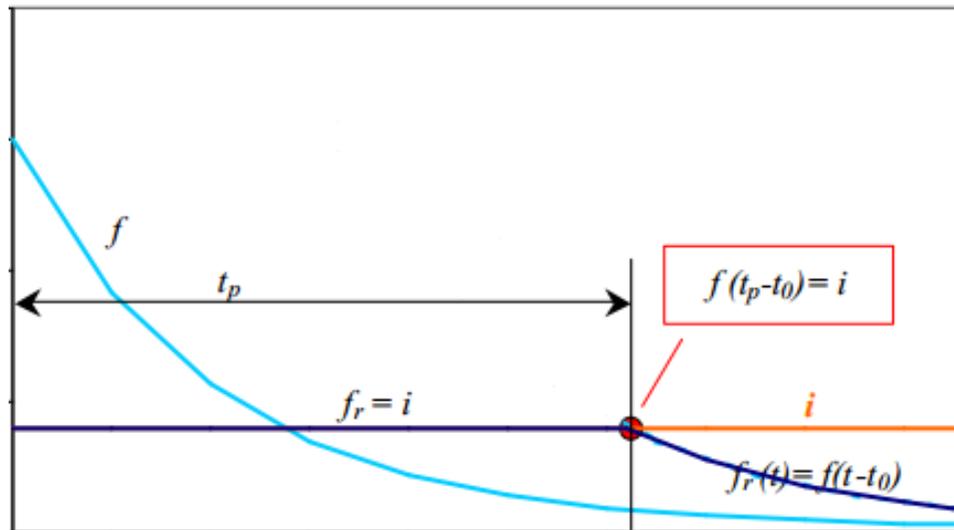
Sostituendo nella ④ tale condizione si ricava dunque il  $t_p$

Ricordando che  $f_p = w$

$$w \cdot t_p = \frac{f_0 - w}{k} - \frac{f_1}{k} \ln\left(\frac{w - f_1}{f_0 - f_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$t_p = \frac{1}{wk} \left[ f_0 - w - f_1 \ln\left(\frac{w - f_1}{f_0 - f_1}\right) \right]$$



$i = w = f_c(t = t_p) \rightarrow$  nuova condizione iniziale

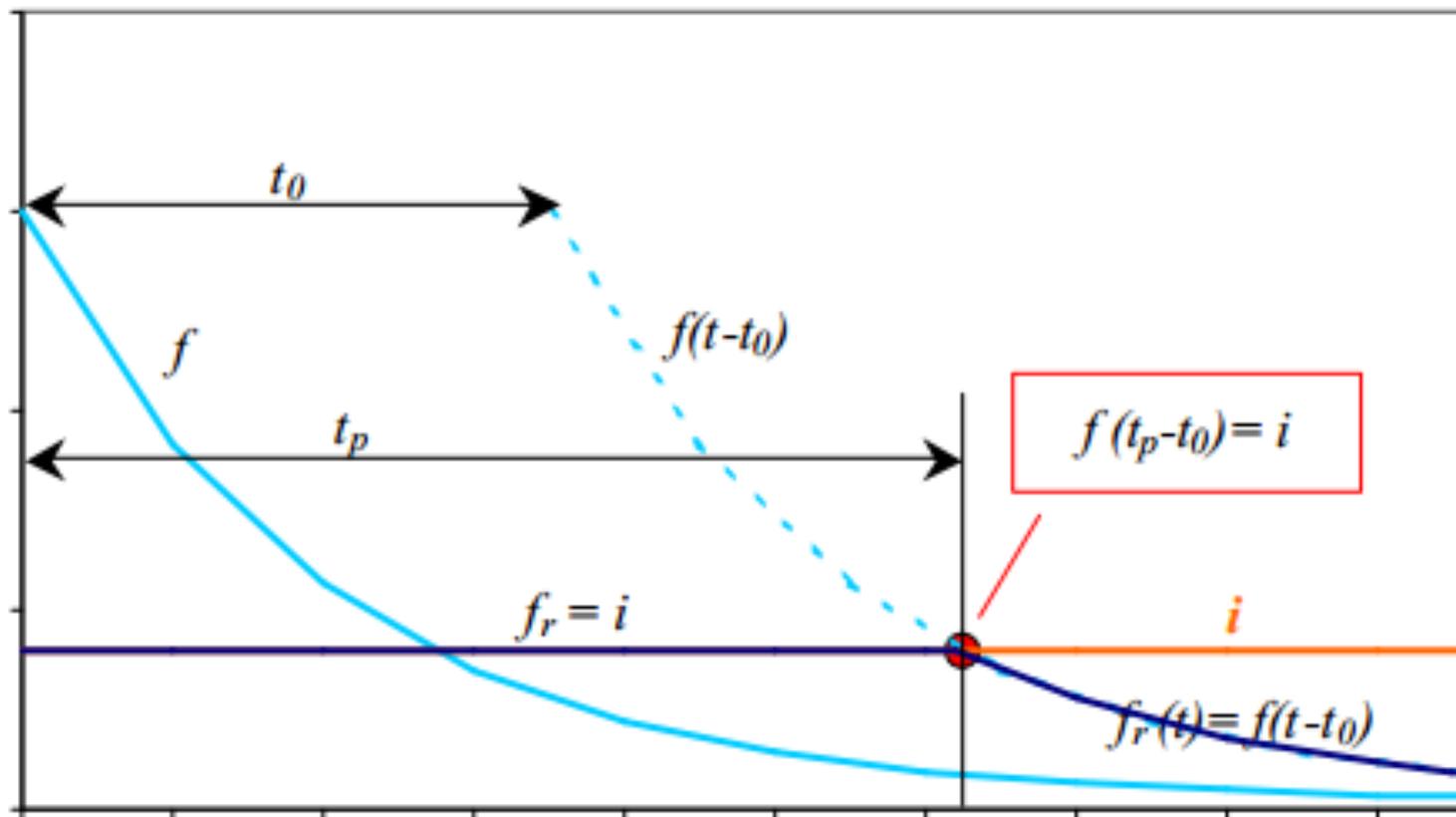
Per  $t > t_p$

$$f'_c(t) = f_1 + (f_p - f_1)e^{-k(t-t_p)} \quad (5)$$

$$F'_c(t) = f_1 \cdot (t - t_p) + \left[ \frac{f_p - f_1}{k} \cdot (1 - e^{-k(t-t_p)}) \right]$$

# Time compression approximation

Serve a mantenere la relazione formalmente uguale alla ① e implica una traslazione del tempo.



## Time compression approximation

Si vuol ottenere una relazione del tipo

$$\textcircled{6} \quad f'_c(t) = f_1 + (f_0 - f_1)e^{-(t-t_0)k} \quad \text{per } t > t_p$$

Per ottenerla, è sufficiente porre nella  $\textcircled{5} \quad f'_c(t_p)$  secondo la  $\textcircled{6}$  al posto di  $f_p$ .

Con pochi passaggi si dimostra che le forme  $\textcircled{5}$  e  $\textcircled{6}$  si equivalgono.

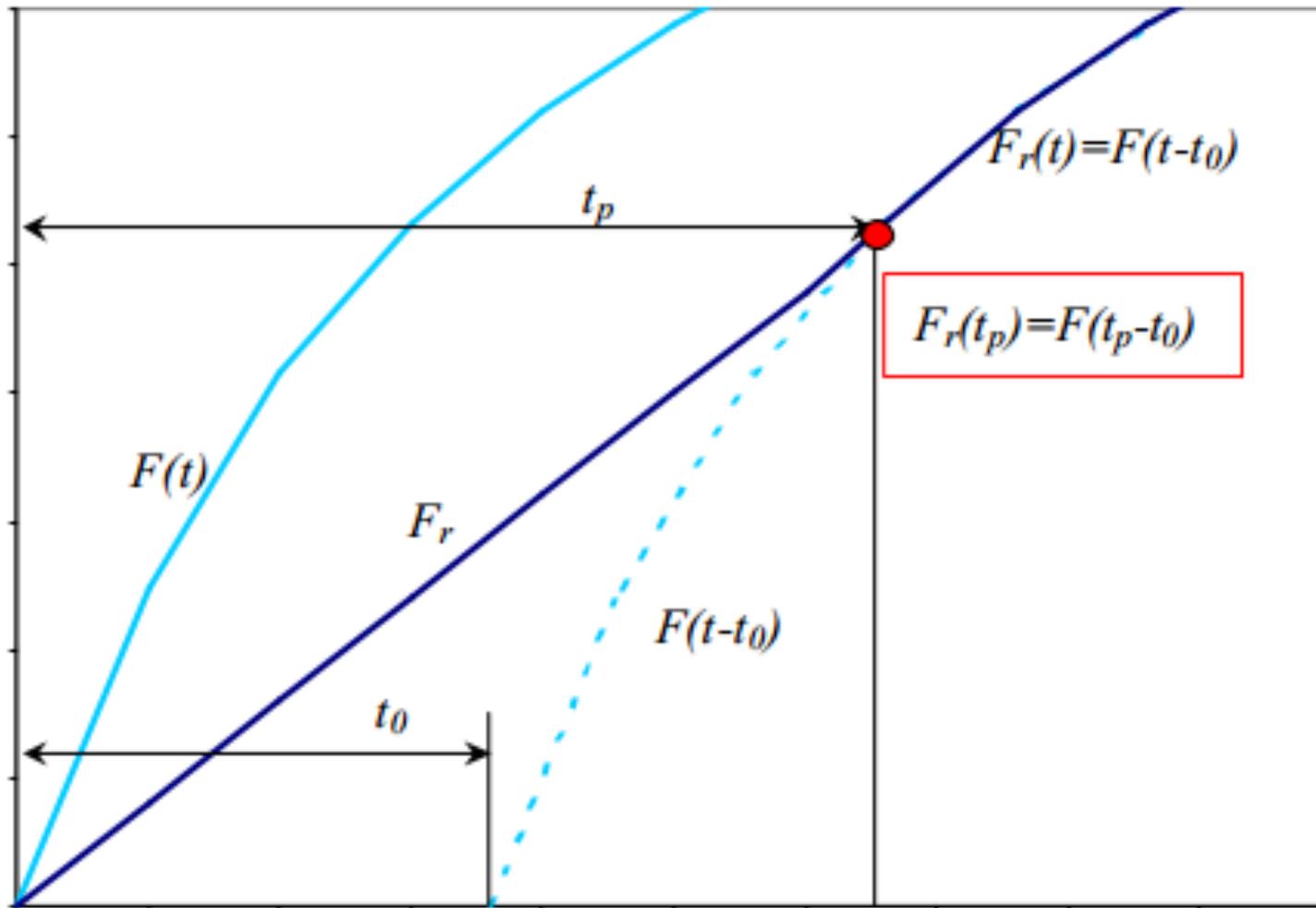
Il valore di  $t_0$ , si calcola considerando che nella  $\textcircled{6} \quad f'_c(t_p) = f_p = w$

per cui:  $w = f_1 + (f_0 - f_1)e^{-(t_p-t_0)k}$

che invertita produce:

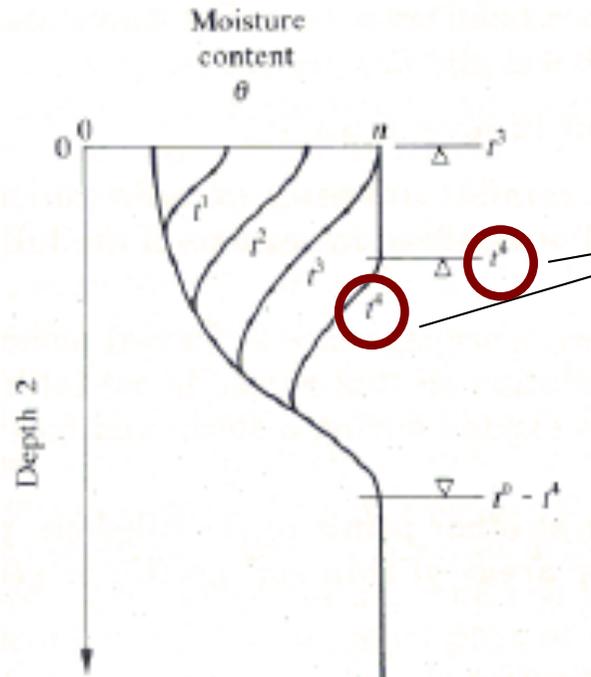
$$t_0 = t_p - k \ln\left(\frac{f_0 - f_1}{w - f_1}\right)$$

# Curve integrali di $F'_c$ , $F(t)$ , $F'_c(t)$



$$\frac{dF'_c(t_p)}{dt} = w$$

## Transitorio di bagnatura



$h_1 > h_2 \implies$  movimento verso il basso

a  $t = 4$  si genera overland flow  
 ④ = ponding condition

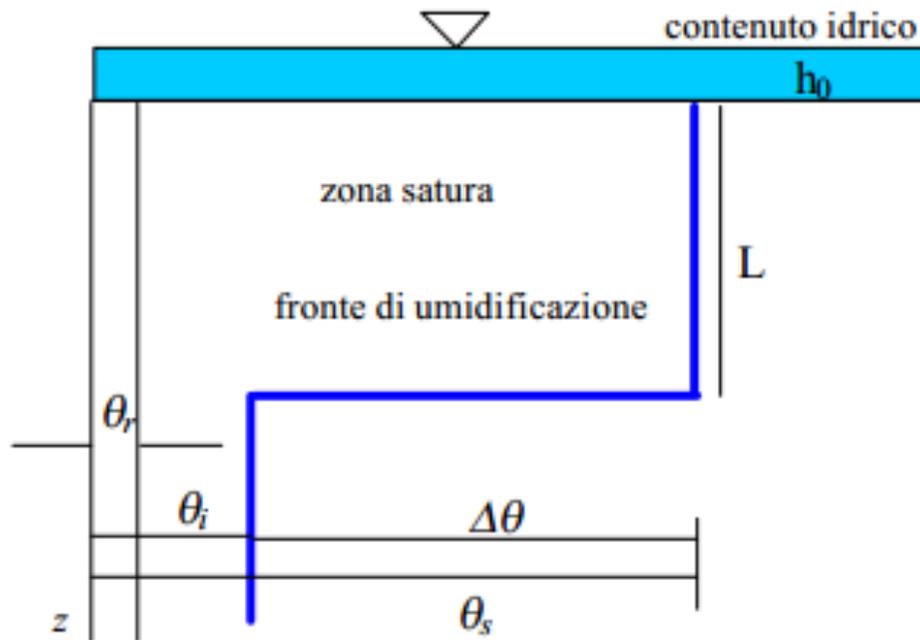
4+  $\implies$  wetting front

**Al procedere del wetting front si riduce il  $\Delta h$ , perché le  $\psi$  si riducono al decrescere di  $z$ .  $\implies$  diminuisce  $f_c$**

**Infiltration excess = Saturazione dall'alto:**

$t(w) >$  ponding time per le date condizioni

## Modello di infiltrazione (Green-Ampt)



$$h = z - |\psi|$$

$\psi_f$  = potenziale di suzione  
del fronte umido

$$h = -L - |\psi_f|$$

$$\textcircled{1} \quad L\Delta\theta = F \implies F(t) = \Delta\theta \cdot L(t) \quad \textcircled{2} \quad q = f_c(t) = -K_{sat} \cdot \frac{\Delta h(t)}{\Delta z}$$

$$\Delta h = h_1 - h_0 = -L - |\psi_f| - 0$$

## Modello di infiltrazione (Green-Ampt)

Essendo:  $\Delta z = L$

La (2) diventa:  $f_c = K_{sat} \frac{(L + |\psi_f|)}{L}$

poichè  $L = F / \Delta\theta$  la (2) diventa:

$$f_c = K_{sat} \left(1 + \frac{|\psi_f|}{L}\right) = K_{sat} \left(1 + \frac{|\psi_f| \Delta\theta}{F}\right) \leftarrow \text{Al crescere di } L \text{ } f_c \text{ decresce}$$

Infiltrability -depth approximation

$$(*) \quad f_c(t) = K_s \left(1 + \frac{P}{F(t)}\right)$$

$$P = \Delta\theta |\psi_f| = \text{cost}$$

↑ Relazione a regime ( suolo saturo)

## Condizione di ponding

Invertiamo la  $(*) \longrightarrow$  si avrà:

$$F(t) = \frac{K_s \cdot P}{(f_c(t) - K_s)} \quad (*)$$

Inizialmente  $w < f_c \longrightarrow$  non parte il flusso a pistone

**Condizione per il ponding:**

$$\left\{ \begin{array}{l} f_c(t_p) = w \\ F_p = \frac{K \cdot P}{w - K_s} = w \cdot t_p \end{array} \right.$$

se  $w = \text{costante} \implies t_p = F_p / w$

Dalla  $(*)$ , con  $f_c(t) = w$

## After Ponding

$F_p$  ( al tempo  $t_p$ ) diventa la **CONDIZIONE INIZIALE** per  
l'integrazione della  $\textcircled{*}$

$$(f_c(t)) = \frac{dF(t)}{dt} = K_s \left( 1 + \frac{P}{F(t)} \right)$$

Integrazione a variabili separate con condizione iniziale  
**F=F<sub>p</sub> per t=t<sub>p</sub>:**

$$t - t_p = \frac{F(t) - F_p}{K_s} + \frac{P}{K_s} \ln \left( \frac{F_p + P}{F(t) + P} \right)$$

Si fissa **t** e si trova **F(t)** iterativamente.

## Applicazione metodo in condizioni sature

*Determinato il valore  $F_1$  per  $t_1$  in **condizioni sature**,*

la soluzione implicita dell'eq.

$$t - t_p = \frac{F(t) - F_p}{K_s} + \frac{P}{K_s} \ln\left(\frac{F_p + P}{F(t) + P}\right)$$

Si ottiene ponendo  $F_p = F_1$ , e consente di ottenere  $F_2$  al tempo  $t_2$

Nel successivo passaggio si porrà  $F_p = F_2$  per ottenere  $F_3$  al tempo  $t_3$ . Il tutto funziona senza interruzioni fino a quando il valore di  $f_c$  determinato ogni volta risulterà inferiore al tasso di precip.  $w$

## Parametri modello Green-Ampt

$$\theta_o = \theta_{fc} \quad \text{oppure} \quad \theta_o = \theta_{wp}$$

$$|\psi_f| = |\psi_a| \frac{2b + 3}{2b + 6} \quad (\text{RAWLS})$$

dove  $b$  = parametro Clapp & Hornberger

$K_{\text{sat}}$  =  $f$  (classe tessiturale); =  $f$  (pore size distribution)

## Parametri Green-Ampt

**PARAMETRI:**  $\theta_o = \theta_{fc}$  o  $\theta_{wp}$

$$|\psi_f| = |\psi_a| \frac{2b + 3}{2b + 6}$$

b = parametro di CLAPP-HORNBERGER  
 $K_{sat}$  = funzione tessitura

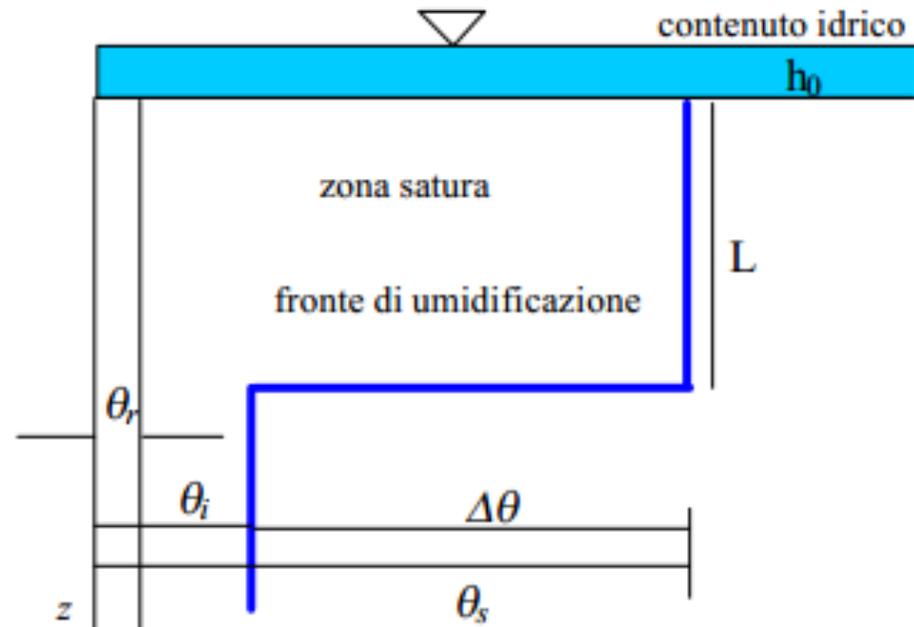
Soil Texture	Porosity n	$K_{sat}$ (cm/hr)	$ \psi_a $ (cm)	b
Sand	0.395 (0.056)	63.36	12.1 (14.3)	4.05 (1.78)
Loamy sand	0.410 (0.068)	56.16	9 (12.4)	4.38 (1.47)
Sandy loam	0.435 (0.086)	12.49	21.8 (31.0)	4.9 (1.75)
Silt loam	0.485 (0.059)	2.59	78.6 (51.2)	5.3 (1.96)
Loam	0.451 (0.078)	2.50	47.8 (51.2)	5.39 (1.87)
Sandy clay loam	0.420 (0.059)	2.27	29.9 (37.8)	7.12 (2.43)
Silty clay loam	0.477 (0.057)	0.612	35.6 (37.8)	7.75 (2.77)
Clay loam	0.476 (0.053)	0.882	63 (51.0)	8.52 (3.44)
Sandy clay	0.426 (0.057)	0.781	15.3 (17.3)	10.4 (1.64)
Silty clay	0.492 (0.064)	0.371	49 (62.0)	10.4 (4.45)
Clay	0.482 (0.050)	0.461	40.5 (39.7)	11.4 (3.7)

## Modello Green-Ampt secondo Tarboton

Suolo omogeneo; fronte umidificazione orizzontale (pistone)  $\Rightarrow f_c = q$

Contenuto d'acqua iniziale  $\theta_0$

Contenuto d'acqua finale  $\theta_s = n$



## Modello Green-Ampt secondo Tarboton

$$\textcircled{1} \quad F(t) = (\theta_s - \theta_o)L(t) = L\Delta\theta \quad h = z + \psi$$

$$\textcircled{2} \quad q = f_c = -K_{sat} \frac{\Delta h}{\Delta z} \quad (\text{PISTONE= CILINDRO DI DARCY})$$

dove

$$\Delta h = z + \psi - h_0 = -L - |\psi| \quad \left. \vphantom{\Delta h} \right\} \begin{array}{l} h_0 = 0 \\ \Delta z = L \end{array}$$

$$f_c = +K_{sat} \frac{(L + |\psi_f|)}{L} = K_s \left(1 + \frac{|\psi_f|}{L}\right)$$

## Modello Green-Ampt secondo Tarboton

Eliminando  $L$  grazie alla ①, si ha

$$f_c = K_{sat} \left( 1 + \frac{|\psi_f| \Delta\theta}{F} \right)$$

(INFILTRABILITY DEPTH APPROXIMATION)

$f_c$  diminuisce al crescere di  $F$ . D'altra parte, per la ②,

$f_c = K_s \left( 1 + \frac{\psi}{L} \right)$  ed al crescere di  $L$ ,  $f_c$  decresce.

si può usare  $P = |\psi_f| \cdot \Delta\theta$

## Modello Green-Ampt secondo Tarboton

Questo vale a regime. All'inizio  $w < f_c$  ( $w$ = intens. pioggia)  
e solo quando  $f_c$  decresce fino a raggiungere  $w$  si ha il

**PONDING :**

$$F_p = \frac{K_s \cdot P}{(f_c - K_s)} \quad \text{con} \quad f_c = w$$

$$t_p = \frac{F_p}{w} \quad \text{se } w \text{ è COSTANTE (intensità costante)}$$

## Modello Green-Ampt secondo Tarboton

**DOPO IL PONDING:**

$$(f_c(t)) = \frac{dF}{dt} = K_s \left(1 + \frac{P}{F}\right) \quad \left. \vphantom{\frac{dF}{dt}} \right\} \text{ si integra a variabile, separate con condizioni iniziali } F_p$$

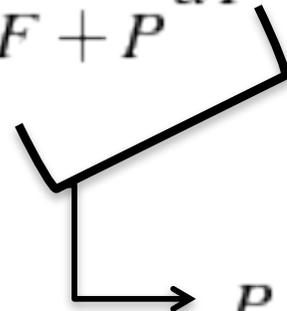
$$dF \cdot \frac{F}{F + P} = K_s dt$$

$$dF \cdot \frac{F + P - P}{F + P} = K_s dt$$

$$dF \cdot \left(1 - \frac{P}{F + P}\right) = K_s dt$$

## Modello Green-Ampt secondo Tarboton

$$\int_{F_p}^F dF - \int_{F_p}^F \frac{P}{F+P} dF = K_s dt$$



$$P \int_{F_p+P}^{F+P} \frac{1}{z} dz = P[\ln(F+P) - \ln(F_p+P)]$$

$$F - F_p - P \left\{ \ln\left(\frac{F+P}{F_p+P}\right) \right\} = (t - t_p) K_s$$

$$t - t_p = \frac{F(t) - F_p}{K_s} + \frac{P}{K_s} \ln\left(\frac{F_p + P}{F(t) + P}\right)$$

si fissa il tempo e si trova iterativamente  $F(t)$