Condizione di progetto: Periodo di Ritorno

L'occorrenza di un nuovo evento puo' essere considerato un esperimento tipo Bernoulli che genera solo due eventi incompatibili, tipo successo – insuccesso.

p = probabilità di un insuccesso .

$(1-p)$ = probabilità di un successo .

Esempio: Q_i Massima portata nell'anno. Q_0 Portata di progetto

-> $p=P(Q_i>Q_0)$

*Se si effettuano T prove indipendenti, il prodotto **T p*** indica il **numero medio di insuccessi in *T* prove**.

Se si assegna la posizione ***T p = 1*** :

T** rappresenta **il numero di prove** (in anni) da attendere **mediamente** **prima di un insuccesso

$T =$ PERIODO DI RITORNO $\quad T = \dfrac{1}{p}$

***T** rappresenta, nello stesso tempo, il **reciproco della probabilità p di un insuccesso,** assunta per l'evento temuto*

Il Rischio (naturale) RESIDUALE

Il periodo di ritorno T non caratterizza completamente il rischio idrologico in campo progettuale e nella pianificazione

L Orizzonte temporale di riferimento.

P_L Probabilità di un superamento in un periodo di L anni consecutivi.

$$R_L = F_X(L) = 1 - (1-p)^L$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{p} = T \ \ (\textit{Periodo di Ritorno})$$

Rischio RESIDUALE $\quad R_{L,T} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{T}\right)^L$

Se $\mathbf{R_{L,T}}$ è assegnato: $\quad T = \dfrac{1}{1-(1-R_{L,T})^{\frac{1}{L}}}$

Esempi

La probabilità che in un orizzonte di 10 anni venga superata una piena con T=50 è circa pari al 20%

$$R_{10,50} = 1 - \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{10} \cong 0.2$$

Perchè accada una piena con T=50 non si devono attendere 50 anni!

Per L<<T vale

$$R_{L,T} = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{L} \cong \frac{L}{T}$$

Si può considerare L come un moltiplicatore del rischio naturale

Inoltre:

Se L diventa grande, in via approssimata vale:

$$R_{L,T} \cong 1 - e^{-L/T}$$

Che, per L=T conduce a: $R_L \cong 1 - e^{-1} = 0.632$

Ovvero:

Un sistema idrico progettato per un quantile XT corrispondente al periodo di ritorno T sara inadeguato con una probabilità **0.632 almeno una volta** durante un periodo di T anni.

Il linguaggio del Rischio

Perché “PERIODO di ritorno” è meglio che “TEMPO di ritorno”?

RETURN PERIOD SYN. RECURRENCE INTERVAL
SEE ALSO FLOOD FREQUENCY
PERIODE DE RETOUR SYN. PERIODE DE RECURRENCE VOIR AUSSI FREQUENCE D'UNE CRUE
PERIODO DE RETORNO, SIN. INTERVALO DE RECURRENCIA, VEASE TAMBIEN FRECUENCIA DE CRECIDAS

INTERVALLO MEDIO DI TEMPO O NUMERO MEDIO DI ANNI ALL'INTERNO DEI QUALI UN EVENTO SARA' UGUAGLIATO O SUPERATO, AD ES. LA PORTATA AL COLMO. (GHM, CHOW)

INTERVALLE DE TEMPS MOYEN OU NOMBRE D'ANNEES NECESSAIRES POUR OBTENIR POUR UN CERTAIN EVENEMENT (PAR EX. POINTE DE CRUE) UNE VALEUR EGALE OU SUPERIEURE A UNE VALEUR DONNEE. (GHM, CHOW)

AVERAGE INTERVAL OF TIME OR NUMBER OF YEARS WITHIN WHICH AN EVENT WILL BE EQUALLED OR EXCEEDED. E.G. FLOOD PEAK DISCHARGE. (GHM, CHOW)

INTERVALO MEDIO DE TIEMPO O NUMERO DE ANOS AL CABO DE LOS CUALES SE IGUALARA O SUPERARA UN SUCESO, P.EJ. CAUDAL DE PUNTA. (GHM, CHOW)

http://www.idrologia.polito.it/didattica/Idrologia/Glossario_Internazionale_di_Idrologia_1986_lowres.pdf

Memoria

Qual è la probabilità che una piena catastrofica non avvenga nei prossimi 25 anni, dato che non si è verificata negli ultimi 50 anni?.

$$P[X>75|X>50]=\frac{P[X>75\bigcap X>50]}{P[X>50]}$$

$$=\frac{P[X>75]}{P[X>50]}=\frac{(1-p)^{75}}{(1-p)^{50}}=(1-p)^{25}$$

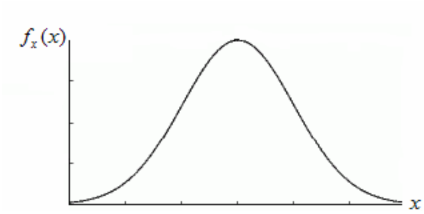
•L’evento P[X>75] implica l’evento P[X>50] -> **NON c’è Memoria.**

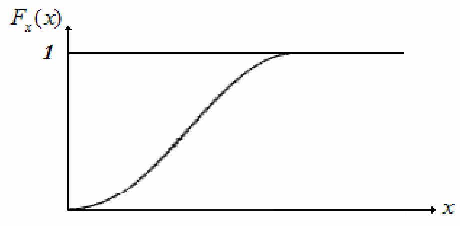
DISTRIBUZIONE NORMALE DEL CASO O DI GAUSS

Funzione densità di probabilità: $f(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$

Funzione di distribuzione cumulata: $F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} dx$

può essere calcolata numericamente per ogni θ_1 e θ_2.





I parametri θ_1 e θ_2 sono dati da:

$$E[x] = \theta_1 \qquad var[x] = \theta_2^2$$

DISTRIBUZIONE NORMALE IN FORMA CANONICA

Variabile normale standardizzata o ridotta $\quad u = \frac{x-\theta_1}{\theta_2} = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$E[u] = 0 \qquad var[u] = 1$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \qquad F(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \qquad F(-u) = 1 - F(u)$$

Valori notevoli di u(F) e di F(u)

F	*u(F)*
0.025	-1.96
0.50	0.00
0.975	+1.96

inv.s.norm

u	F(*u*)
-2.0	0.0228
-1.0	0.1587
0.0	0.5000
1.0	0.8413
2.0	0.9772

dist-s-norm

Esempio: $\quad X \cong N(\theta_1 = 10, \theta_2 = 3)$

Quantile di X corrispondente a $F(x) = 0.025$

$X_{0.025} = \theta_1 - 1.96\theta_2 = 10 - 1.96 * 3 = 4.12$

DISTRIBUZIONI DERIVATE

Funzione $Y = g(x)$ strettamente monotona crescente e derivabile di una v.a. continua X

Esempio: $Y = log(x)$ oppure $x^{1/2}$ oppure $x^{1/3}$, con $x \geq 0$

$$\boxed{F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[g(X) \leq g(x)] = P[X \leq x] = F_X(x)}$$

$$dF_Y(y) = dF_X(x) \Rightarrow f_Y(y)dy = f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}$$

DISTRIBUZIONI DERIVATE

Funzione $Y = g(x)$ strettamente monotona crescente e derivabile di una v.a. continua X

Esempio: $Y = log(x)$ oppure $x^{1/2}$ oppure $x^{1/3}$, con $x \geq 0$

$$\boxed{F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[g(X) \leq g(x)] = P[X \leq x] = F_X(x)}$$

$$dF_Y(y) = dF_X(x) \Rightarrow f_Y(y)dy = f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}$$

Quando si conosce la distribuzione della Y e si ricerca quella della X vale, ovviamente

$$f_X(x) = f_Y(y)\left(\frac{dy}{dx}\right) = f_Y(g(x))\left|\frac{d(g(x))}{dx}\right|$$

Esempio: variabile normale standard $\quad y = \frac{(x-\mu)}{\sigma} = \frac{(x-\theta_1)}{\theta_2} \Rightarrow x = \theta_1 + y\theta_2$

$$f_Y(y) = \frac{dx}{dy} f_X(\theta_1 + y\theta_2) = \theta_2 \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\theta_1 + y\theta_2 - \theta_1)}{\theta_2}\right]^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Vale anche: $F_x(x) = P[X \leq x] = P\left[y \leq \left(\frac{x-\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right)\right] = F_y(y)$

MEDIA DI UNA VARIABILE FUNZIONE DI UN' ALTRA

Se c è una costante:

$$E[c] = \int_{-\infty}^{+\infty} c f_x(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = c$$

Similmente

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E[a+bX] = a+bE[X]$$

$$E[g_1(x)+g_2(x)] = E[g_1(x)]+E[g_2(x)]$$

In generale

$$E[g(x)] \neq g(E[x])$$

Esempio:

$$E\left[\frac{1}{X}\right] \neq \frac{1}{E[X]} \qquad E[X^2] = (E[X])^2 + \sigma_x^2$$

VARIANZA DI UNA VARIABILE FUNZIONE

$$var[x] = E[(x-\mu)^2] = E[x^2 - 2\mu x + \mu^2] = E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2$$

$$var[c] = 0$$

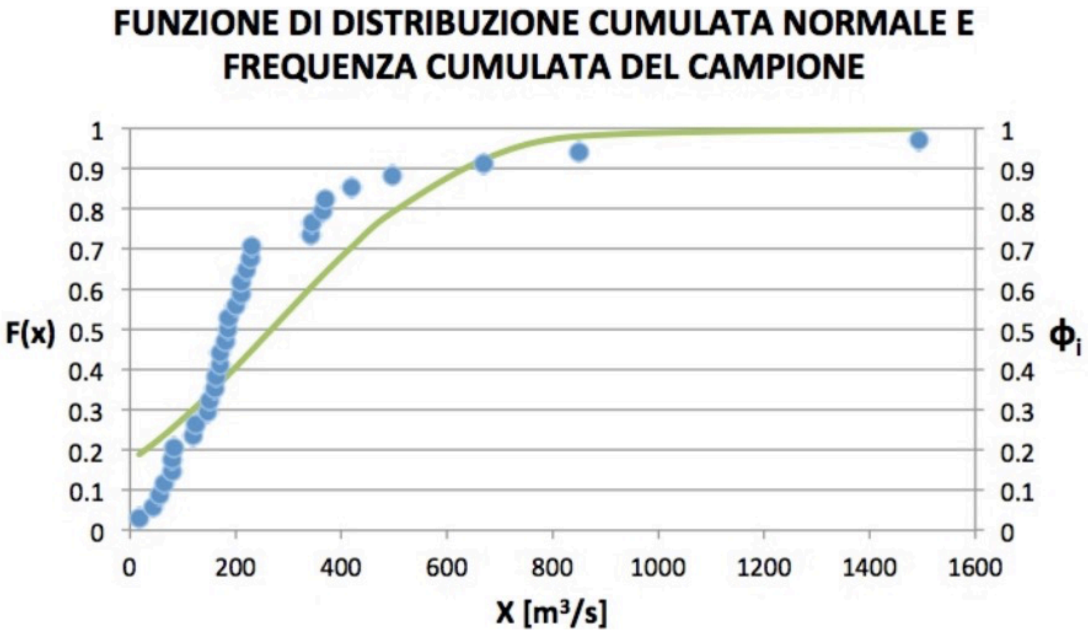
$$var[cx] = c^2 var[x]$$

$$var[a+bx] = b^2 var[x]$$

VARIABILE STANDARDIZZATA

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad E[u] = 0 \qquad var[u] = 1$$

Il confronto tra un campione e la popolazione si può effettuare attraverso la comparazione delle forme delle
Curve di Distribuzione Cumulata (campionaria e teorica).



ma x(F=1)=inf.

Affinché la comparazione sia coerente, per la distribuzione campionaria si deve usare una **Stima della probabilità cumulata della popolazione**, chiamata **Plotting position**

$$\phi(x_i) = \hat{F}(x_i)$$

Una possibilità valida se non si ha alcuna indicazione sulla distribuzione teorica da usare è la :

Posizione Distribution free:

corrisponde a porre α=0 nella relazione più generale:

$$\phi(x_i) = \frac{i-\alpha}{n+1-2\alpha}$$

$$\phi(x_i) = \mu(F(x_i))$$

$$\phi(x_i) = \frac{i}{n+1}$$

Weibull Plotting position:

Se invece è chiaro quale distribuzione teorica si sta ricercando:

- Distribution dependent $\phi(x_i) = F(\mu(x_i))$

$$\phi(x_i) = \frac{i-\alpha}{n+1-2\alpha}$$

Si hanno ad esempio:

- Distribuzioni debolmente asimmetriche (*Cunnane*)

$$\phi(x_i) = \frac{i-0.4}{n+0.2} \qquad (\alpha = 0.4)$$

- Distribuzioni mediamente asimmetriche (*Gringorten*)

$$\phi(x_i) = \frac{i-0.44}{n+0.12} \qquad (\alpha = 0.44)$$

- Distribuzioni fortemente asimmetriche (*Hazen*)

$$\phi(x_i) = \frac{i-0.5}{n} \qquad (\alpha = 0.5)$$

9

Analogamente, le stime dei momenti della popolazione richiedono alcune correzioni sulle espressioni dei momenti campionari:

per la varianza: $$\widehat{var} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

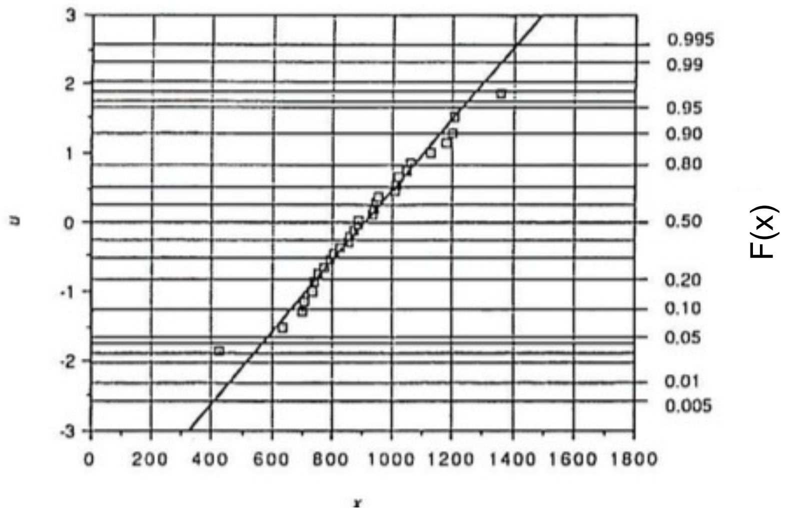
per l'asimmetria $$\widehat{Ca} = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\widehat{var}^{3/2}}$$

Carta probabilistica normale

In diagramma cartesiano con ascissa X ed ordinata y e $\Phi(y)$ la funzione di probabilità cumulata

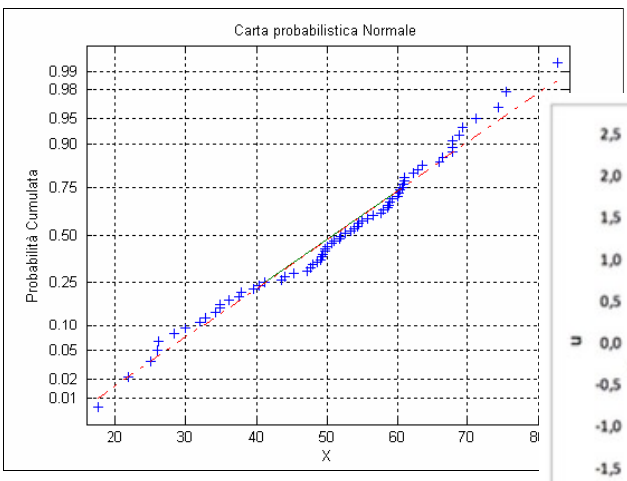
$F_X(x)$ sarà rappresentata dalla retta: $x = \theta_1 + u\theta_2$

Rappresentazione in carta normale

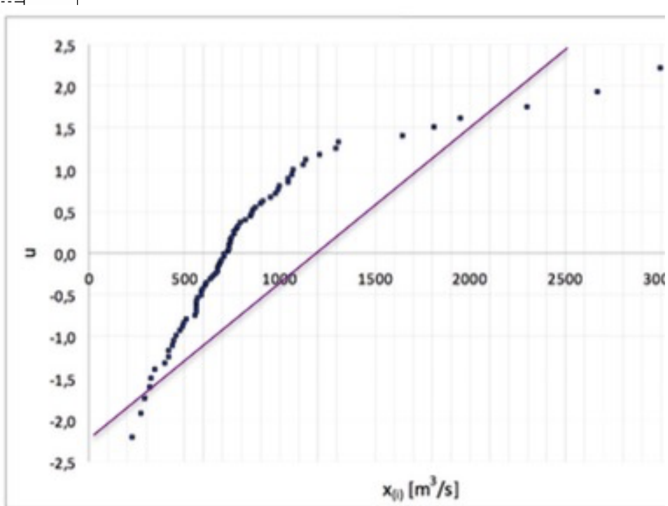


Carta probabilistica normale:

Rappresentazioni pratiche



Con Matlab (scala F distorta)



Con Excel (scala *u* cartesiana)

n.b. Le grandezze sulle x sono diverse!

PROPRIETA' DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE

Probabilità che una variabile casuale normale cada in un intervallo $[\theta_1 - k\theta_2, \theta_1 + k\theta_2]$

$$P[\theta_1 - k\theta_2 \leq X \leq \theta_1 + k\theta_2] = P\left[-k \leq \frac{x-\theta_1}{\theta_2} \leq k\right] = \Phi(k) - \Phi(-k) = 1 - \Phi(-k) - \Phi(-k) = 1 - 2\Phi(-k)$$

Coefficiente di asimmetria: $$Ca = \frac{\theta_3}{\theta_2^3} = \frac{E[(x-\theta_1)^3]}{\theta_2^3} = 0$$

Coefficiente di Curtosi (misura dell' appiattimento di una distribuzione):

$$k = \frac{\theta_4}{\theta_2^4} = \frac{E[(x-\theta_1)^4]}{\theta_2^4} = 3$$

Somma di variabili normali $(X_i; i = 1, 2, ..., n)$ indipendenti e $N(\theta_{1i}, \theta_{2i}^2)$

$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ è $N(\theta_{1z}, \theta_{2z}^2)$

$$\theta_{1z} = \sum \theta_i$$

$$\theta_{2z}^2 = \sum \theta_{2i}^2$$