DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' PER L'IDROLOGIA

17 ottobre 2011

Indice

Capitolo 1

Richiami di statistica applicata all'Idrologia

1.1 Distribuzioni di probabilità

Si consideri una variabile casuale X, che può assumere valori appartenenti all'insieme dei numeri reali. La frequenza relativa con cui questi valori si verificano definisce la *distribuzione di frequenza* o *distribuzione di probabilità* di X, che è specificata dalla *distribuzione di frequenza cumulata*

$$F(x) = \Pr[X \leq x] \ , \tag{1.1}$$

dove $\Pr(A)$ indica la probabilità dell'evento A. $F(x)$ è una funzione crescente di x, definita nell'intervallo $[0, 1]$. Normalmente in idrologia si ha a che fare con variabili casuali continue, per le quali $\Pr[X = t] = 0$ per ogni t, ovvero a nessun valore è associata una probabilità non-nulla. In questo caso $F(.)$ è una funzione continua ed ha una funzione inversa corrispondente $x(.)$, detta *funzione dei quantili* di X. Data una qualsiasi u, dove $0 < u < 1$, $x(u)$ è l'unico valore che soddisfa

$$F(x(u)) = u \ . \tag{1.2}$$

Per ogni probabilità p, $x(p)$ è il *quantile* di non superamento della probabilità p, ovvero il valore per cui la probabilità che X non superi $x(p)$ è p. L'obiettivo dell'analisi di frequenza è la stima accurata dei quantili della distribuzione di una data variabile casuale. In ingegneria, e nelle applicazioni ambientali in generale, i quantili sono spesso espressi in termini di *tempo di ritorno* $T = 1/(1 - F)$.

Se $F(x)$ è differenziabile, la sua derivata $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ è la *densità di probabilità* di X.

Il *valore atteso* della variabile casuale X è definito come

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \ , \tag{1.3}$$

ammesso che l'integrale esista. Se si considera la trasformazione $u = F(x)$, si può scrivere

$$\mathrm{E}(X) = \int_{0}^{1} x(u) du \ . \tag{1.4}$$

Una funzione di una variabile casuale $g(X)$ è anch'essa una variabile casuale di valore atteso

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_{0}^{1} g(x(u))du \; . \tag{1.5}$$

La dispersione dei valori estratti dalla variabile casuale X può essere misurata con la *varianza* di X,

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}[\{X - \mathrm{E}(X)\}^2] \; . \tag{1.6}$$

In alcuni casi può essere utile misurare la tendenza di due variabili casuali X e Y ad assumere valori elevati simultaneamente. Questo può essere misurato dalla *covarianza* di X e Y

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}[\{X - \mathrm{E}(X)\}\{Y - \mathrm{E}(Y)\}] \; . \tag{1.7}$$

La *correlazione* tra X e Y

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \mathrm{cov}(X,Y)/\{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)\}^{1/2} \; , \tag{1.8}$$

è il corrispettivo adimensionale della covarianza, che può assumere valori compresi tra -1 e $+1$.

1.2 Stimatori

Nella pratica spesso si assume che la forma di una qualche distribuzione di probabilità sia conosciuta a medo di un set di parametri incogniti $\theta_1, \ldots, \theta_p$. Sia $x(u; \theta_1, \ldots, \theta_p)$ la funzione dei quantili di una distribuzione con p parametri incogniti. In molte applicazioni tra i parametri incognti si possono identificare un parametro di posizione ed un parametro di scala. Un parametro ξ di una distribuzione è un *parametro di posizione* se per la funzione dei quantili vale l'eguaglianza

$$x(u; \xi, \theta_2, \ldots, \theta_p) = \xi + x(u; 0, \theta_2, \ldots, \theta_p) \; . \tag{1.9}$$

Si dice, invece, che α è un *parametro di scala* della funzione dei quantili della distribuzione se

$$x(u; \alpha, \theta_2, \ldots, \theta_p) = \alpha \times x(u; 1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \; . \tag{1.10}$$

Se per la distribuzione esistono entrambi questi parametri, allora vale l'eguaglianza

$$x(u; \xi, \alpha, \theta_3, \ldots, \theta_p) = \xi + \alpha \times x(u; 0, 1, \theta_3, \ldots, \theta_p) \; . \tag{1.11}$$

I parametri incogniti sono stimati a partire dai dati osservati. Dato un set di osservazioni, una funzione $\hat{\theta}$ di queste deve essere scelta come *stimatore* di θ. Lo stimatore $\hat{\theta}$ è a sua volta una variabile casuale ed ha una distribuzione di probabilità. La bontà di $\hat{\theta}$ come stimatore di θ tipicamente dipende da quanto $\hat{\theta}$ si avvicina a θ. La deviazione di $\hat{\theta}$ da θ può essere scomposta in *distorsione* (tendenza di dare stime sistematicamente più alte, o più basse, del valore vero) e *variabilità* (deviazione casuale dal valore vero, che si verifica anche per gli stimatori che non presentano distorsione).

La performance di uno stimatore $\hat{\theta}$ può essere valutata con due misure, il *bias* ("distorsione") e la *radice dell'errore quadratico medio* (RMSE), definite come

$$\text{bias}(\hat{\theta}) = \text{E}(\hat{\theta} - \theta) \ , \quad \text{RMSE}(\hat{\theta}) = \{\text{E}(\hat{\theta} - \theta)^2\}^{1/2} \ , \tag{1.12}$$

e caratterizzate dall'avere la stessa unità di misura del parametro θ. Si dice che lo stimatore $\hat{\theta}$ è *indistorto* se $\text{bias}(\hat{\theta}) = 0$ ovvero se $\text{E}(\hat{\theta}) = \theta$. Diversi stimatori indistorti dello stesso parametro possono essere paragonati in termini della loro varianza: il rapporto $\text{var}(\hat{\theta}^{(1)})/\text{var}(\hat{\theta}^{(2)})$ si dice *efficienza* dello stimatore $\hat{\theta}^{(2)}$ rispetto allo stimatore $\hat{\theta}^{(1)}$. La radice dell'errore quadratico medio può essere anche scritta come

$$\text{RMSE}(\hat{\theta}) = [\{\text{bias}(\hat{\theta})\}^2 + \text{var}(\hat{\theta})]^{1/2} \ , \tag{1.13}$$

da cui si vede come l'RMSE combina distorsione e variabilità di $\hat{\theta}$ e dà una misura globale dell'accuratezza della stima. Nei classici problemi di statistica in cui la stima dei parametri è basata su un campione di lunghezza n, sia il bias che la varianza di $\hat{\theta}$ sono asintoticamente proporzionali a n^{-1} per n grandi (v.es. **?**), per cui l'RMSE di $\hat{\theta}$ è proporzionale a $n^{-1/2}$.

1.3 Variabili discrete

Le variabili discrete sono variabili aleatorie che possono assumere solo valori interi in un dato intervallo. La *Funzione massa di probabilità (f.m.p)* associa una probabilità ad ogni valore della variabile.

$$P[X = x] = p_x(x)$$

Esempio

$$p_x(0) = P[X = 0] = P[A] = \frac{1}{4}$$

$$p_x(1) = P[X = 1] = P[B \bigcup C] = P[B] + P[C] = \frac{1}{2}$$

$$p_x(2) = P[X = 2] = P[D] = \frac{1}{4}$$

- $0 \leq p_X(x) \leq 1$
- $\sum p_X(x_i) = 1$
- $P[a \leq X \leq b] = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_x(x_i)$

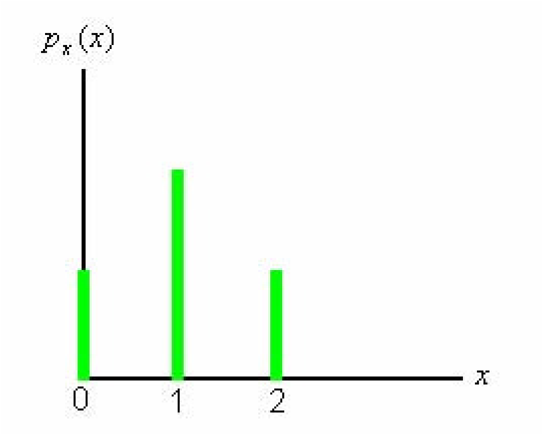


Figura 1.1

1.3.1 Funzione di distribuzione cumulata

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

Esempio Valori di F_X in corrispondenza degli intervalli discreti

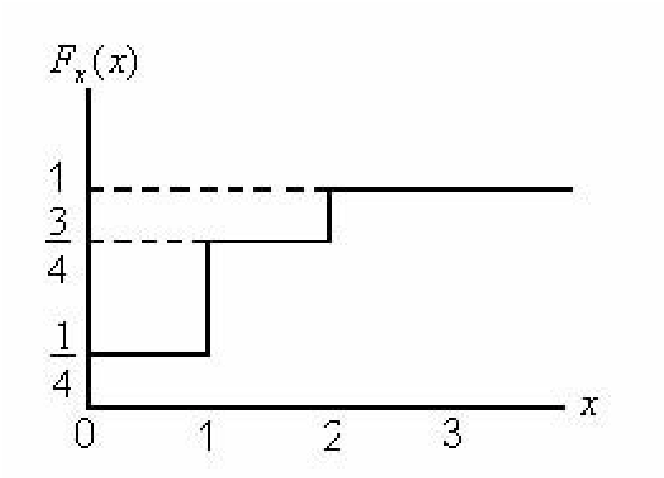


Figura 1.2

- $F_X(2) = 1$
- $F_X(1) = \frac{3}{4}$
- $F_X(0) = \frac{1}{4}$
- $F_X(-1) = 0$

1.4 Variabili aleatorie continue

Le variabili aleatorie continue possono assumere qualsiasi valore numerico reale in un dato intervallo. La *Funzione di densit‡ di probabilit‡* si presenta nel seguente modo:

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x - \frac{\Delta x}{2} \leq X \leq x + \frac{\Delta x}{2}]}{\Delta x}$$

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
- $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$

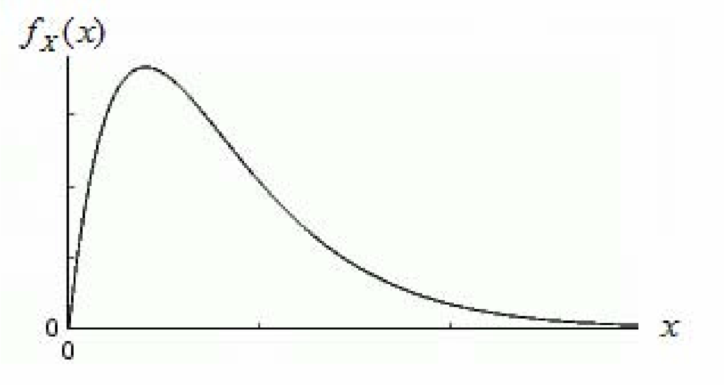


Figura 1.3

Funzione di distribuzione cumulata

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$$

- $\frac{dF_X}{dx} = f_x(x)$ solo per variabili assolutamente continue.
- $F_X(\infty) = 1$
- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(x + \varepsilon) \geq F_x(x)$ per qualsiasi $\varepsilon > 0$
- $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P[x_1 \leq X \leq x_2]$

Per ogni tipo di variabile definita nell'intervallo $[a, b]$:

- $0 \leq F_x(x) \leq 1$;

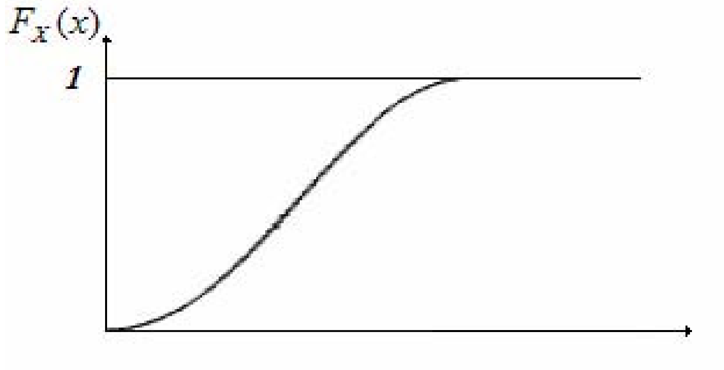


Figura 1.4

- $F_x(a) = 0$;
- $F_x(b) = 1$

Capitolo 2

Schede distribuzione

2.1 Distribuzione uniforme

$$F(x) = \frac{x-\theta_{1i}}{\theta_{1s}-\theta_{1i}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_{1s}-\theta_{1i}}$$

$$x(F) = \theta_{1i} + (\theta_{1s} - \theta_{1i})F$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \frac{1}{2}(\theta_{1i} + \theta_{1s})$	$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\theta_{1i} + \theta_{1s})$
$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\theta_{1s} - \theta_{1i})^2$	$\lambda_2 = \frac{1}{6}(\theta_{1s} - \theta_{1i})$
$c_v = \frac{2}{\sqrt{12}}\frac{(\theta_{1s}-\theta_{1i})}{(\theta_{1i}+\theta_{1s})}$	$\tau_3 = 0$
$\gamma = 0$	$\tau_4 = 0$

$Parametri(M)$	$Parametri(L_M)$
$\theta_{1s} = 2\mu - \theta_{1i}$	$\theta_{1s} = 2\lambda_1 - \theta_{1i}$
$\theta_{1i} = \theta_{1s} - 2\sqrt{3}\sigma$	$\theta_{1i} = \theta_{1s} - 6\lambda_2$

Proprietà

La distribuzione uniforme viene generalmente utilizzata per generare campioni casuali da qualsiasi altra distribuzione, oppure per assegnare una probabilità ad una variabile casuale di cui non si hanno informazioni disponibili e per cui non si possa ipotizzare un'altra distribuzione a priori.

E' utilizzata per rappresentare variabili aleatorie continue di cui è noto a priori che i loro valori possibili appartengono ad un dato intervallo e all'interno di questo intervallo tutti i valori sono equiprobabili.

Per tale motivo al posto di θ_1 e θ_2 (parametri di posizione e scala) vengono introdotti due parametri che definiscono l'intervallo di probabilità: θ_{1i} e θ_{1s} detti appunto *limite inferiore* e *superiore della distribuzione* (infatti il campo di esistenza è compreso tra questi due estremi).

2.2 Distribuzione esponenziale

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-(x-\theta_1)}{\theta_2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{\frac{-(x-\theta_1)}{\theta_2}}$$

$$x(F) = \theta_1 - \theta_2 \ln(1 - F)$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1 + \theta_2$	$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2$
$\sigma^2 = \theta_2^2$	$\lambda_2 = \theta_2/2$
$c_v = \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$	$\tau_3 = 1/3$
$\gamma = 2$	$\tau_4 = 1/6$
$k = 9$	

$Parametri(M)$	$Parametri(L_M)$
$\theta_1 = \mu - \sigma$	$\theta_1 = \lambda_1 - 2\lambda_2$
$\theta_2 = \sigma$	$\theta_2 = 2\lambda_2$

Proprietà speciali

E' una funzione di distribuzione continua, strettamente correlata con la funzione di distribuzione di Poisson nel senso che se gli eventi della variabile aleatoria sono distribuiti secondo una distribuzione di Poisson, allora i tempi fra arrivi successivi (τ) sono distribuiti secondo una distribuzione esponenziale.

$$f(\tau) = \Lambda e^{-\Lambda\tau} \text{ per } 0 \leq \tau \leq \infty,\ \Lambda > 0$$

Il parametro della distribuzione di Poisson Λ, uguale al numero medio di arrivi nell'unità di tempo corrisponde allora al reciproco del tempo medio di attesa: $E[X] = 1/\Lambda$

2.3 Distribuzione Normale

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2}$$

$$x(F) = \theta_1 + \theta_2\Phi^{-1}(F)$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1$	$\lambda_1 = \theta_1$
$\sigma^2 = \theta_2^2$	$\lambda_2 = 0,5642\theta_2$
$c_v = \frac{\theta_2}{\theta_1}$	$\tau_3 = 0$
$\gamma = 0$	$\tau_4 = 0.1226$
$k = 3$	

$Parametri(M)$	$Parametri(L_M)$
$\theta_1 = \mu$	$\theta_1 = \lambda_1$
$\theta_2 = \sigma$	$\theta_2 = \pi^{1/2}\lambda_2$

Forma Canonica

Variabile normale standardizzata o ridotta

$$y = \frac{(x-\mu)}{\sigma} = \frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$F(-y) = 1 - F(y)$$

Valori notevoli di $y(F)$ e di $F(y)$

$$F(y) = (0.025,\ 0.50,\ 0.975)$$

$$y = (\text{-}1.96,\ 0.00,\ 1.96)$$

$$y = (\text{-}2.0,\ \text{-}1.0,\ 0.0,\ 1.0,\ 2.0)$$

$$F(y) = (0.0228,\ 0.1587,\ 0.5,\ 0.8413,\ 0.9772)$$

Rappresentazione in carta probabilistica

$$F_i = F(x_i) = \frac{i-\alpha}{N-2\alpha+1}$$

$$\alpha = \frac{3}{8} \cong \frac{1}{2}$$

$$x = \mu + u\sigma = \theta_1 + y\theta_2$$

$$y = \frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}$$

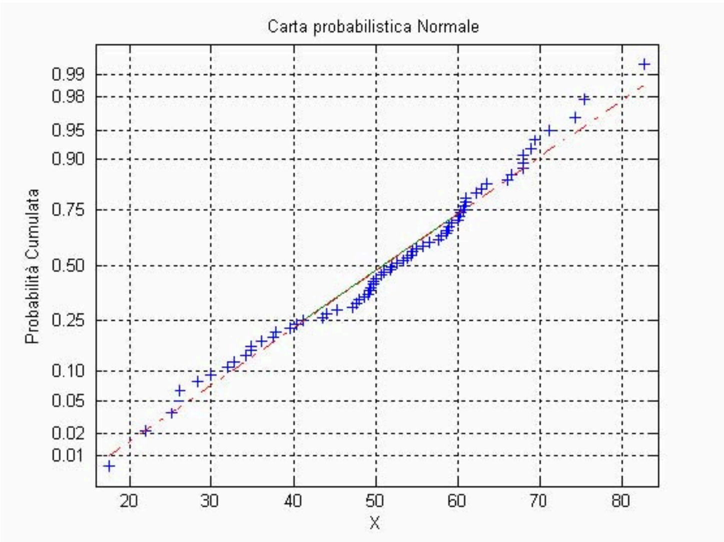


Figura 2.1

2.4 Distribuzione Lognormale a 2 parametri

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right] dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right] \qquad x > 0$$

$$x(F) = \exp\left[\theta_1 + \theta_2\Phi^{-1}(F)\right] \qquad \theta_2 > 0$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \exp(\theta_1 + \theta_2^2/2)$	$\lambda_1 = \exp(\theta_1 + \theta_2^2/2)$
$\sigma^2 = [\exp(\theta_2^2) - 1] \exp(2\theta_1 + \theta_2^2)$	$\lambda_2 = e^{\theta_1+\theta_2^2/2}\left[2\Phi(\theta_2/\sqrt{2}) - 1\right]$

Parametri(M)	*Parametri*(L_M)
$\theta_1 = \ln\mu - 1/2\ln(1 + \sigma^2/\mu^2)$	$\theta_1 = \ln\lambda_1 - \theta_2^2/2$
$\theta_2 = \sqrt{\ln(1 + \sigma^2/\mu^2)}$	$\theta_2 = \sqrt{2}\Phi^{-1}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$

Proprietà speciali

Connessione con parametri della Distribuzione Normale della grandezza $y = \ln x$

La variabile casuale x ha distribuzione lognormale, con parametri θ_1 e θ_2, se $\ln x$ ha distribuzione normale con media μ e deviazione standard σ.

La distribuzione lognormale si utilizza per modellare quantità aleatorie continue che si ritengono avere distribuzione asimmetrica.

2.5 Distribuzione lognormale a 3 parametri

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_3(x-\theta_1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x-\theta_1)-\theta_2}{\theta_3}\right)^2\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log(x-\theta_1)-\theta_2}{\theta_3}\right)$$

$$x(F) = \theta_1 + \exp\left(\theta_2 + \theta_3\Phi^{-1}(F)\right)$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1 + \exp(\theta_2 + \theta_3^2/2)$	$\lambda_1 = \theta_1 + \exp(\theta_2 + \theta_3^2/2)$
$\sigma^2 = [\exp(\theta_3^2) - 1]\exp(2\theta_2 + \theta_3^2)$	$\lambda_2 = \exp(\theta_2 + \theta_3^2/2)[2\Phi(\theta_3/\sqrt{2}) - 1]$
$\gamma = [\exp(\theta_3^2) + 2]\sqrt{\exp(\theta_3^2) - 1}$	$\tau_3 \approx \theta_3 \frac{A_0+A_1\theta_3^2+A_2\theta_3^4+A_3\theta_3^6}{1+B_1\theta_3^2+B_2\theta_3^4+B_3\theta_3^6}$
$\kappa = e^{4\theta_3^2} + 2e^{3\theta_3^2} + 3e^{2\theta_3^2} - 3$	$\tau_4 \approx \tau_4^0 + \theta_3^2 \frac{C_0+C_1\theta_3^2+C_2\theta_3^4+C_3\theta_3^6}{1+D_1\theta_3^2+D_2\theta_3^4+D_3\theta_3^6}$

$Parametri(M)$	$Parametri(L_M)$
$\theta_1 = \mu - \frac{\sigma}{t}$	$\theta_1 = \xi - \frac{\alpha}{k}$
$\theta_3 = \sqrt{\log\left(1 + \frac{\sigma^2}{(\mu-\theta_3)}\right)}$	$\theta_2 = \log\left(-\frac{\alpha}{k}\right)$
$\theta_2 = \log(\mu - \theta_1) - \frac{\theta_3}{2}$	$\theta_3 = -k$
$t = \sqrt[3]{\phi + \psi} + \sqrt[3]{\phi - \psi}$	$k \approx -\tau_3 \frac{E_0+E_1\tau_3^2+E_2\tau_3^4+E_3\tau_3^6}{1+F_1\tau_3^2+F_2\tau_3^4+F_3\tau_3^6}$
$\phi = \frac{\mu_3}{2\sigma^3}$	$\alpha = \frac{\lambda_2 k e^{-\theta_3^2/2}}{1-2\Phi(-\theta_3/\sqrt{2})}$
$\psi = \frac{\mu_3^2}{4\sigma^6} + 1$	$\xi = \lambda_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3}(1 - e^{\theta_3^2/2})$

Note

Il simbolo $\Phi(\cdot)$ rappresenta la funzione di probabilità cumulata della distribuzione Normale standard, e $\Phi^{-1}(\cdot)$ la relativa funzione quantile.

I coefficienti di approssimazione riportati nell'equazioni relative agli L-momenti sono descritti da Hosking & Wallis (1997) e validi per $|\tau_3| \leq 0.94$.

	$\tau_4^0 = 1.2260172 \times 10^{-1}$	
$A_0 = 4.8860251 \times 10^{-1}$	$C_0 = 1.8756590 \times 10^{-1}$	$E_0 = 2.0466534$
$A_1 = 4.4493076 \times 10^{-3}$	$C_1 = -2.5352147 \times 10^{-3}$	$E_1 = -3.6544371$
$A_2 = 8.8027039 \times 10^{-4}$	$C_2 = 2.6995102 \times 10^{-4}$	$E_2 = 1.8396733$
$A_3 = 1.1507084 \times 10^{-6}$	$C_3 = -1.8446680 \times 10^{-6}$	$E_3 = -0.20360244$
$B_1 = 6.4662924 \times 10^{-2}$	$D_1 = 8.2325617 \times 10^{-2}$	$F_1 = -2.0182173$
$B_2 = 3.3090406 \times 10^{-3}$	$D_2 = 4.2681448 \times 10^{-3}$	$F_2 = 1.2420401$
$B_3 = 7.4290680 \times 10^{-5}$	$D_3 = 1.1653690 \times 10^{-4}$	$F_3 = -0.21741801$

2.6 Distribuzione di Gumbel

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

$$x(F) = \theta_1 - \theta_2 \ln[-\ln(F)]$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1 + 0,5772\theta_2$	$\lambda_1 = \theta_1 + 0,5772\theta_2$
$\sigma^2 = \pi^2(\theta_2^2/6)$	$\lambda_2 = \theta_2 \log 2$
$\gamma = 1,1396$	$\tau_3 = 0,1699$
$\kappa = 5 + 2/5$	$\tau_4 = 0,1504$

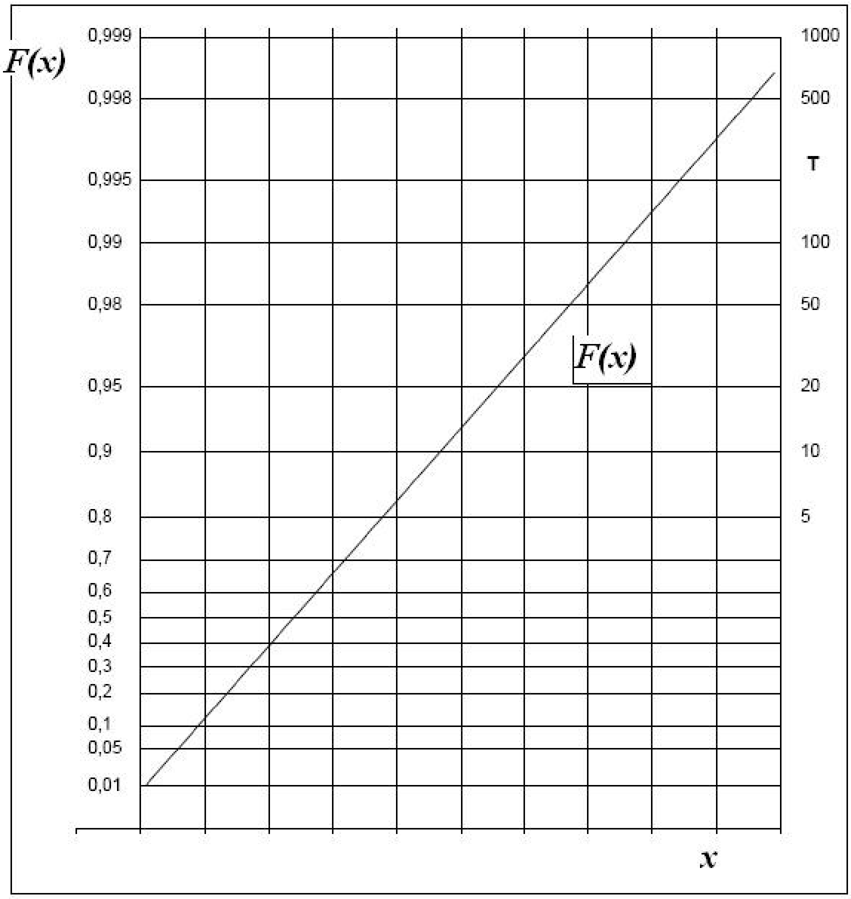
Parametri(M)	*Parametri(L_M)*
$\theta_1 = \mu - 0,5772\sigma(\sqrt{6}/\pi)$	$\theta_1 = \lambda_1 - 0,5772\theta_2$
$\theta_2 = \sigma(\sqrt{6}/\pi)$	$\theta_2 = \lambda_2/\log 2$

Forma Canonica

Variabile normale standardizzata o ridotta

$$y = \frac{1}{\theta_2}(x - \theta_1)$$

$$F(y) = \exp[-\exp^{-y}]$$



Esempio di carta probabilistica di Gumbel

Figura 2.2: Esempio di carta probabilistica di Gumbel.

2.7 Distribuzione GEV

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(1-\theta_3)y - e^{-y}}$$

$$y = \begin{cases} -\theta_3^{-1} \log\{1 - \theta_3(x-\theta_1)/\theta_2\} \ , & \theta_3 \neq 0 \\ (x-\theta_1)/\theta_2 \ , & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$x(F) = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2[1 - (-\log F)^{\theta_3}]/\theta_3 \ , & \theta_3 \neq 0 \\ \theta_1 - \theta_2 \log(-\log F) \ , & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Momenti

$$\mu = \theta_1 + \theta_2[1 - \Gamma(1+\theta_3)]/\theta_3$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)^2 \left[\Gamma(1+2\theta_3) - \gamma^2(1+\theta_3)\right]$$

$\gamma =$ vedere ST eq. 18.2.19

L Momenti

$$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2[1 - \Gamma(1+\theta_3)]/\theta_3$$

$$\lambda_2 = \theta_2(1 - 2^{-\theta_3})\Gamma(1+\theta_3)]/\theta_3$$

$$\tau_3 = 2(1 - 3^{-\theta_3})/(1 - 2^{-\theta_3}) - 3$$

$$\tau_4 = \frac{5(1-4^{-\theta_3}) - 10(1-3^{-\theta_3}) + 6(1-2^{-\theta_3})}{(1-2^{-\theta_3})}$$

Parametri(M)

$$\theta_1 = \mu - \frac{\theta_2[1-\Gamma(1+\theta_3)]}{\theta_3}$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_3(\mu-\theta_1)}{[1-\Gamma(1+\theta_3)]}$$

$$\theta_3 = \frac{\theta_2(1-\Gamma)}{(\mu-\theta_1+\theta_2\Gamma)}$$

Parametri(L_M)

$$\theta_3 \simeq 7.8590c + 2.9554c^2$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_2\theta_3}{(1-2^{-theta_3})\Gamma(1+\theta_3)}$$

$$\theta_1 = \lambda_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3}(1 - \Gamma(1+\theta_3))$$

$$c = \frac{2}{3+\tau_3} - \frac{\log 2}{\log 3}$$

Note

Per $\theta_3 = 0$ la distribuzione GEV corrisponde ad una distribuzione di Gumbel. L'approssimazione utilizzata per il calcolo di θ_3 con il metodo degli L-momenti ha un'accuratezza migliore di 9×10^4 per $-0.5 \leq \tau_3 \leq 0.5$.

$$\gamma_x = \text{Sign}(\kappa) \frac{-\Gamma(1+3\kappa) + 3\Gamma(1+\kappa)\Gamma(1+2\kappa) - 2\Gamma^3(1+\kappa)}{[\Gamma(1+2\kappa) - \Gamma^2(1+\kappa)]^{3/2}} \qquad (18.2.19)$$

where Sign (κ) is plus or minus 1 depending on the sign of κ, and $\Gamma(\,)$ is the gamma function for which an approximation is supplied in Eq. (18.2.21). For $\kappa > -1$, the

2.8 Distribuzione di Pearson tipo III (Gamma)

$$F(x) =$$

$$f(x) = \frac{1}{x|\theta_2|\Gamma(\theta_3)} \left(\frac{\log(x)-\theta_1}{\theta_2}\right)^{\theta_3-1} e^{-\frac{\log(x)-\theta_1}{\theta_2}}$$

$$x(F) =$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1 + \theta_3\theta_2$	$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2\theta_3$
$\sigma^2 = \theta_3\theta_2^2$	$\lambda_2 = \pi^{-1/2}\theta_2\Gamma(\theta_3 + 1/2)/\Gamma(\theta_3)$
$c_v = \frac{\theta_2\sqrt{\theta_3}}{\theta_1+\theta_2\theta_3}$	$\tau_3 \approx \theta_2^{-1/2}\frac{A_0+A_1\theta_2^-1+A_2\theta_2^-2+A_3\theta_2^-3}{1+B_1\theta_2^-1+B_2\theta_2^-2} \quad \theta_2 \geq 1$
$\gamma = 2\mathrm{sign}(\theta_2)/\sqrt{\theta_3}$	$\tau_3 \approx \frac{1+E_1\theta_2+E_2\theta_2^2+E_3\theta_2^3}{1+F_1\theta_2+F_2\theta_2^2+F_3\theta_2^3} \quad \theta_2 \leq 1$
$\kappa = 6/\theta_3 + 3$	$\tau_4 \approx \frac{C_0+C_1\theta_2^-1+C_2\theta_2^-2+C_3\theta_2^-3}{1+D_1\theta_2^-1+D_2\theta_2^-2} \quad \theta_2 \geq 1$
	$\tau_4 \approx \frac{1+G_1\theta_2+G_2\theta_2^2+G_3\theta_2^3}{1+H_1\theta_2+H_2\theta_2^2+H_3\theta_2^3} \quad \theta_2 \leq 1$

Parametri(M)	*Parametri(L_M)*
$\theta_1 = \mu - \sigma[\frac{6}{k-3}]^{1/2}$	$\theta_1 = \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{\pi^{-1/2}}\frac{\Gamma(\theta_3)}{\Gamma(\theta_3+1/2)}\theta_3$
$\theta_2 = \sigma\sqrt{\frac{k-3}{6}}$	$\theta_2 = \frac{\lambda_2}{\pi^{-1/2}}\frac{\Gamma(\theta_3)}{\Gamma(\theta_3+1/2)}$
$\theta_3 = \frac{6}{k-3}$	$\theta_3 = g(\lambda_2, \theta_2)$

Propriet‡ speciali

Definizione della funzione Gamma

The (complete) Gamma function is defined to be an extension of the factorial to complex and real number arguments. It is related to the factorial by:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

a slightly unfortunate notation due to Legendre which is now universally used instead of Gauss's simpler (Gauss 1812; Edwards 2001, p. 8).

It is analytic everywhere except at $z = 0, -1, -2, \ldots$ and the residue at $z = -k$ is

$$Res_{z=-k}\Gamma(z) = \tfrac{(-1)^k}{k!}$$

There are no points z at which $\Gamma(z) = 0$.

There are a number of notational conventions in common use for indication of a power of a gamma functions. While authors such as Watson (1939) use $\Gamma^n(z)$(i.e., using a trigonometric function-like convention), it is also common to write $[\Gamma(z)]^n$.

[Per dettagli vedi anche http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html]

Tabella 2.1: Coefficienti di approssimazione per le Equazioni (**??**)-(**??**).

$A_0 = 3.2573501 \times 10^{-1}$	$C_0 = 1.2260172 \times 10^{-1}$
$A_1 = 1.6869150 \times 10^{-1}$	$C_1 = 5.3730130 \times 10^{-2}$
$A_2 = 7.8327243 \times 10^{-2}$	$C_2 = 4.3384378 \times 10^{-2}$
$A_3 = -2.9120539 \times 10^{-3}$	$C_3 = 1.1101277 \times 10^{-2}$
$B_1 = 4.6697102 \times 10^{-1}$	$D_1 = 1.8324466 \times 10^{-1}$
$B_2 = 2.4255406 \times 10^{-1}$	$D_2 = 2.0166036 \times 10^{-1}$
$E_1 = 2.3807576$	$G_1 = 2.1235833$
$E_2 = 1.5931792$	$G_2 = 4.1670213$
$E_3 = 1.1618371 \times 10^{-1}$	$G_3 = 3.1925299$
$F_1 = 5.1533299$	$H_1 = 9.0551443$
$F_2 = 7.1425260$	$H_2 = 2.6649995 \times 10^{-1}$
$F_3 = 1.9745056$	$H_3 = 2.6193668 \times 10^{-1}$

2.9 Distribuzione Logistica generalizzata

$$F(x) = \frac{1}{1+\left[1-\frac{\theta_3}{\theta_2}(x-\theta_1)\right]^{1/\theta_3}}$$

$$f(x) =$$

$$x(F) = \theta_1 + \frac{\theta_2}{\theta_3}\left[1 - \left(\frac{1-F}{F}\right)^{\theta_3}\right]$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1 + \theta_2(1/\theta_3 - \pi/\sin(\pi\theta_3))$	$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2(1/\theta_3 - \pi/\sin(\pi\theta_3))$
$\sigma^2 = \pi\theta_2^2\left(\frac{2}{\theta_3\sin(2\pi\theta_3)} - \frac{\pi}{\sin^2(\pi\theta_3)}\right)$	$\lambda_2 = \theta_2\theta_3\pi/\sin(\pi\theta_3)$
$c_v = \frac{\theta_2\sqrt{(\frac{2\pi}{\theta_3\sin(2\pi\theta_3)} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\theta_3)})}}{\theta_1+\theta_2(\frac{1}{\theta_3} - \frac{\pi}{\sin(\pi\theta_3)})}$	$\tau_3 = -\theta_3$
$\gamma = NA, seeJOeq.(23.71)$	$\tau_4 = (1+5\theta_3^2)/6$
$k = NA, seeJOeq.(23.71)$	

Parametri(M)	*Parametri(LM)*
$\theta_1 = f(\sigma^2, \theta_3)$	$\theta_1 = \lambda_1 + \lambda_2\sin(-\pi\tau_3)/(\tau_3\pi)[-1/\tau_3 - \pi/\sin(-\pi\tau_3)]$
$\theta_2 = g(\mu, \theta_1, \theta_3)$	$\theta_2 = -\lambda_2\sin(-\tau_3\pi)/(\tau_3\pi)$
$\theta_3 = h(\sigma^2, \theta_1)$	$\theta_3 = -\tau_3$

Propriet‡ speciali

(Es. Connessioni fra diversi tipi di distribuzioni)

2.10 Distribuzione di Pareto generalizzata

$$F(x) = 1 - [1 - \theta_3 \tfrac{(x-\theta_1)}{\theta_2}]^{1/\theta_3}$$

$$f(x) = \tfrac{1}{\theta_2}[1 - \theta_3 \tfrac{(x-\theta_1)}{\theta_2}]^{1/\theta_3 - 1}$$

$$x(F) = \theta_1 + \tfrac{\theta_2}{\theta_3}[1 - (1-F)^{\theta_3}]$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu = \theta_1 + \theta_2/(1+\theta_3)$	$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2/(1+\theta_3)$
$\sigma^2 = \theta_2^2/\left[(1+\theta_3)^2(1+2\theta_3)\right]$	$\lambda_2 = \theta_2/[(1+\theta_3)(2+\theta_3)]$
$c_v = \frac{\theta_2(1+\theta_3)}{[\theta_1(1+\theta_3)+\theta_2]\sqrt{[(1+\theta_3)^2(1+2\theta_3)]}}$	$\tau_3 = (1-\theta_3)/(3+\theta_3)$
$\gamma = 2\sqrt{1+2\theta_3}(1-\theta_3)/(1+3\theta_3)$	$\tau_4 = (1-\theta_3)(2-\theta_3)/[(3+\theta_3)(4+\theta_3)]$
$\kappa = \frac{3(1+2\theta_3)(3-\theta_3+2\theta_3^2)}{(1+3\theta_3)(1+4\theta_3)}$	

$Parametri(M)$	$Parametri(L_M)$
$\theta_1 = \mu - \sigma\sqrt{1+2\theta_3}$	$\theta_1 = \lambda_1 - \lambda_2(2+\theta_3)$
$\theta_2 = \sigma(1+\theta_3)\sqrt{1+2\theta_3}$	$\theta_2 = \lambda_2[(1+\theta_3)(2+\theta_3)]$
$\theta_3 = f(\gamma)$	$\theta_3 = (3\tau_3 - 1)/(-3\tau_3 - 1)$

Propriet‡ speciali

(Es. Connessioni fra diversi tipi di distribuzioni)

2.11 Distribuzione Kappa

$$F(x) = [1 - h[1 - k(x - \theta_1)/\theta_2]^{\frac{1}{k}}]^{\frac{1}{h}}$$

$$f(x) = \theta_2^{-1}[1 - k(x - \theta_1)/\theta_2]^{\frac{1}{k-1}}[F(x)]^{1-h}$$

$$x(F) = \theta_1 + \frac{\theta_2}{k}[1 - (\frac{1-F^h}{h})^k]$$

Momenti	*L Momenti*
$\mu =?$	$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2(1 - g_1)/k$
$\sigma^2 =?$	$\lambda_2 = \theta_2(g_1 - g_2)/k$
$c_v =?$	$\tau_3 = (-g_1 + 3g_2 - 2g_3)/(g_1 - g_2)$
$\gamma =?$	$\tau_4 = -(-g_1 + 6g_2 - 10g_3 + 5g_4)/(g_1 - g_2)$
$k =?$	

$Parametri(M)$	$Parametri(L_M)$
$\theta_1 =?$	$\theta_1 = n.d$
$\theta_2 =?$	$\theta_2 = n.d$
	$k = n.d$
	$h = n.d$

There are no simple expressions for the parameters in terms of the L-moments. However, equations overwritten give τ_3 and τ_4 in terms of k and h and can be solved for k and h given τ_3 and τ_3 by Newton-Raphson iteration. An algorithm is described by Hosking (1996).