POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Corso di IDROLOGIA

Raccolta delle esercitazioni

Docente: Prof. Pierluigi Claps

Studente: Salvatore D'Urso 242864

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

1. Esercitazione 1: Analisi esplorativa di una serie di dati

Si considerino due serie storiche di dati di massimi annui di portata (colmi di piena):
- Chisone, San Martino (TO) - massimi annui di portata (colmi di piena);
- Pragelato (TO) - massimi annui di precipitazione di durata 24h.

Per entrambe le serie, con l'ausilio del software Excel, si effettuino le seguenti operazioni:

1. Tracciamento del diagramma cronologico della serie

A tal scopo si utilizza un istogramma, in cui ogni colonna rappresenta un valore di colmo di piena nel relativo anno in cui esso è stato misurato.
Questa rappresentazione permette di individuare chiaramente gli anni in cui si è in assenza di dati registrati. Inoltre è possibile notare subito l'anno di massima e di minima portata di colmo.

2. Tracciamento del diagramma per punti

Questo tipo di grafico permette di mostrare al meglio l'ampiezza del campione di dati osservati.

3. Tracciamento del diagramma delle frequenze assolute e relative

Si procede nel seguente modo:
- si ordinano in senso crescente gli elementi del campione, detti x nel seguito;
- si divide in k classi di uguale ampiezza l'intervallo $[x_{min}, x_{max}]$, con:

  $k = int\ (1 + 3{,}3 \log N)$,

  N = numero di dati del campione;
- si individua l'ampiezza delle classi secondo l'espressione

  $$dx = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}\ ;$$
- si calcola la frequenza assoluta come numero di elementi all'interno di una classe (questa operazione è facilitata dall'utilizzo della funzione *CONTA.SE* di Excel);
- si calcola la frequenza relativa di ogni classe come rapporto della frequenza assoluta della classe con la numerosità N del campione.

4. Calcolo dei valori centrali e dei momenti campionari

Si trovino in particolare i valori di:
- media campionaria (funzione *MEDIA* di Excel);
- varianza campionaria (funzione *VAR.POP*);
- varianza campionaria indistorta (funzione *VAR*);
- scarto quadratico medio (come radice quadrata della varianza campionaria indistorta);
- coefficiente di asimmetria indistorto (funzione *ASIMMETRIA* di Excel);
- coefficiente di asimmetria (da ricavare dal coefficiente di asimmetria indistorto).

5. Costruzione del diagramma delle frequenze cumulate

Si procede nel seguente modo:

- si ordinano in senso crescente gli elementi del campione;
- si associa a ciascun valore il numero d'ordine i;
- si rappresenta la curva relativa alla frequenza di non superamento usando l'espressione $F(i) = i/N$.

6. Creazione del box plot

Attraverso vari utilizzi dei grafici di Excel, è possibile creare il box plot (o diagramma "a scatola e baffi") della serie di dati.
I valori indicativi, subito individuabili sul box plot, sono:

- il primo quartile;
- il valore minimo tra quelli osservati;
- la mediana;
- il valore massimo tra quelli osservati;
- il terzo quartile.

Si rappresentano due box plot, uno relativo ai valori reali, l'altro relativo ai valori normalizzati rispetto alla media.

N.B.: i ragionamenti fatti con le portate valgono anche per la serie di Pragelato, in cui si considerano delle altezze di pioggia.

1.1. Serie di dati: Chisone, San Martino (TO)

Tabella 1.1.1: Chisone, San Martino (TO)

Anno	Portata Q [m^3/s]
1955	55,60
1956	163,00
1957	345,00
1958	79,80
1959	342,00
1960	200,00
1961	124,00
1962	496,00
1963	147,00
1964	83,10
1965	64,90
1966	210,00
1967	18,00
1968	187,00
1969	181,00
1970	43,80
1977	1493,00
1993	230,00
1994	370,00
1997	150,00
1998	170,00
1999	420,00
2000	850,00
2001	220,00
2002	210,00
2003	120,00
2004	80,00
2005	170,00
2006	185,00
2007	160,00
2008	670,00
2009	228,00
2010	365,00

1. *Tracciamento del diagramma cronologico della serie*

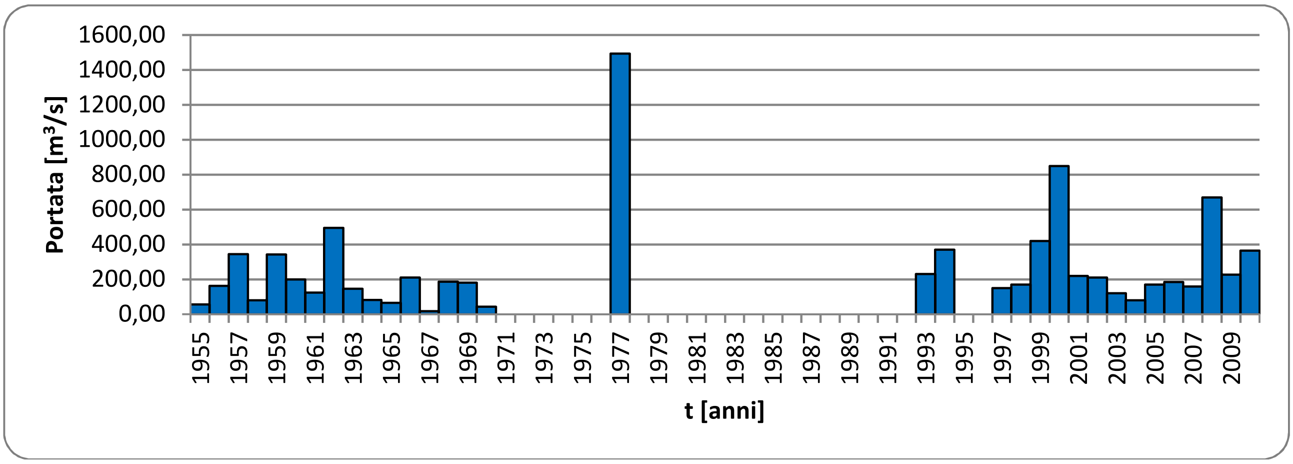


Figura 1.1.1: diagramma cronologico della serie

2. *Tracciamento del diagramma per punti*

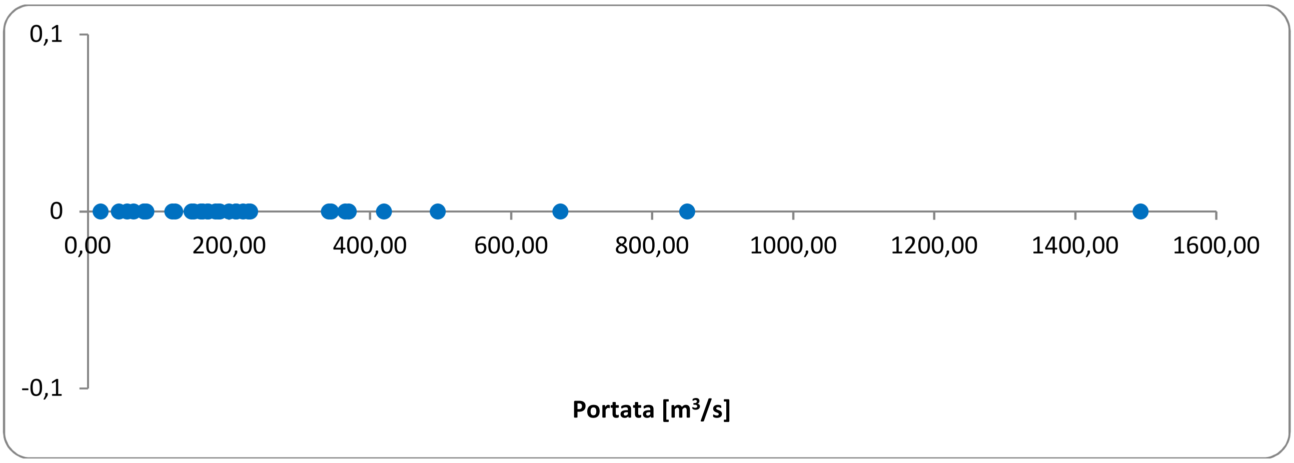


Figura 1.1.2: diagramma per punti

3. *Tracciamento del diagramma delle frequenze assolute e relative*

Tabella 1.1.2: valori utili all'elaborazione dei diagrammi

$\boldsymbol{x_{min}}$	$18{,}00\ m^3/s$
$\boldsymbol{x_{max}}$	$1493{,}00\ m^3/s$
$\boldsymbol{N}$	33
$\boldsymbol{k} = int\ (1 + 3{,}3 \log N)$	6
$\boldsymbol{dx} = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{k}$	$245{,}83\ m^3/s\ \cong 250\ m^3/s$

Tabella 1.1.3: classi, con frequenze assolute e relative

Classe	Estremi delle classi [mm]		Frequenza assoluta	Frequenza relativa
1	0	250	24	0,73
2	250	500	6	0,18
3	500	750	1	0,03
4	750	1000	1	0,03
5	1000	1250	0	0,00
6	1250	1500	1	0,03

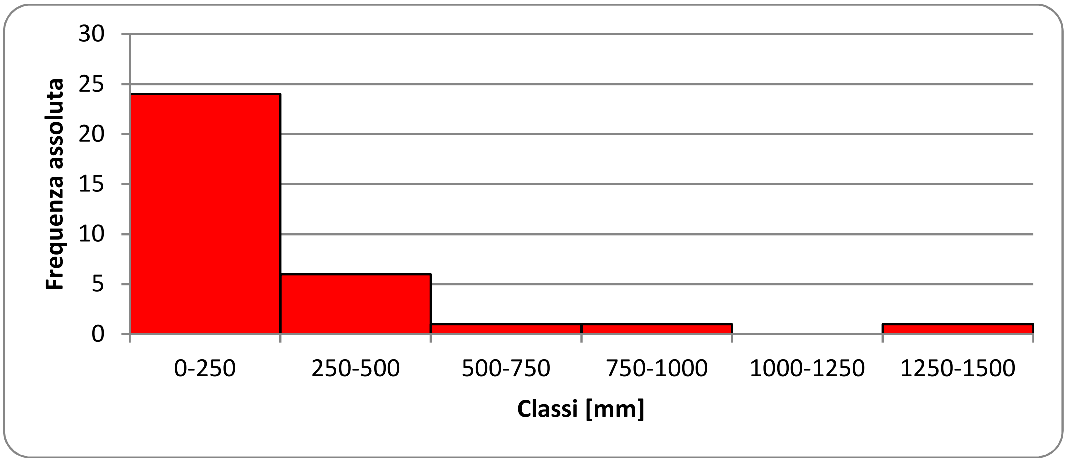


Figura 1.1.3: diagramma delle frequenze assolute

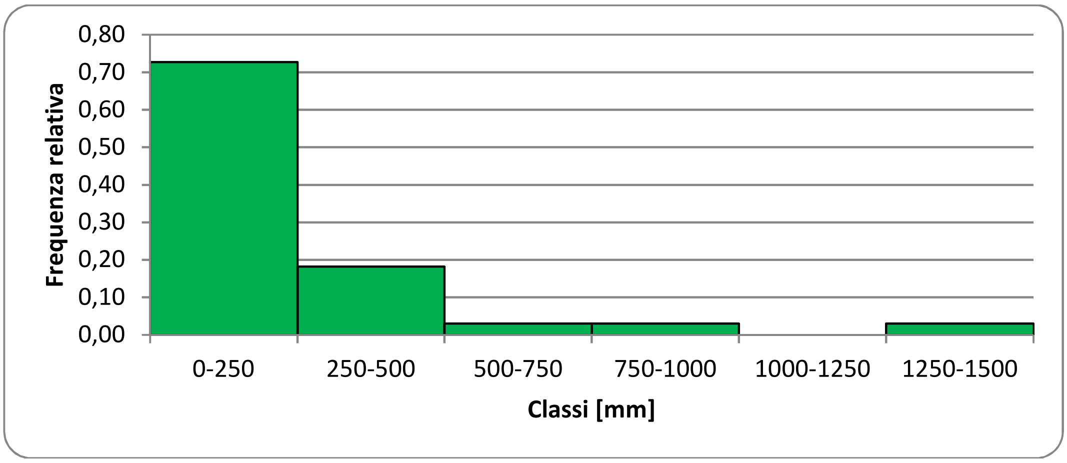


Figura 1.1.4: diagramma delle frequenze relative

4. Calcolo dei valori centrali e dei momenti campionari

- Media campionaria:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 267{,}61\ m^3/s$$

- Varianza campionaria:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 77641{,}07\ m^3/s$$

- Varianza campionaria indistorta:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 80067{,}35\ (m^3/s)^2$$

- Scarto quadratico medio:

$$s = \sqrt{s^2} = 282{,}96\ m^3/s$$

- Coefficiente di asimmetria indistorto:

$$\gamma = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \cdot \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3}{s^3} = 3{,}00$$

- Coefficiente di asimmetria:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^3}{s^3} = 2{,}73$$

5. Costruzione del diagramma delle frequenze cumulate

Tabella 1.1.4: frequenze cumulate

i	Q [m^3/s]	F(i)=i/N
1	18,00	0,030
2	43,80	0,061
3	55,60	0,091
4	64,90	0,121
5	79,80	0,152
6	80,00	0,182
7	83,10	0,212
8	120,00	0,242
9	124,00	0,273
10	147,00	0,303
11	150,00	0,333
12	160,00	0,364
13	163,00	0,394
14	170,00	0,424
15	170,00	0,455
16	181,00	0,485
17	185,00	0,515
18	187,00	0,545
19	200,00	0,576
20	210,00	0,606
21	210,00	0,636
22	220,00	0,667
23	228,00	0,697
24	230,00	0,727
25	342,00	0,758
26	345,00	0,788
27	365,00	0,818
28	370,00	0,848
29	420,00	0,879
30	496,00	0,909
31	670,00	0,939
32	850,00	0,970
33	1493,00	1,000

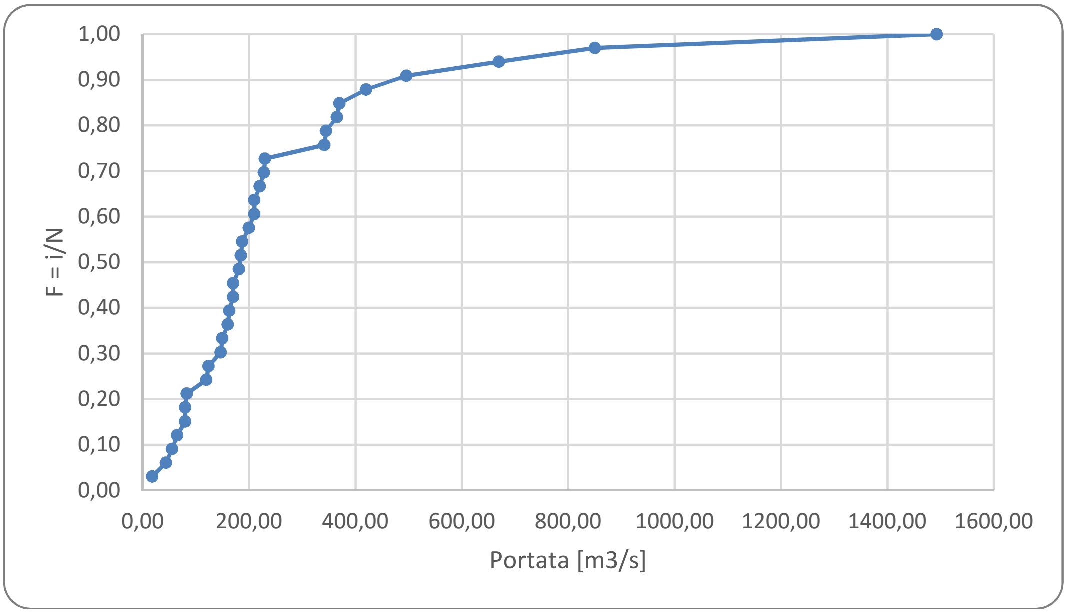


Figura 1.1.5: diagramma delle frequenze relative

6. Creazione del box plot

Tabella 1.1.5: valori di riferimento per il box plot

quartile q_1	124
x_{min}	18
mediana	185,00
x_{max}	1493
quartile q_3	342

Tabella 1.1.6: valori di riferimento per il box plot adimensionalizzato

quartile q_1	0,463
x_{min}	0,067
mediana	0,691
x_{max}	5,579
quartile q_3	1,278

***N.B.*:** tutti i valori riproposti in *Tabella 1.1.5* e *Tabella 1.1.6* sono relativi a portate [m^3/s].

Figura 1.1.6: box plot

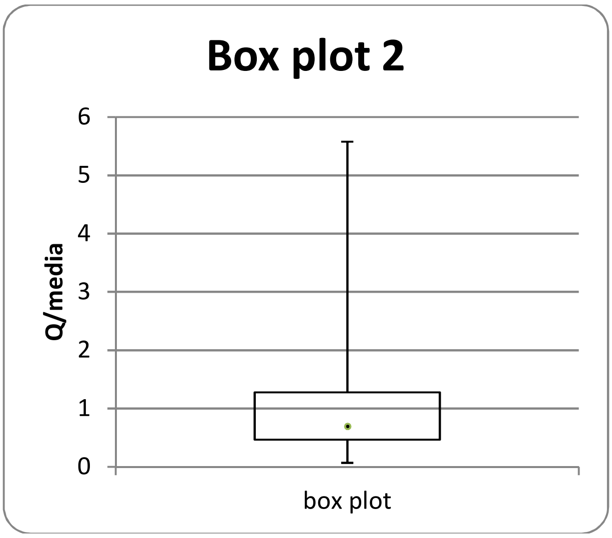


Figura 1.1.7: box plot adimensionalizzato

1.2. Serie di dati: Pragelato (TO)

Tabella 1.2.1: Chisone, Pragelato (TO)

Anno	Altezza [mm]
1955	30,00
1956	69,80
1957	114,00
1958	41,80
1959	75,00
1961	27,00
1962	113,00
1963	49,60
1964	58,00
1965	60,60
1966	35,00
1969	41,60
1970	36,00
1971	63,00
1972	79,00
1973	106,80
1974	59,60
1975	57,00
1976	80,60
1979	51,00
1980	38,20
1981	139,00
1982	34,20
1984	30,80
1985	49,40
1986	77,00

1. Tracciamento del diagramma cronologico della serie

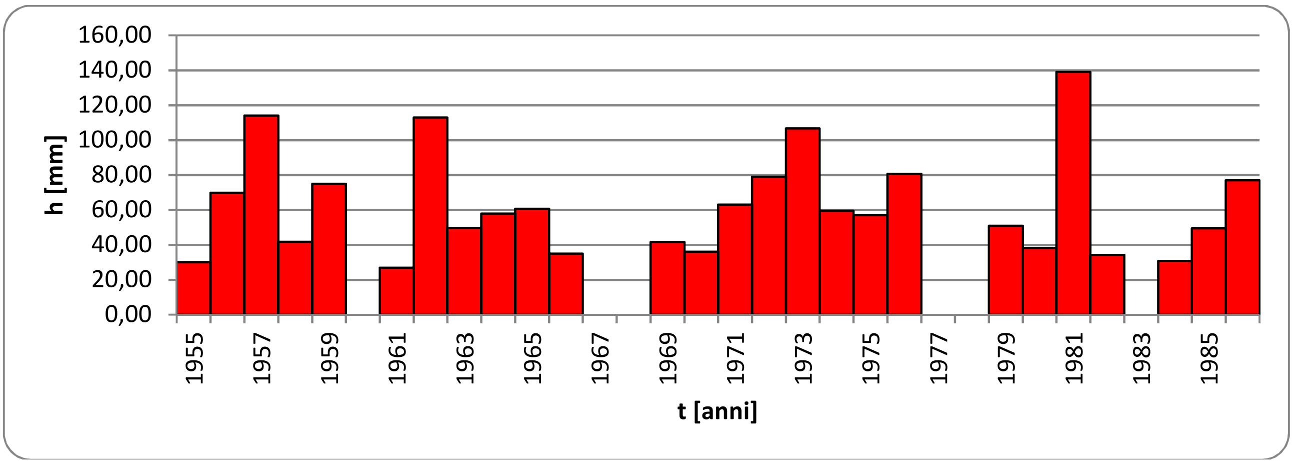


Figura 1.2.1: diagramma cronologico della serie

2. Tracciamento del diagramma per punti

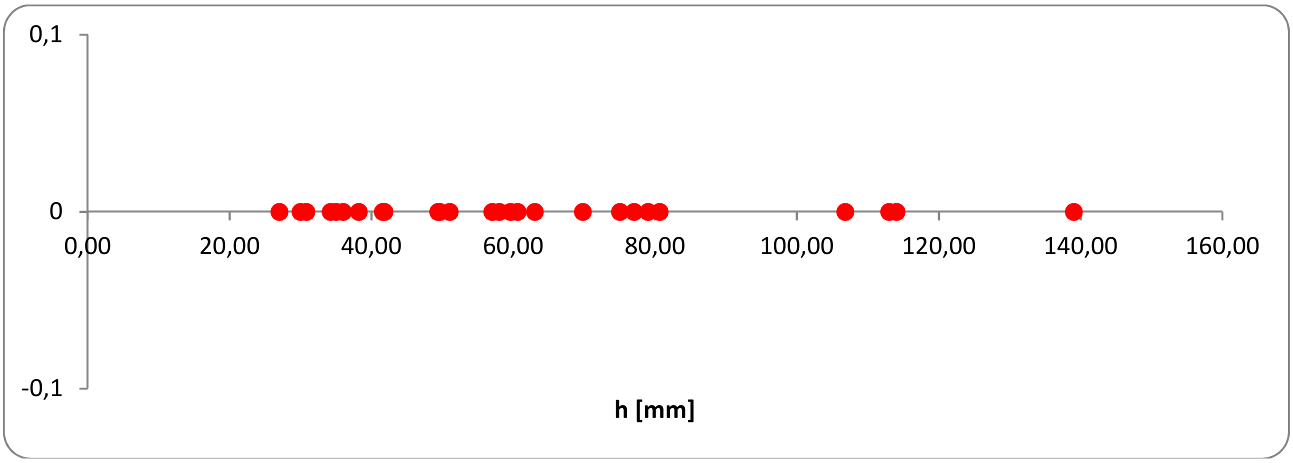


Figura 1.2.2: diagramma per punti

3. Tracciamento del diagramma delle frequenze assolute e relative

Tabella 1.2.2: valori utili per l'elaborazione dei diagrammi

$\boldsymbol{x_{min}}$	$27{,}00\ mm$
$\boldsymbol{x_{max}}$	$139{,}00\ mm$
$\boldsymbol{N}$	26
$\boldsymbol{k} = int\ (1 + 3{,}3 \log N)$	5
$\boldsymbol{dx} = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{k}$	$22{,}4\ mm\ \cong 25\ mm$

Tabella 1.2.3: classi, con frequenze assolute e relative

Classe	Estremi delle classi		Frequenza assoluta	Frequenza relativa
1	25	50	11	0,42
2	50	75	7	0,27
3	75	100	4	0,15
4	100	125	3	0,12
5	125	150	1	0,04

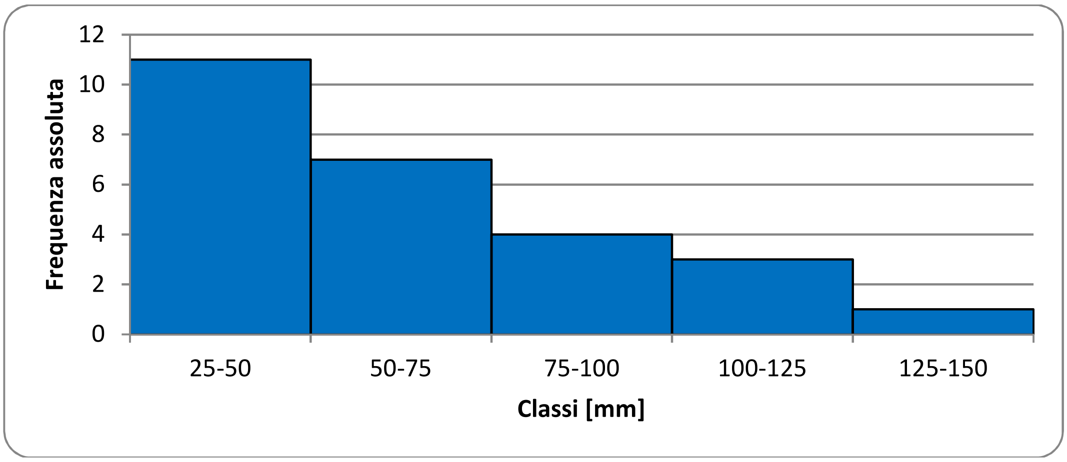


Figura 1.2.3: diagramma delle frequenze assolute

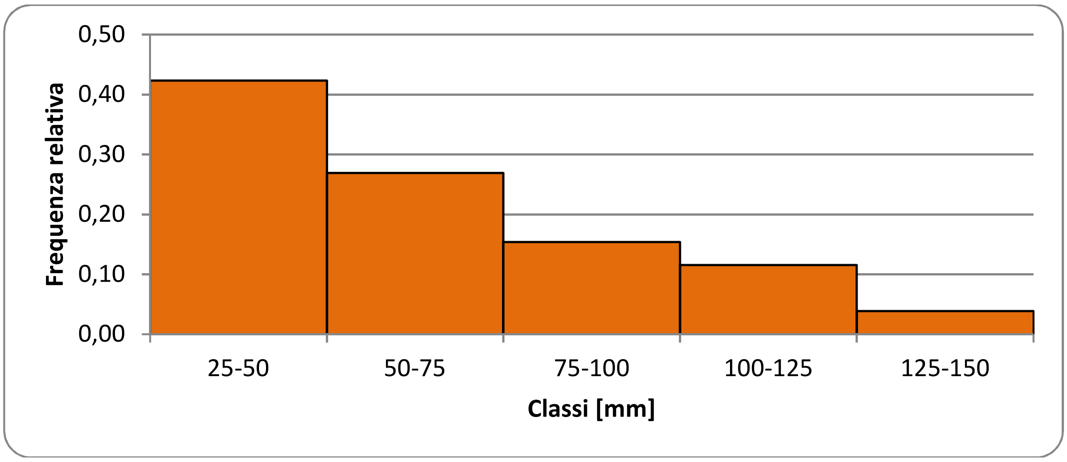


Figura 1.2.4: diagramma delle frequenze relative

4. Calcolo dei valori centrali e dei momenti campionari

- Media campionaria:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 62{,}19\ mm$$

- Varianza campionaria:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 830{,}92\ mm$$

- Varianza campionaria indistorta:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 864{,}16\ (mm)^2$$

- Scarto quadratico medio:

$$s = \sqrt{s^2} = 29{,}40\ mm$$

- Coefficiente di asimmetria indistorto:

$$\gamma = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \cdot \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3} = 1{,}06$$

- Coefficiente di asimmetria:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3} = 0{,}95$$

5. Costruzione del diagramma delle frequenze cumulate

Tabella 1.2.4: frequenze cumulate

i	h [mm]	F(i)=i/N
1	27,00	0,038
2	30,00	0,077
3	30,80	0,115
4	34,20	0,154
5	35,00	0,192
6	36,00	0,231
7	38,20	0,269
8	41,60	0,308
9	41,80	0,346
10	49,40	0,385
11	49,60	0,423
12	51,00	0,462
13	57,00	0,500
14	58,00	0,538
15	59,60	0,577
16	60,60	0,615
17	63,00	0,654
18	69,80	0,692
19	75,00	0,731
20	77,00	0,769
21	79,00	0,808
22	80,60	0,846
23	106,80	0,885
24	113,00	0,923
25	114,00	0,962
26	139,00	1,000

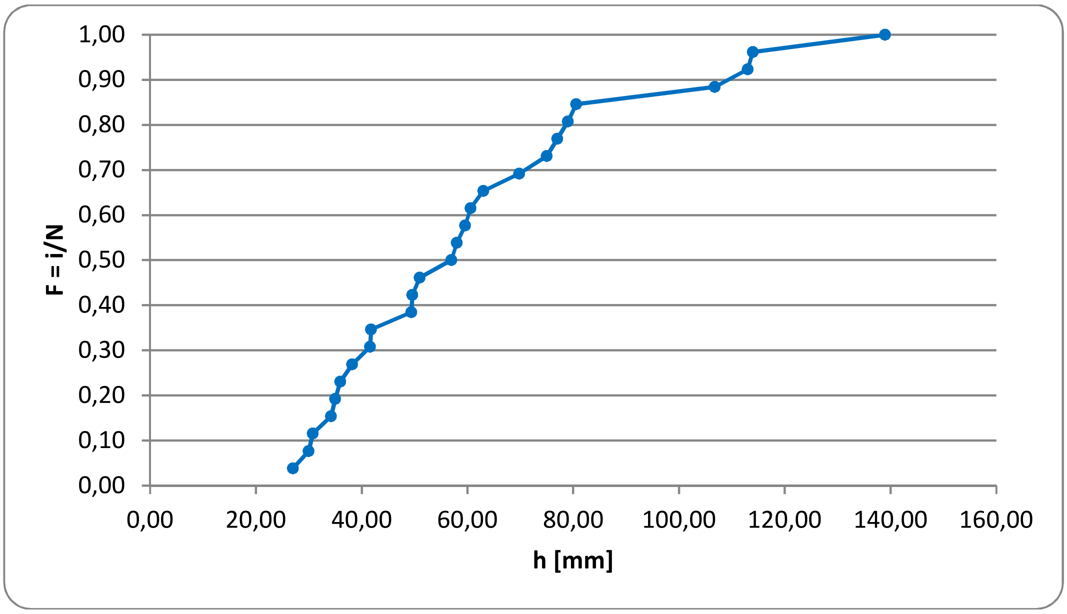


Figura 1.2.5: diagramma delle frequenze cumulate

6. Creazione del box plot

Tabella 1.2.5: valori di riferimento per il box plot

quartile q_1	39,05
x_{min}	27
mediana	57,50
x_{max}	139
quartile q_3	76,50

Tabella 1.2.6: valori di riferimento per il box plot adimensionalizzato

quartile q_1	0,6278
x_{min}	0,434
mediana	0,925
x_{max}	2,235
quartile q_3	1,230

N.B.: tutti i valori riproposti in *Tabella 1.2.5* e *Tabella 1.2.6* sono relativi ad altezze di pioggia [mm].

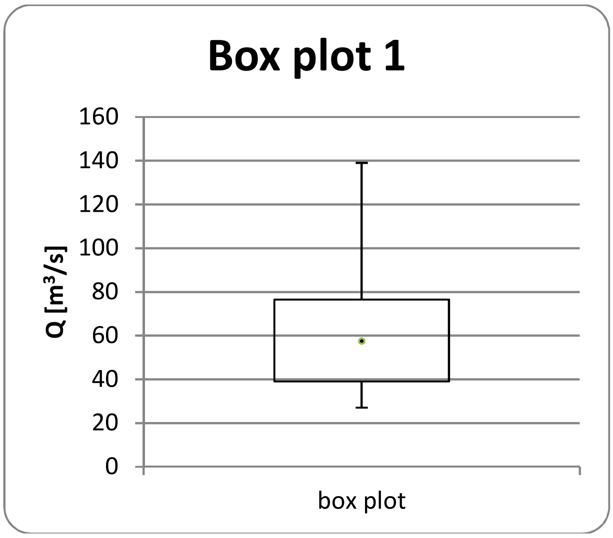


Figura 1.2.6; box plot

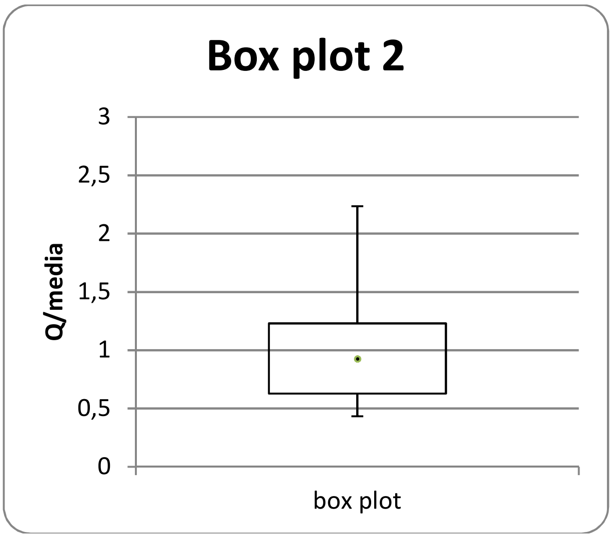


Figura 1.2.7: box plot adimensionalizzato

2. Esercitazione 2: Esempio di inferenza statistica - Determinazione di massima dell'altezza dei rilevati arginali in una generica sezione di un corso d'acqua

Il problema da affrontare è quello di determinare l'altezza di rilevati arginali atti a proteggere dalle piene la zona di interesse, posta poco a monte di un attraversamento stradale sul fiume Chisone, in provincia di Torino. In corrispondenza del ponte (triangolino rosso in *Figura 2.1*), posto in località San Martino, esiste una stazione di misura delle portate. Sarà quindi possibile usare il metodo di stima diretto, mediante l'applicazione dell'inferenza statistica.
Il quesito è relativo alla stima della massima portata delle piene fluviali per assegnate probabilità di superamento. Si inizierà con la proposta della distribuzione Normale, per poi proseguire l'inferenza statistica con metodi più raffinati, per verificare quale dei modelli rappresenti più fedelmente i dati empirici raccolti.
Si consideri la serie storica dei massimi annui dei colmi di piena della *Tabella 1.1.1* dell'esercitazione 1.

Chisone a San Martino

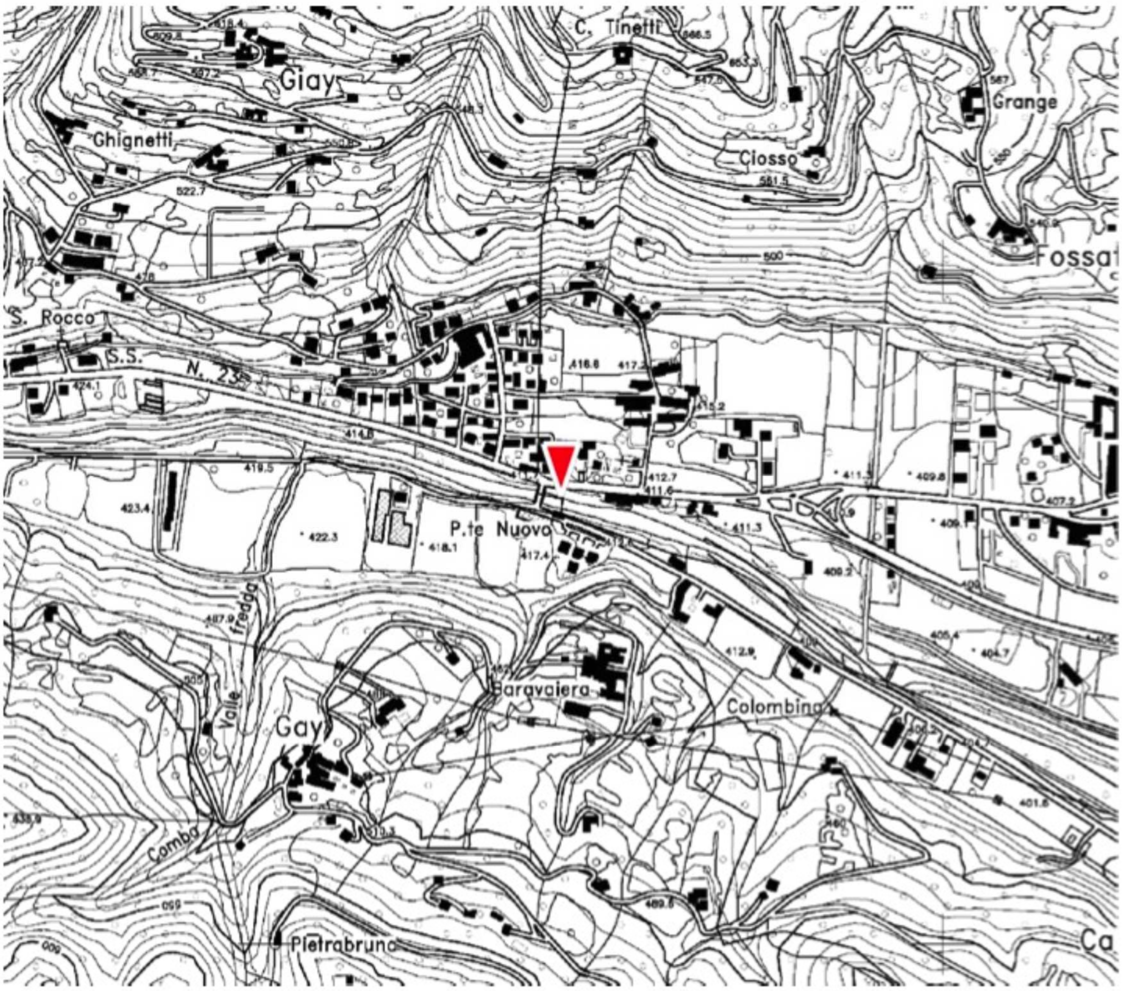


Figura 1.2.1: localizzazione della stazione di misura

2.1. Distribuzione Normale

Si adotti come prima scelta la distribuzione normale.

Si costruiscono il diagramma delle frequenze cumulate e la curva di probabilità cumulata della distribuzione normale.

Per il diagramma delle frequenze cumulate:

- si dispongono i valori x_i del campione in ordine crescente e si associa a ciascun valore il numero d'ordine i;
- si stima la frequenza empirica di non superamento utilizzando l'espressione di Weibull:

$$\emptyset(i) = \frac{i}{N+1}$$

Stima dei parametri
Per l'andamento di probabilità cumulata normale:

- si calcolano i parametri con il metodo dei momenti con le seguenti espressioni:

$$\mu = \theta_1 = \overline{x}$$
$$\sigma = \theta_2 = s$$

  N.B.: è possibile utilizzare le funzioni *MEDIA* e *VAR* di Excel;

Tabella 2.1.1: parametri distribuzione normale

$\boldsymbol{\theta_1}$	267,61
$\boldsymbol{\theta_2}$	282,96

- per calcolare i valori della funzione di probabilità cumulata normale, la relazione analitica è la seguente:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} dx$$

  In alternativa, si utilizza la seguente funzione a parametri di Excel:

  DISTRIB.NORM (x_i; $\widehat{\theta_1}$; $\widehat{\theta_2}$; *VERO).*

Si sovrappongono i due risultati, come in *Figura 2.1.1* (vedere pagine successive).

Carta probabilistica

Per verificare graficamente l'adattamento della funzione di probabilità (distribuzione normale) al campione, si utilizzi la carta probabilistica (*Figura 2.1.2)*:

- si traccia la retta relativa alla distribuzione normale: in particolare, si riportano in ascissa i valori di x e in ordinata i valori della variabile ridotta u, ottenuta dalla formula

$$u = \frac{x_i - \widehat{\theta_1}}{\widehat{\theta_2}}$$

- si diagrammano in ascissa sempre i valori di portata campionari x_i e in ordinata i valori di u_i, ottenuti per inversione della funzione di probabilità cumulata empirica, tramite l'utilizzo della funzione di Excel

u_i = *INV.NORM.ST (F(i)),*

con *F(i)* calcolata con la formula di Weibull, cioè $\emptyset(i)$.

Viene inoltre successivamente rappresentato, come confronto, il grafico della distribuzione di probabilità normale stimata (pdf) sovrapposto al diagramma delle frequenze relative di classe, costruito come nell'Esercitazione 1 (*Figura 2.1.3*).

Il calcolo dei valori della densità di probabilità (pdf) viene fatto attraverso la funzione di Excel

DISTRIB.NORM (x_i*;* $\widehat{\theta_1}$*;* $\widehat{\theta_2}$*; FALSO).*

Si noti che, poiché i valori confrontati hanno ordini di grandezza molto diversi fra loro, si è utilizzato un asse secondario.

Tabella 2.1.2: risultati ottenuti distribuzione normale *

		Figura 2.1.1		*Figura 2.1.2*		*Figura 2.1.3*
i	**Q [m³/s]**	**φ(i) campionaria**	**F(i) teorica**	**u**	**u(i)**	**pdf**
1	18,00	0,029	0,189	-0,882	-1,890	0,000955
2	43,80	0,059	0,214	-0,791	-1,565	0,001031
3	55,60	0,088	0,227	-0,749	-1,352	0,001065
4	64,90	0,118	0,237	-0,716	-1,187	0,001091
5	79,80	0,147	0,253	-0,664	-1,049	0,001131
6	80,00	0,176	0,254	-0,663	-0,929	0,001132
7	83,10	0,206	0,257	-0,652	-0,821	0,001140
8	120,00	0,235	0,301	-0,522	-0,722	0,001231
9	124,00	0,265	0,306	-0,508	-0,629	0,001240
10	147,00	0,294	0,335	-0,426	-0,541	0,001287
11	150,00	0,324	0,339	-0,416	-0,458	0,001293
12	160,00	0,353	0,352	-0,380	-0,377	0,001312
13	163,00	0,382	0,356	-0,370	-0,299	0,001317
14	170,00	0,412	0,365	-0,345	-0,223	0,001328
15	170,00	0,441	0,365	-0,345	-0,148	0,001328
16	181,00	0,471	0,380	-0,306	-0,074	0,001345
17	185,00	0,500	0,385	-0,292	0,000	0,001351
18	187,00	0,529	0,388	-0,285	0,074	0,001354
19	200,00	0,559	0,406	-0,239	0,148	0,001370
20	210,00	0,588	0,419	-0,204	0,223	0,001381
21	210,00	0,618	0,419	-0,204	0,299	0,001381
22	220,00	0,647	0,433	-0,168	0,377	0,001390
23	228,00	0,676	0,444	-0,140	0,458	0,001396
24	230,00	0,706	0,447	-0,133	0,541	0,001397
25	342,00	0,735	0,604	0,263	0,629	0,001362
26	345,00	0,765	0,608	0,273	0,722	0,001358
27	365,00	0,794	0,635	0,344	0,821	0,001329
28	370,00	0,824	0,641	0,362	0,929	0,001321
29	420,00	0,853	0,705	0,539	1,049	0,001220
30	496,00	0,882	0,790	0,807	1,187	0,001018
31	670,00	0,912	0,922	1,422	1,352	0,000513
32	850,00	0,941	0,980	2,058	1,565	0,000170
33	1493,00	0,971	1,000	4,331	1,890	0,000000

* In riferimento alla terminologia della *Tabella 2.1.1*:
φ(i) campionaria è il risultato della probabilità cumulata dell'espressione di Weibull.
F(i) teorica è il valore della probabilità cumulata ottenuto considerando il modello della distribuzione normale (con la funzione di Excel *DISTRIB.NORM*).
u è il valore della variabile ridotta in funzione dei parametri $\widehat{\theta_1}$ e $\widehat{\theta_2}$.
u(i) è il valore ottenuto invertendo la funzione di probabilità cumulata campionaria tramite la funzione *INV.NORM.ST*.
pdf è il valore della funzione di densità di probabilità.

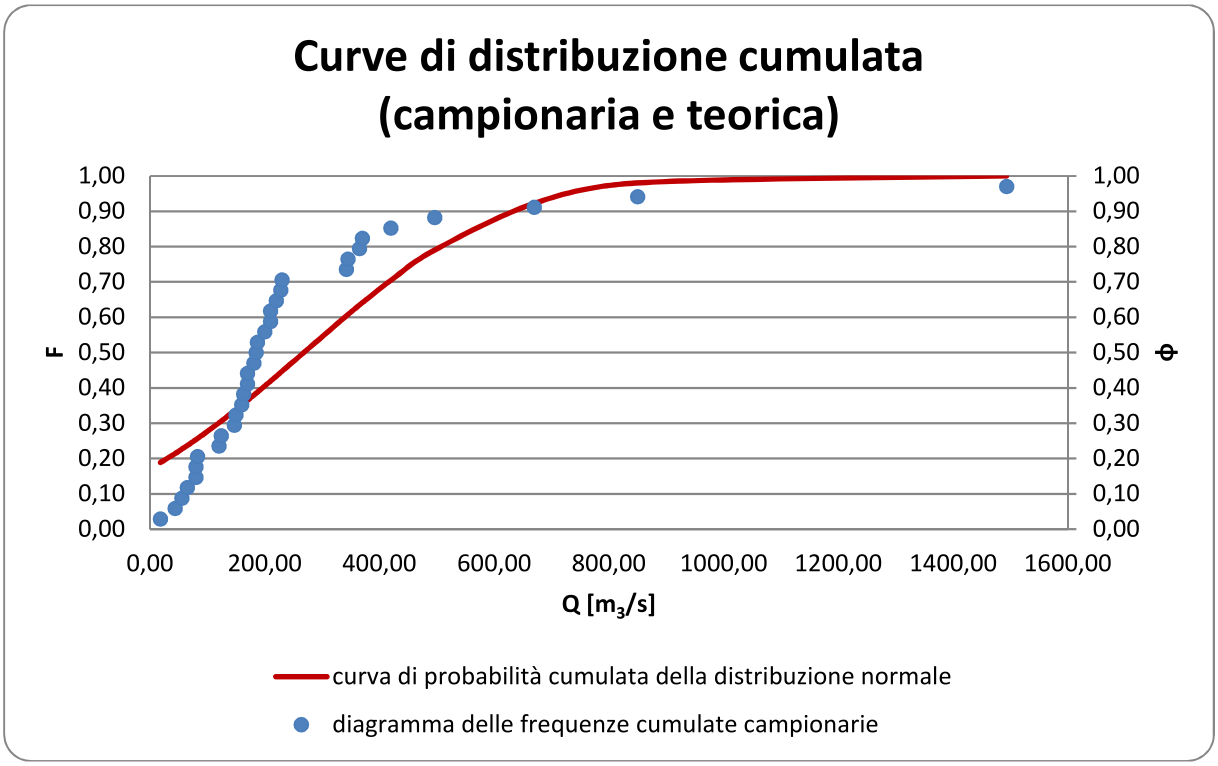


Figura 2.1.1: curva di distribuzione cumulata

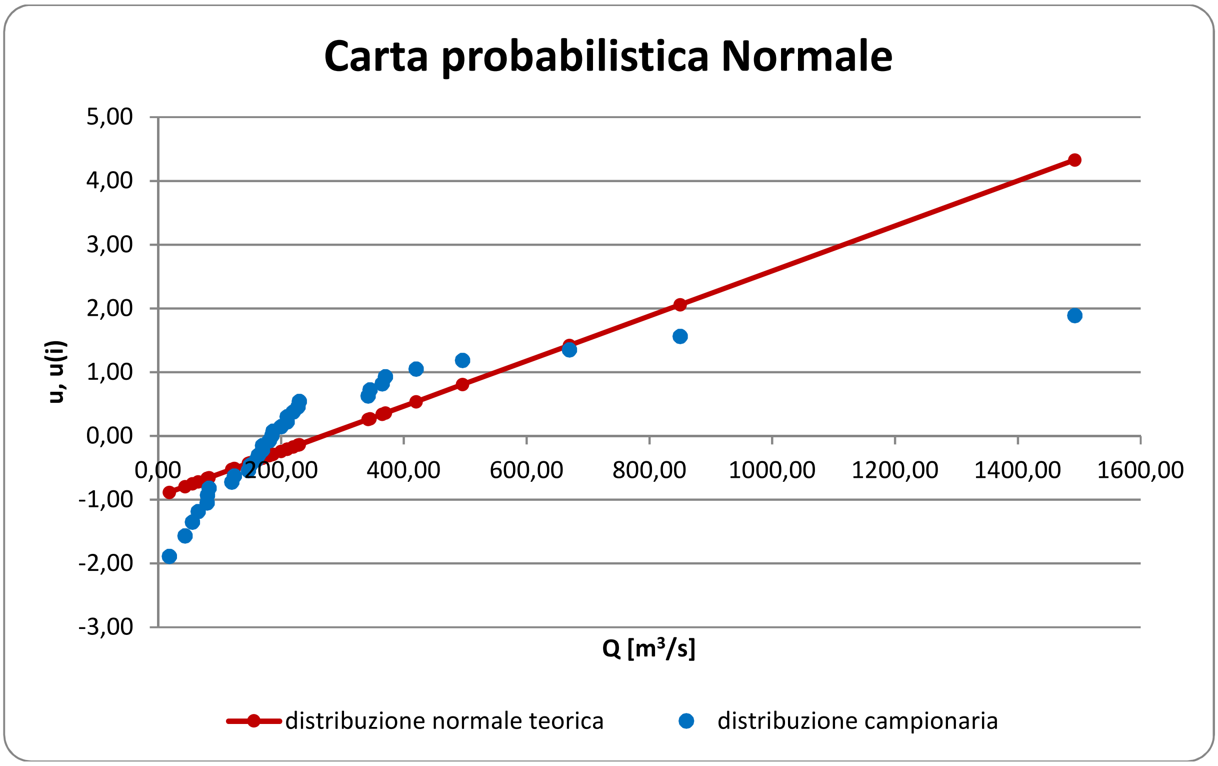


Figura 2.1.2: carta probabilistica distribuzione normale

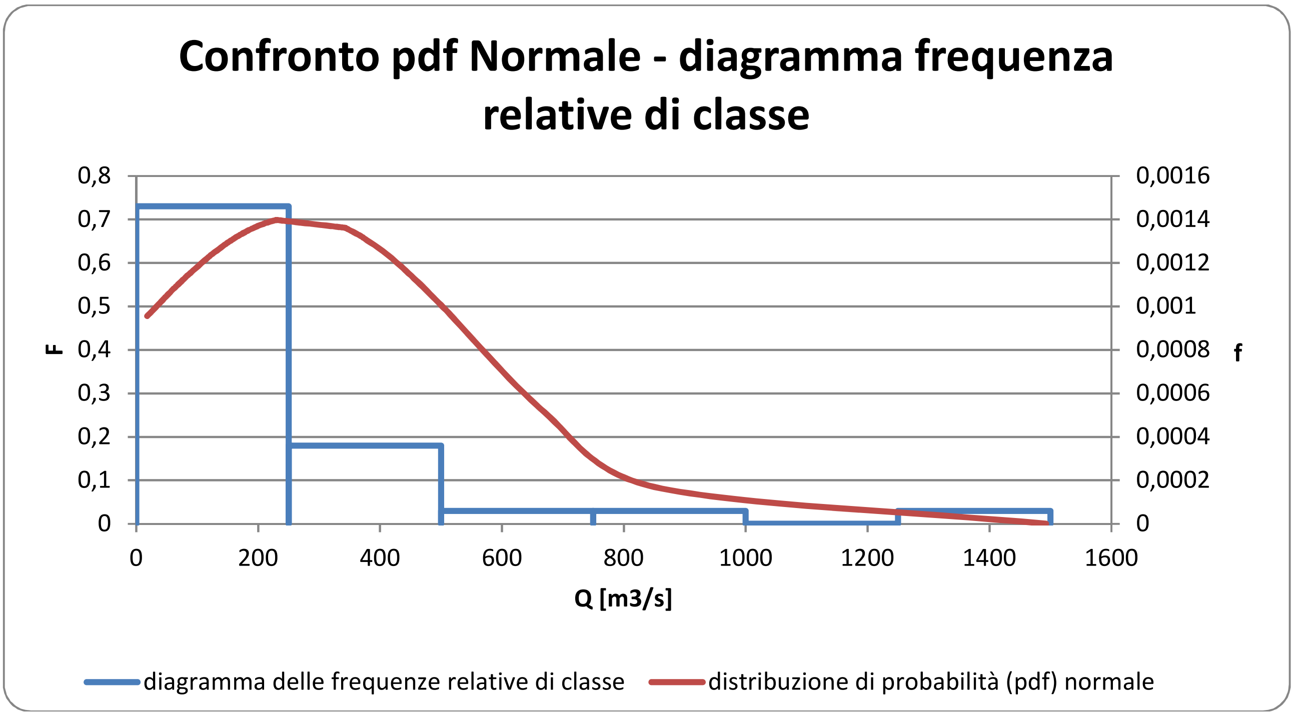


Figura 2.1.3: confronto pdf normale - diagramma frequenze relative di classe

Dalla carta probabilistica (*Figura 2.1.2*), è possibile notare che la curva della distribuzione normale teorica si discosta molto dalla distribuzione campionaria. Si deduce quindi che la distribuzione normale non è la più adatta a rappresentare i dati.

Definizione della condizione di progetto e stima del relativo quantile

È assegnato al rilevato arginale un orizzonte progettuale pari a *N*=10 anni.
Sono fornite le seguenti formule:

$$R_N = [1 - (1 - \Pr(s))^N]$$
$$1 - F = \Pr(s) = \frac{1}{T}$$

dove: R_N = rischio residuale;
$\Pr(s) = 1 - F$ = probabilità di superamento;
F = frequenza di non superamento;
T = tempo di ritorno.

- Calcolare il periodo di ritorno che deriva dall'assegnare R_N = 5% = 0.05.
  Considerando

$$R_N = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^N\right]$$

Si ottiene che

$$T = \frac{1}{1 - (1 - R_N)^{1/N}} = 195{,}46 \cong 195\ anni$$

- Calcolare il valore di rischio R_N associato a un periodo di ritorno T fissato a 200 anni.

$$R_N = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^N\right] = 0.0489 \cong 0.05 = 5\%$$

- Per entrambi i casi precedenti, ricavare la portata di progetto, ipotizzando valida la legge normale.

1) R_N = 5% = 0,05; T = 195,46 ≅ 195 anni.

$$R_N = 1 - F^N$$
$$F_1 = (1 - R_N)^{1/N} = 0,9949$$

Si calcola la variabile ridotta u attraverso la funzione di Excel *INV.NORM.ST (F).*

$$u_1 = 2,5678$$

Trovata la u, si calcola la portata x utilizzando l'espressione della variabile ridotta

$$u = \frac{x - \theta_1}{\theta_2} \quad \leftrightarrow \quad x = u\theta_2 + \theta_1$$

oppure attraverso la funzione di Excel

u = *INV.NORM (F; θ_1; θ_2)*

$$x_1 = Q_1 = 994,223 \; m^3/s.$$

2) R_N = 0,0489; T = 200 anni.

$$R_N = 1 - F^N$$
$$F_2 = (1 - R_N)^{1/N} = 0,995$$
$$u_2 = 2,5758$$
$$x_2 = Q_2 = 996,473 \; m^3/s.$$

R_N	**T [anni]**	x_T **[m³/s]**
0,05	195	994,223
0,0489	200	996,473

Avendo verificato la non idoneità della distribuzione normale a rappresentare il campione osservato, si utilizzino le distribuzioni Log-normale (a due parametri) e di Gumbel per rappresentare la serie storica dei massimi annui dei colmi di piena osservati alla stazione San Martino sul fiume Chisone.

Si proceda quindi alla stima dei parametri delle distribuzioni con i metodi dei momenti ordinari e degli L-momenti.
Successivamente si verifichi l'adattamento al campione della funzione di probabilità scelta, utilizzando la carta probabilistica.

2.2. Distribuzione Log-normale a 2 parametri

Stima dei parametri
Si riportano nel seguito, a scopo informativo:

- la funzione di densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_2\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x) - \theta_1}{\theta_2}\right)^2\right], \qquad x > 0$$

- la funzione di probabilità cumulata

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x) - \theta_1}{\theta_2}\right)^2\right] dx$$

I parametri θ_1 e θ_2 per la distribuzione Log-normale sono espressi dalle seguenti relazioni:

- *Metodo dei momenti ordinari*

$$\theta_1 = \ln\mu - \frac{1}{2}\ln(1 + cv^2)$$
$$\theta_2 = \sqrt{\ln(1 + cv^2)}$$

con

$$cv = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

- *Metodo degli L-momenti*

$$\theta_1 = \ln\lambda_1 - \frac{{\theta_2}^2}{2}$$
$$\theta_2 = \sqrt{2} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{\tau + 1}{2}\right)$$

con

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) = INV.NORM.ST\left(\frac{\tau + 1}{2}\right)$$

$$\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = L - CV$$

N.B.: il simbolo $\Phi(\cdot)$ rappresenta la funzione di probabilità cumulata della distribuzione normale; quindi $\Phi^{-1}(\cdot)$ è la relativa funzione quantile.
N.B.2: τ è il rapporto di due L-momenti (λ_1 e λ_2).

Gli L-momenti stimati (λ_1, λ_2, e anche λ_3 e λ_4) corrispondono in modo ben approssimato agli L-momenti campionari (L_1, L_2, L_3, L_4).

Ai fini del calcolo è necessario prima ricavare i PWM (momenti pesati in probabilità) b_0, b_1, b_2 e b_3, ottenuti con le seguenti relazioni:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$$
$$b_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N} \frac{(j-1)}{N-1} x_j$$
$$b_2 = \frac{1}{N}\sum_{j=3}^{N} \frac{(j-1)(j-2)}{(N-1)(N-2)} x_j$$
$$b_3 = \frac{1}{N}\sum_{j=4}^{N} \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} x_j$$

Ora è possibile calcolare gli L-momenti

$$L_1 = \lambda_1 = b_0$$
$$L_2 = \lambda_2 = 2b_1 - b_0$$
$$L_3 = \lambda_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0$$
$$L_3 = \lambda_3 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0$$

Si utilizzano quindi i valori appena calcolati per stimare i parametri θ_1 e θ_2

Quindi, riassumendo, per il metodo degli L-momenti, nell'ordine devono essere calcolati:
1) i PWM b_0, b_1, b_2, b_3;
2) gli L-momenti campionari L_1, L_2, L_3, L_4, corrispondenti agli L-momenti λ_1, λ_2, λ_3, λ_4;
3) i parametri θ_1 e θ_2.

Si procede quindi direttamente al calcolo dei parametri avendo noti i seguenti valori.

Tabella 2.2.1: valori per i momenti ordinari

media μ	267,61 m^3/s
deviazione standard σ	282,96 m^3/s
coefficiente di variazione *cv*	1,0574

Tabella 2.2.2: PWM per L-momenti

$\boldsymbol{b_0}$	267,612
$\boldsymbol{b_1}$	195,816
$\boldsymbol{b_2}$	160,860
$\boldsymbol{b_3}$	139,534

Tabella 2.2.3: L-momenti

$\boldsymbol{L_1}$	267,612
$\boldsymbol{L_2}$	124,020
$\boldsymbol{L_3}$	57,876
$\boldsymbol{L_4}$	47,053

Tabella 2.2.4: parametri distribuzione Log-normale

	momenti ordinari	L-momenti
$\boldsymbol{\theta_1}$	5,214	0,866
$\boldsymbol{\theta_2}$	5,208	0,874

Carta probabilistica

Per la realizzazione della carta probabilistica, si ricercano i valori delle variabili ridotte:

- **u(i)** è il valore della variabile ridotta ottenuto per inversione della funzione di probabilità cumulata (ottenuta con la formula di Weibull) tramite la funzione di Excel *INV.NORM.ST*
  N.B.: è possibile utilizzare una corrispondenza fra la distribuzione normale e la Log-normale, poiché
  $$x \sim LN(\theta_1, \theta_2) \quad se \quad y = \ln x \sim N(\theta_1, \theta_2)$$

- **u** è la variabile ridotta, calcolata con la formula
  $$u = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$$
  inserendo in θ_1 e θ_2 i valori individuati per la Log-normale, con il metodo dei momenti ordinari e con il metodo degli L-momenti;

Tabella 2.2.5: carta probabilistica Log-normale

i	**Q [m³/s]**	**F(i) Weibull**	**u(i)**	**u momenti ordinari**	**u L-momenti**
1	18,00	0,029	-1,890	-2,683	-2,651
2	43,80	0,059	-1,565	-1,656	-1,634
3	55,60	0,088	-1,352	-1,381	-1,361
4	64,90	0,118	-1,187	-1,202	-1,184
5	79,80	0,147	-1,049	-0,964	-0,947
6	80,00	0,176	-0,929	-0,961	-0,945
7	83,10	0,206	-0,821	-0,917	-0,901
8	120,00	0,235	-0,722	-0,493	-0,481
9	124,00	0,265	-0,629	-0,455	-0,443
10	147,00	0,294	-0,541	-0,258	-0,248
11	150,00	0,324	-0,458	-0,235	-0,225
12	160,00	0,353	-0,377	-0,161	-0,152
13	163,00	0,382	-0,299	-0,139	-0,130
14	170,00	0,412	-0,223	-0,091	-0,082
15	170,00	0,441	-0,148	-0,091	-0,082
16	181,00	0,471	-0,074	-0,018	-0,010
17	185,00	0,500	0,000	0,007	0,015
18	187,00	0,529	0,074	0,019	0,027
19	200,00	0,559	0,148	0,097	0,104
20	210,00	0,588	0,223	0,153	0,160
21	210,00	0,618	0,299	0,153	0,160
22	220,00	0,647	0,377	0,207	0,213
23	228,00	0,676	0,458	0,248	0,254
24	230,00	0,706	0,541	0,258	0,264
25	342,00	0,735	0,629	0,716	0,718
26	345,00	0,765	0,722	0,726	0,728
27	365,00	0,794	0,821	0,791	0,792
28	370,00	0,824	0,929	0,807	0,808
29	420,00	0,853	1,049	0,953	0,953
30	496,00	0,882	1,187	1,145	1,143
31	670,00	0,912	1,352	1,493	1,487
32	850,00	0,941	1,565	1,767	1,759
33	1493,00	0,971	1,890	2,417	2,404

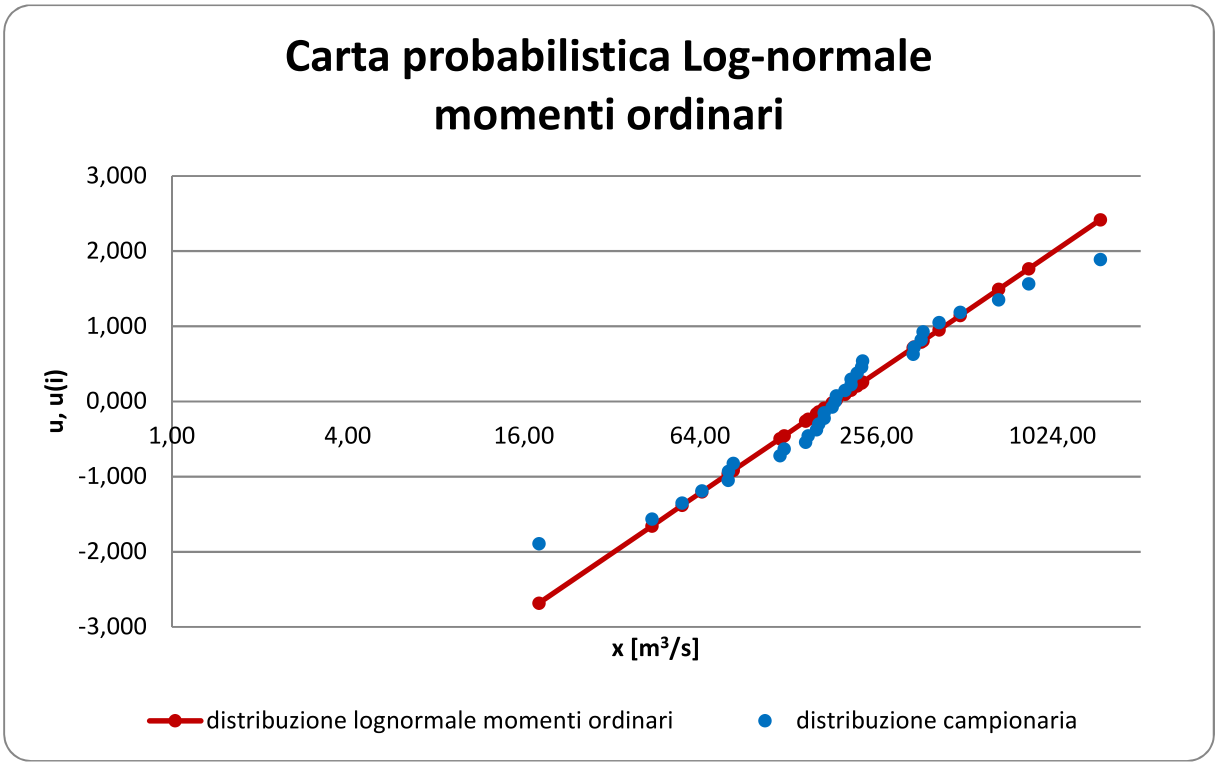


Figura 2.2.1: carta probabilistica Log-normale, momenti ordinari

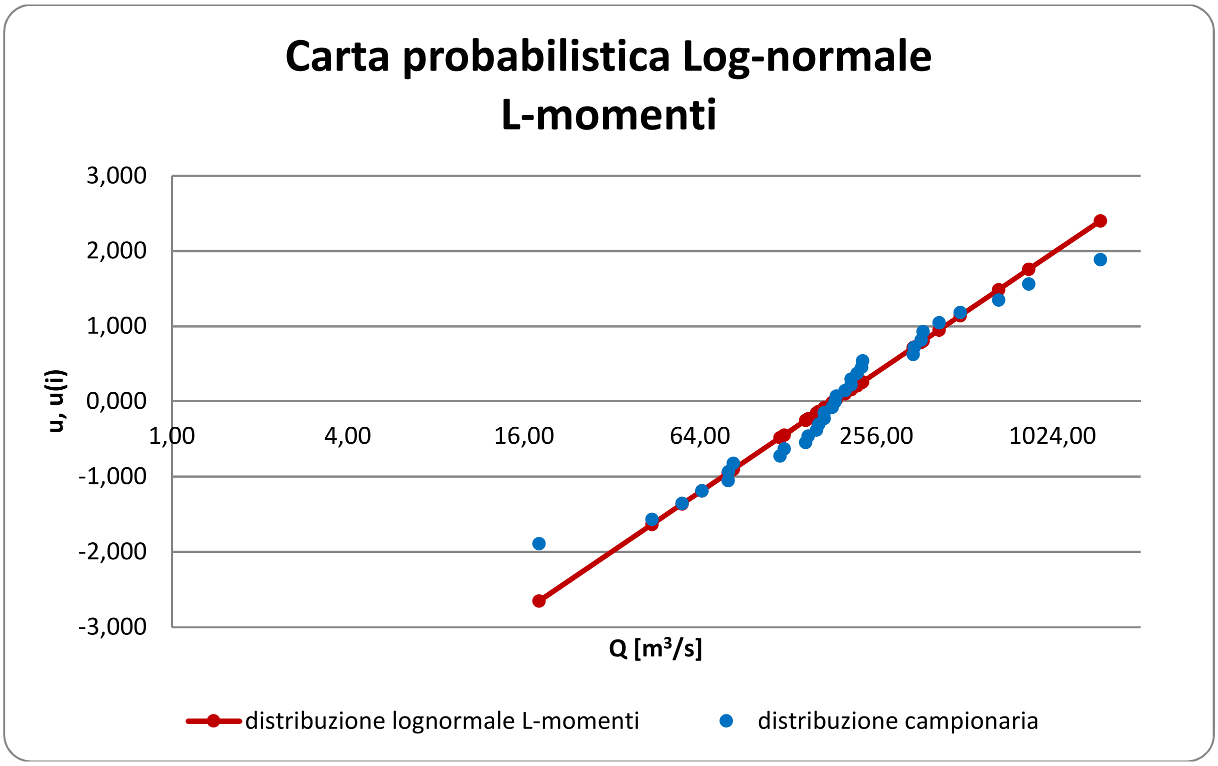


Figura 2.2.2: carta probabilistica Log-normale, L-momenti

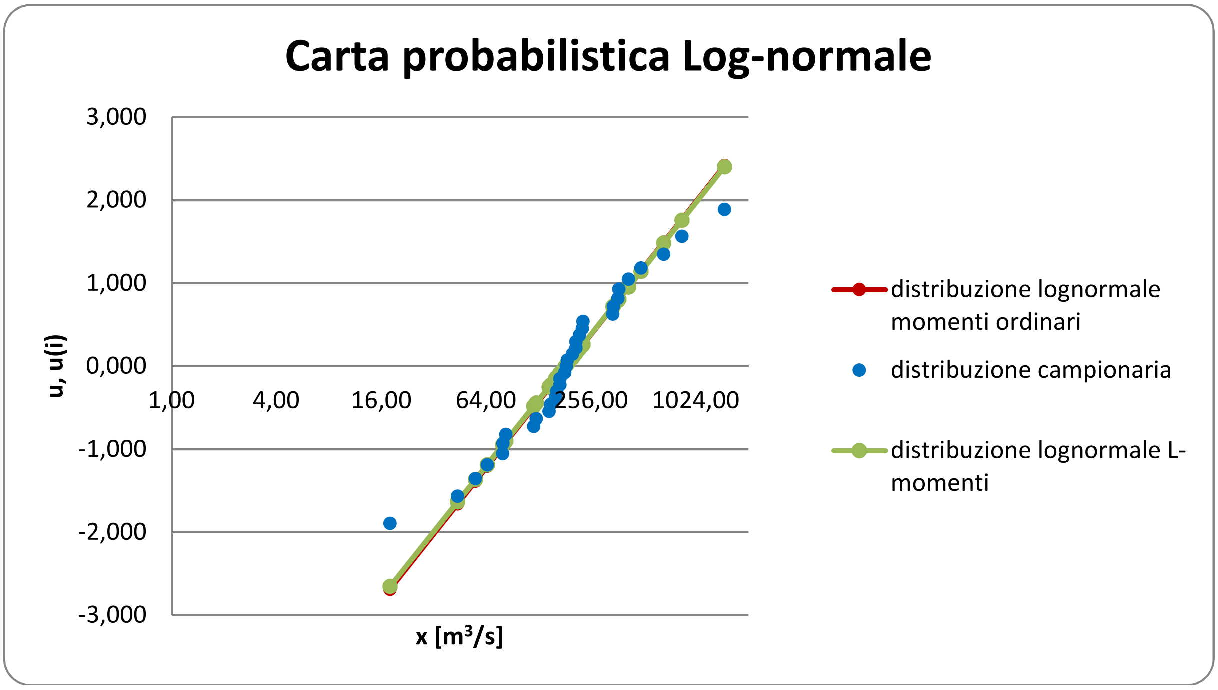


Figura 2.2.3: carta probabilistica Log-normale

Stima delle portate di progetto

Si calcolino ora le portate di progetto x_T per periodi di ritorno T pari a 50, 100, 200 anni.

Avendo

$$F = 1 - \frac{1}{T}$$

per la distribuzione lognormale:

$$x_T = INV.LOGNORM(F;\ \theta_1;\ \theta_2)$$

Tabella 2.2.6: portate di progetto, distribuzione lognormale

T [anni]	x_T [m³/s] momenti ordinari	x_T [m³/s] L-momenti
50	1089,49	1099,46
100	1379,69	1395,24
200	1712,55	1735,18

2.3. Distribuzione di Gumbel

Si ripetano le stesse considerazioni fatte per la distribuzione lognormale con la distribuzione probabilistica di Gumbel.

Stima dei parametri
Si riportano nel seguito, a scopo informativo:

- la funzione di densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} \cdot e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} \cdot e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

- la funzione di probabilità cumulata

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

I parametri θ_1 e θ_2 per la distribuzione di Gumbel sono espressi dalle seguenti relazioni:

- *Metodo dei momenti ordinari*

$$\theta_1 = \mu - 0{,}5772\sigma\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)$$
$$\theta_2 = \sigma\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)$$

- *Metodo degli L-momenti*

$$\theta_1 = \lambda_1 - 0{,}5772\theta_2$$
$$\theta_2 = \frac{\lambda_2}{\ln 2}$$

Per calcolare i parametri della distribuzione di Gumbel si utilizza lo stesso procedimento relativo al calcolo dei PWM e degli L-momenti utilizzato per la lognormale, ottenendo gli stessi risultati riportati in *Tabella 2.2.1, 2.2.2* e *2.2.3.*

Tabella 2.3.1: parametri distribuzione di Gumbel

	momenti ordinari	L-momenti
$\boldsymbol{\theta_1}$	140,247	164,374
$\boldsymbol{\theta_2}$	220,736	178,922

Carta probabilistica

Per la realizzazione della carta probabilistica, si ricercano i valori delle variabili ridotte:

- **u(i)** è il valore della variabile ridotta, ottenuta con la formula
$$u = -\ln\left(\ln\frac{1}{F}\right)$$

- **u** è la variabile ridotta, calcolata con la formula
$$u = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$$
inserendo in θ_1 e θ_2 i valori individuati per la distribuzione di Gumbel, con il metodo dei momenti ordinari e con il metodo degli L-momenti.

Tabella 2.3.2: carta probabilistica Gumbel

i	Q [m³/s]	F(i) Weibull	u(i)	u m. ordinari	u L-momenti
1	18,00	0,029	-1,260	-0,554	-0,818
2	43,80	0,059	-1,041	-0,437	-0,674
3	55,60	0,088	-0,887	-0,383	-0,608
4	64,90	0,118	-0,761	-0,341	-0,556
5	79,80	0,147	-0,651	-0,274	-0,473
6	80,00	0,176	-0,551	-0,273	-0,472
7	83,10	0,206	-0,458	-0,259	-0,454
8	120,00	0,235	-0,369	-0,092	-0,248
9	124,00	0,265	-0,285	-0,074	-0,226
10	147,00	0,294	-0,202	0,031	-0,097
11	150,00	0,324	-0,121	0,044	-0,080
12	160,00	0,353	-0,041	0,089	-0,024
13	163,00	0,382	0,039	0,103	-0,008
14	170,00	0,412	0,120	0,135	0,031
15	170,00	0,441	0,201	0,135	0,031
16	181,00	0,471	0,283	0,185	0,093
17	185,00	0,500	0,367	0,203	0,115
18	187,00	0,529	0,453	0,212	0,126
19	200,00	0,559	0,541	0,271	0,199
20	210,00	0,588	0,634	0,316	0,255
21	210,00	0,618	0,730	0,316	0,255
22	220,00	0,647	0,832	0,361	0,311
23	228,00	0,676	0,939	0,398	0,356
24	230,00	0,706	1,055	0,407	0,367
25	342,00	0,735	1,179	0,914	0,993
26	345,00	0,765	1,316	0,928	1,010
27	365,00	0,794	1,467	1,018	1,121
28	370,00	0,824	1,639	1,041	1,149
29	420,00	0,853	1,838	1,267	1,429
30	496,00	0,882	2,078	1,612	1,853
31	670,00	0,912	2,382	2,400	2,826
32	850,00	0,941	2,803	3,215	3,832
33	1493,00	0,971	3,511	6,128	7,426

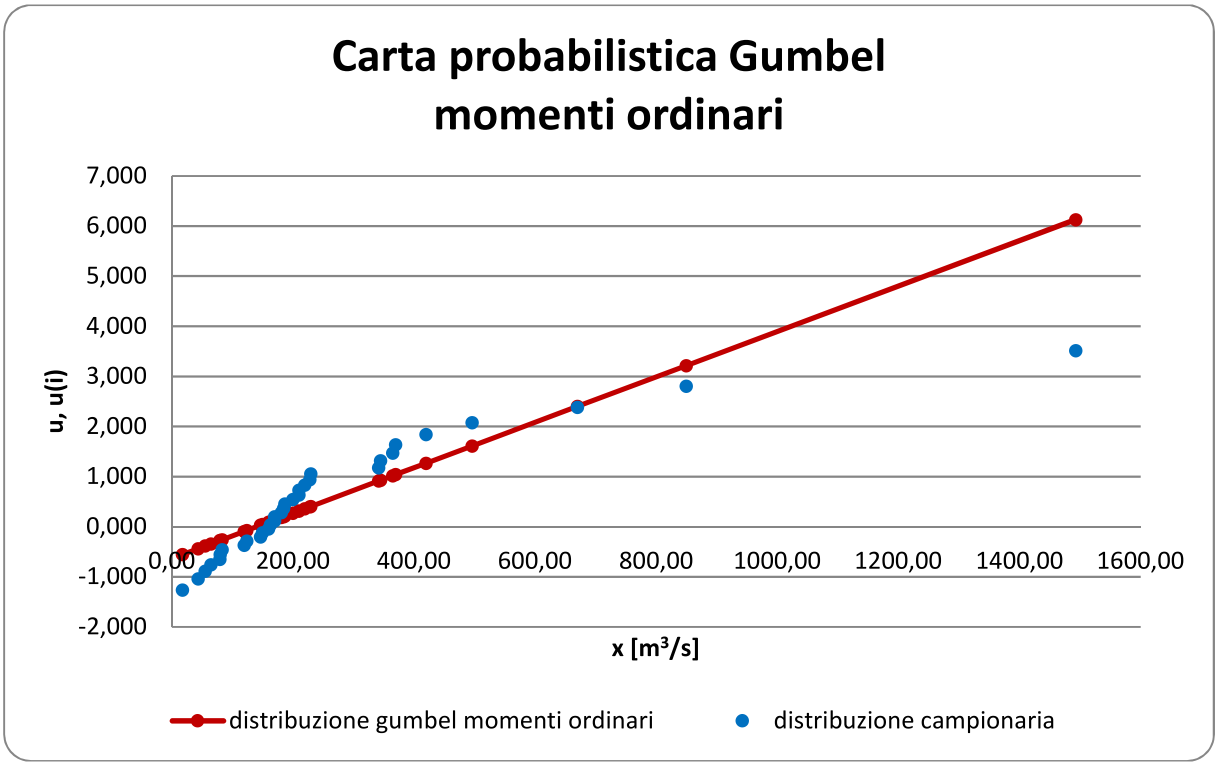


Figura 2.3.1: carta probabilistica Gumbel, momenti ordinari

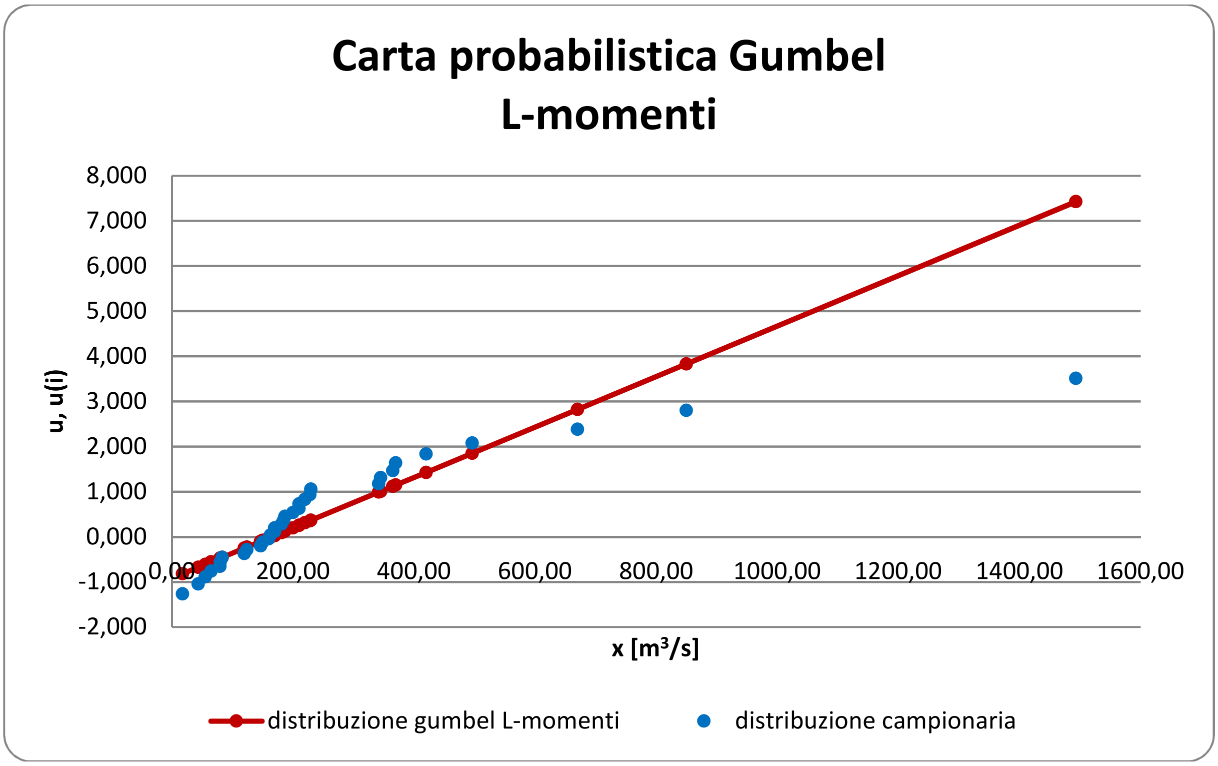


Figura 2.3.2: carta probabilistica Gumbel, L-momenti

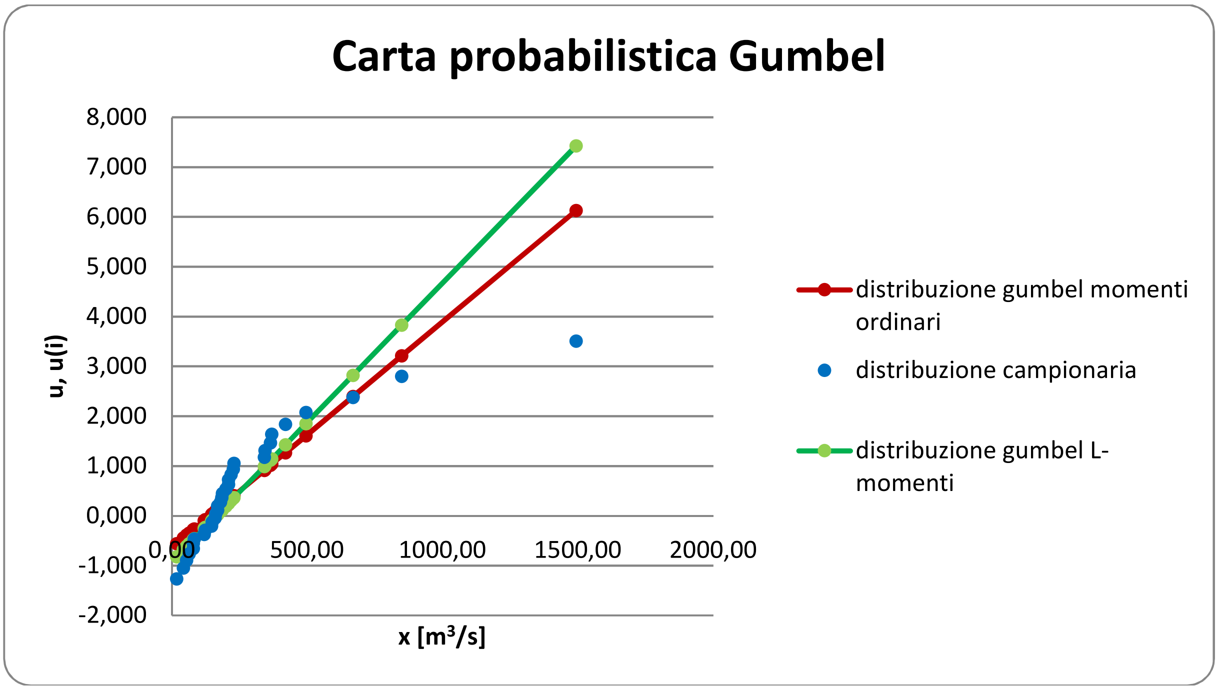


Figura 2.3.3: carta probabilistica Gumbel

Stima delle portate di progetto
Si calcolino ora le portate di progetto x_T per periodi di ritorno T pari a 50, 100, 200 anni.

Avendo

$$F = 1 - \frac{1}{T}$$

per la distribuzione di Gumbel:

$$x_T = \theta_1 \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \ln T\right)$$

Tabella 2.3.3: portate di progetto, distribuzione Gumbel

T [anni]	x_T [m³/s] momenti ordinari	x_T [m³/s] L-momenti
50	1003,77	864,32
100	1156,78	988,34
200	1309,78	1112,36

2.4. Distribuzione GEV

Si ripetano le considerazioni fatte in precedenza anche per la distribuzione GEV.

Stima dei parametri
Si riportano nel seguito, a scopo informativo:

- la funzione di densità di probabilità
$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} exp(-(1-\theta_3)y - e^{-y})$$
- la funzione di probabilità cumulata
$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

con
$$y = \begin{cases} -\frac{1}{\theta_3}\ln\left(1-\theta_3 \cdot \frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right), & \theta_3 \neq 0 \\ \frac{x-\theta_1}{\theta_2}, & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

I parametri $\theta_1, \theta_2\ e\ \theta_3$ per la distribuzione GEV sono espressi dalle seguenti relazioni:

- *Metodo degli L-momenti*
$$\theta_1 = \lambda_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3}\big(1-\Gamma(1+\theta_3)\big)$$
$$\theta_2 = \frac{\lambda_2\theta_3}{(1-2^{-\theta_3})\Gamma(1+\theta_3)}$$

$$\theta_3 \cong 7{,}8590c + 2{,}9554c^2, \quad con \quad c = \frac{2}{3+\tau_3} - \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

N.B.: la funzione $\Gamma(1+\theta_3)$ si ricava dall'espressione di Excel:
$$\Gamma(1+\theta_3) = EXP\big(LN.GAMMA(1+\theta_3)\big)$$

Avendo gli stessi PWM e L-momenti della Lognormale e Gumbel, per il calcolo dei 3 parametri si utilizzano le già citate tabelle *2.2.1, 2.2.2* e *2.2.3.*

Tabella 2.4.1: parametri distribuzione GEV

	L-momenti
$\boldsymbol{\theta_1}$	139,542
$\boldsymbol{\theta_2}$	101,120
$\boldsymbol{\theta_3}$	-0,416

Tabella 2.4.2: valori distribuzione GEV

i	Q [m^3/s]	F con Weibull	F con GEV	T(F_GEV) [anni]
1	18,00	0,029	0,005	1,005
2	43,80	0,059	0,036	1,037
3	55,60	0,088	0,063	1,067
4	64,90	0,118	0,089	1,098
5	79,80	0,147	0,139	1,162
6	80,00	0,176	0,140	1,163
7	83,10	0,206	0,151	1,179
8	120,00	0,235	0,294	1,417
9	124,00	0,265	0,310	1,449
10	147,00	0,294	0,395	1,652
11	150,00	0,324	0,405	1,681
12	160,00	0,353	0,439	1,782
13	163,00	0,382	0,449	1,814
14	170,00	0,412	0,471	1,890
15	170,00	0,441	0,471	1,890
16	181,00	0,471	0,504	2,017
17	185,00	0,500	0,516	2,065
18	187,00	0,529	0,521	2,089
19	200,00	0,559	0,556	2,254
20	210,00	0,588	0,581	2,389
21	210,00	0,618	0,581	2,389
22	220,00	0,647	0,605	2,530
23	228,00	0,676	0,622	2,648
24	230,00	0,706	0,627	2,678
25	342,00	0,735	0,792	4,811
26	345,00	0,765	0,795	4,880
27	365,00	0,794	0,813	5,361
28	370,00	0,824	0,818	5,486
29	420,00	0,853	0,854	6,838
30	496,00	0,882	0,892	9,272
31	670,00	0,912	0,940	16,675
32	850,00	0,941	0,963	27,244
33	1493,00	0,971	0,989	92,853

Nella *Figura 2.5.1* si rappresentano i valori di F cumulata (calcolata nei due modi sopra citati), in funzione dei tempi di ritorno relativi alla probabilità calcolata con la distribuzione GEV.

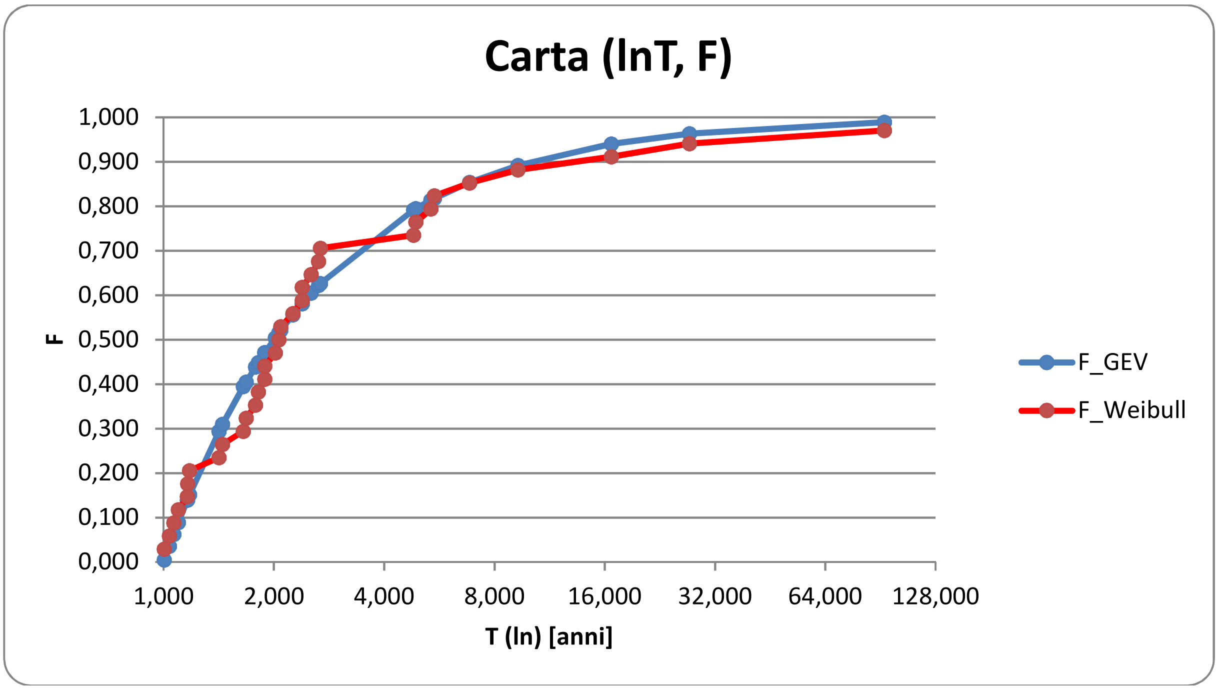


Figura 2.4.1: carta (lnT, F)

Nella successiva *Figura 2.5.2* si vuole invece creare una comparazione delle tre distribuzioni (Log-normale, Gumbel e GEV) con parametri stimati con il metodo degli L-momenti, con i relativi tempi di ritorno.

Per ciascuna, si calcola il tempo di ritorno tramite la relazione:

$$T = 1 - \frac{1}{F}$$

con $F = F_{teorica}$, il valore della cumulata teorica, che varia per ogni distribuzione, come indicato nei vari paragrafi relativi ai diversi modelli probabilistici:

- per la Log-normale, si usa la funzione di Excel
$$DISTRIB.LOGNORM(x; \theta_1; \theta_2)$$

- per la Gumbel
$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

- per la GEV
$$F(x) = e^{-e^{-\left(-\frac{1}{\theta_3}\ln\left(1-\theta_3\cdot\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)\right)}}$$

Tabella 2.4.3: valori per confronto distribuzioni

i	Q [m³/s]	F Log-N	T(F_Log-N) [anni]	F Gumbel	T(F_Gumb) [anni]	F GEV	T(F_GEV) [anni]
1	18,00	0,004	1,004	0,104	1,116	0,005	1,005
2	43,80	0,051	1,054	0,141	1,164	0,036	1,037
3	55,60	0,087	1,095	0,159	1,190	0,063	1,067
4	64,90	0,118	1,134	0,175	1,212	0,089	1,098
5	79,80	0,172	1,207	0,201	1,252	0,139	1,162
6	80,00	0,172	1,208	0,201	1,252	0,140	1,163
7	83,10	0,184	1,225	0,207	1,261	0,151	1,179
8	120,00	0,315	1,461	0,278	1,384	0,294	1,417
9	124,00	0,329	1,490	0,286	1,400	0,310	1,449
10	147,00	0,402	1,672	0,332	1,497	0,395	1,652
11	150,00	0,411	1,697	0,338	1,511	0,405	1,681
12	160,00	0,440	1,785	0,359	1,560	0,439	1,782
13	163,00	0,448	1,812	0,365	1,575	0,449	1,814
14	170,00	0,467	1,877	0,379	1,611	0,471	1,890
15	170,00	0,467	1,877	0,379	1,611	0,471	1,890
16	181,00	0,496	1,984	0,402	1,672	0,504	2,017
17	185,00	0,506	2,024	0,410	1,695	0,516	2,065
18	187,00	0,511	2,044	0,414	1,707	0,521	2,089
19	200,00	0,541	2,180	0,441	1,788	0,556	2,254
20	210,00	0,563	2,290	0,461	1,854	0,581	2,389
21	210,00	0,563	2,290	0,461	1,854	0,581	2,389
22	220,00	0,584	2,405	0,481	1,925	0,605	2,530
23	228,00	0,600	2,501	0,496	1,985	0,622	2,648
24	230,00	0,604	2,525	0,500	2,000	0,627	2,678
25	342,00	0,764	4,228	0,690	3,229	0,792	4,811
26	345,00	0,767	4,284	0,695	3,275	0,795	4,880
27	365,00	0,786	4,670	0,722	3,596	0,813	5,361
28	370,00	0,790	4,770	0,728	3,682	0,818	5,486
29	420,00	0,830	5,869	0,787	4,693	0,854	6,838
30	496,00	0,873	7,904	0,855	6,895	0,892	9,272
31	670,00	0,931	14,598	0,942	17,382	0,940	16,675
32	850,00	0,961	25,470	0,979	46,655	0,963	27,244
33	1493,00	0,992	123,272	0,999	1679,098	0,989	92,853

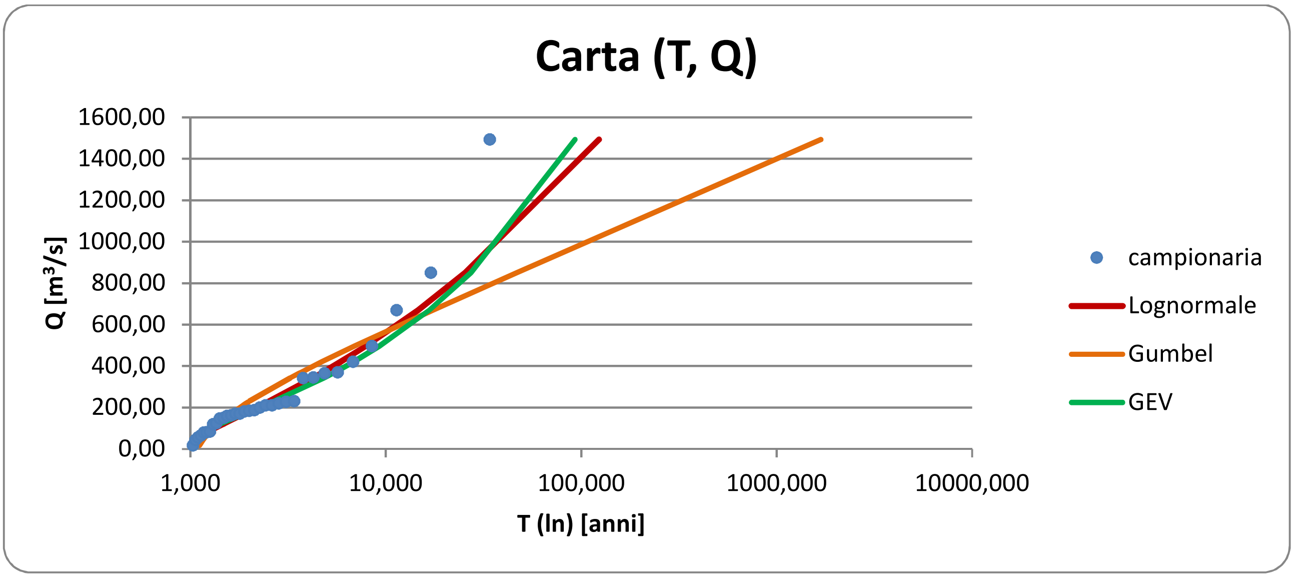


Figura 2.4.2: carta (T,Q) di confronto

Si può facilmente notare, soprattutto dall'ultimo diagramma, come la distribuzione GEV si adatti facilmente ai valori campionari rispetto alle altre due.

2.5. Test di adattamento

Si sottopongano le distribuzioni Log-normale, di Gumbel e GEV ai test di adattamento del Massimo Valore, del Chi Quadrato di Pearson e di Anderson-Darling, adottando sempre un livello di significatività α del 5%.

Test del Massimo Valore

Per il test del Massimo Valore si usi la procedura speditiva proposta per distribuzioni qualsiasi.
In questo test si considera x_N, il massimo valore tra i dati di una serie campionaria di numerosità N. L'obiettivo sarà quello di confrontare la cumulata valutata nel massimo valore osservato con il valore della cumulata di un valore limite. La condizione di passaggio del test sarà quindi:

$$F_{x_N}\left(x_{N,oss}\right) < F_{x_N}\left(x_{lim.sup.}\right)$$

equivalente all'espressione:

$$[F_x(x_{oss})]^N < 1 - \alpha$$

Inoltre, sapendo che $P_{value} = 1 - [F_x(x_{oss})]^N$, è necessario verificare:

$$P_{value} > \alpha$$

Tabella 2.5.1: valori per il test del massimo valore

N	33
$\boldsymbol{\alpha}$	0,05
$\boldsymbol{1-\alpha}$	0,95

Si riportano nella successiva tabella i valori relativi allo svolgimento del test, nonché il risultato finale della verifica.

Tabella 2.5.2: svolgimento del test del massimo valore

	Log-normale		**Gumbel**		**GEV**
	Momenti	**L-Momenti**	**Momenti**	**L-Momenti**	**L-Momenti**
$\boldsymbol{F_x(x_{oss})}$	0,992	0,992	0,998	0,999	0,989
$\boldsymbol{[F_x(x_{oss})]^N}$	0,772	0,764	0,931	0,981	0,700
P-value	0,228	0,236	0,069	0,019	0,300
Verifica	sì	sì	sì	no	sì

Test di Pearson (o del Chi Quadrato)

Per procedere con lo svolgimento del test di Pearson, è necessario suddividere lo spazio campionario in *k* classi di uguale ampiezza ed equiprobabili con probabilità costante, per massimizzare la potenza del test. Per la divisione in classi si utilizza l'espressione:

$$k = int(2N^{0,4})$$
$$p_i = cost = \frac{1}{k}$$

La condizione di passaggio del test è data dalla relazione:

$$\chi^2_{oss} < \chi^2_{lim}$$

dove:

$$\chi^2_{oss} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

con n = N = numerosità del campione;
n_i = numero effettivo di osservazioni ricadenti nell'intervallo $i = [x_i, x_{i+1}]$.
Si svolge questo calcolo con l'ausilio della funzione *CONTA.SE* di Excel.

Si ricorda che χ^2_{lim} è funzione del numero di gradi di libertà f.

$$f = k - s - 1$$

<u>*N.B.:*</u> si considerano quindi due casi: s = 0;
s = numero di parametri della distribuzione;

Si calcola χ^2_{lim} con la funzione $INV.CHI.QUAD.DS(\alpha, f)$ di Excel, o eventualmente tramite l'utilizzo di apposite tabelle.

Tabella 2.5.3: svolgimento del test di Pearson, per s=0

	Log-normale (s=0, f=7)		**Gumbel (s=0, f=7)**		**GEV (s=0, f=7)**
	Momenti	**L-Momenti**	**Momenti**	**L-Momenti**	**L-Momenti**
χ^2_{oss}	12,333	12,333	25,909	16,212	8,455
χ^2_{lim}	14,067	14,067	14,067	14,067	14,067
P_{value}	0,090	0,090	0,001	0,023	0,294
Verifica	sì	sì	no	no	sì

Tabella 2.5.4: svolgimento del test di Pearson, per s=numero di parametri

	Log-normale (s=2, f=5)		**Gumbel (s=2, f=5)**		**GEV (s=3, f=4)**
	Momenti	**L-Momenti**	**Momenti**	**L-Momenti**	**L-Momenti**
χ^2_{oss}	12,333	12,333	25,909	16,212	8,455
χ^2_{lim}	11,070	11,070	11,070	11,070	9,488
P_{value}	0,30	0,30	0,000	0,006	0,076
Verifica	no	no	no	no	sì

Sono stati calcolati i P_{value} con la funzione $DISTRIB.CHI.QUAD.DS(\chi^2_{oss}, f)$ di Excel.
L'unica distribuzione che passa entrambi i casi del test di Pearson è la GEV: su quest'ultima verrà quindi effettuato l'ultimo test preso in esame.

Test di Anderson - Darling

Per lo svolgimento di questo test si utilizza la tabella "Laio, 2004" sotto riportata.

Distribution[b]	ξ_p	β_p	η_p
EV1 and EV2	0.169	0.229	1.141
NORM and LN	0.167	0.229	1.147
GEV[c]	$0.147\,(1 + 0.13\,\hat\theta_3 + 0.21\,\hat\theta_3^2 + 0.09\,\hat\theta_3^3)$	$0.189\,(1 + 0.20\,\hat\theta_3 + 0.37\,\hat\theta_3^2 + 0.17\,\hat\theta_3^3)$	$1.186\,(1 - 0.04\,\hat\theta_3 - 0.04\,\hat\theta_3^2 - 0.01\,\hat\theta_3^3)$
GAM and LP3[d]	$0.145\,(1 + 0.17\,\hat\theta_3^{-1} + 0.33\,\hat\theta_3^{-2})$	$0.186\,(1 + 0.34\,\hat\theta_3^{-1} + 0.30\,\hat\theta_3^{-2})$	$1.194\,(1 - 0.04\,\hat\theta_3^{-1} - 0.12\,\hat\theta_3^{-2})$

[a]Here $\hat\theta_3$ is an asymptotic efficient estimator (usually maximum likelihood) of the shape parameter of the distribution.
[b]For tests of the EV2, LN, and LP3 distributions the data must be preliminarily log transformed.
[c]For the GEV distribution, if $\hat\theta_3 > 0.5$, $\hat\theta_3 = 0.5$ must be set in the regressions.
[d]For the GAM and LP3 distributions, if $\theta_3 < 2$, $\theta_3 = 2$ must be set in the regressions.

Figura 2.5.1: tabella Laio 2004

Poiché si considera il modello probabilistico GEV:

$$\xi_P = 0{,}147 \cdot (1 + 0{,}13\theta_3 + 0{,}21\theta_3^2 + 0{,}09\theta_3^3)$$
$$\beta_P = 0{,}189 \cdot (1 + 0{,}20\theta_3 + 0{,}37\theta_3^2 + 0{,}17\theta_3^3)$$
$$\eta_P = 1{,}186 \cdot (1 - 0{,}04\theta_3 - 0{,}04\theta_3^2 + 0{,}01\theta_3^3)$$

Si calcola quindi la statistica test per il test di Anderson – Darling in forma semplificata:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(2i-1)\cdot ln\big(F(x_i)\big) + (2n+1-2i)\cdot ln\big(1-F(x_i)\big)\right]$$

e si confronti con il valore $1{,}2\xi_P$.

N.B.: i valori relativi alla distribuzione GEV (probabilità cumulate e parametri stimati) sono quelli ricavati nei passaggi precedenti di questa esercitazione.

Tabella 2.5.5: parametri utili per il test di Anderson-Darling

$\boldsymbol{\xi_P}$	0,143
$\boldsymbol{\beta_P}$	0,183
$\boldsymbol{\eta_P}$	1,198
$\boldsymbol{A^2}$	0,361
$\boldsymbol{1,2\xi_P}$	0,172

Poiché

$$1{,}2\xi_P < A^2$$

si calcola il parametro ω con la seguente relazione:

$$\omega = 0{,}0403 + 0{,}116\left(\frac{A^2 - \xi_P}{\beta_P}\right)^{\frac{\eta_P}{0{,}851}}$$

Stabilite queste condizioni, e avendo $\alpha = 0{,}05$, la condizione di passaggio del test è che ω sia minore di 0,461.
Poiché ω = 0,188, la distribuzione GEV supera il test di Anderson – Darling.

2.6. Diagramma diagnostico di Hosking - Wallis

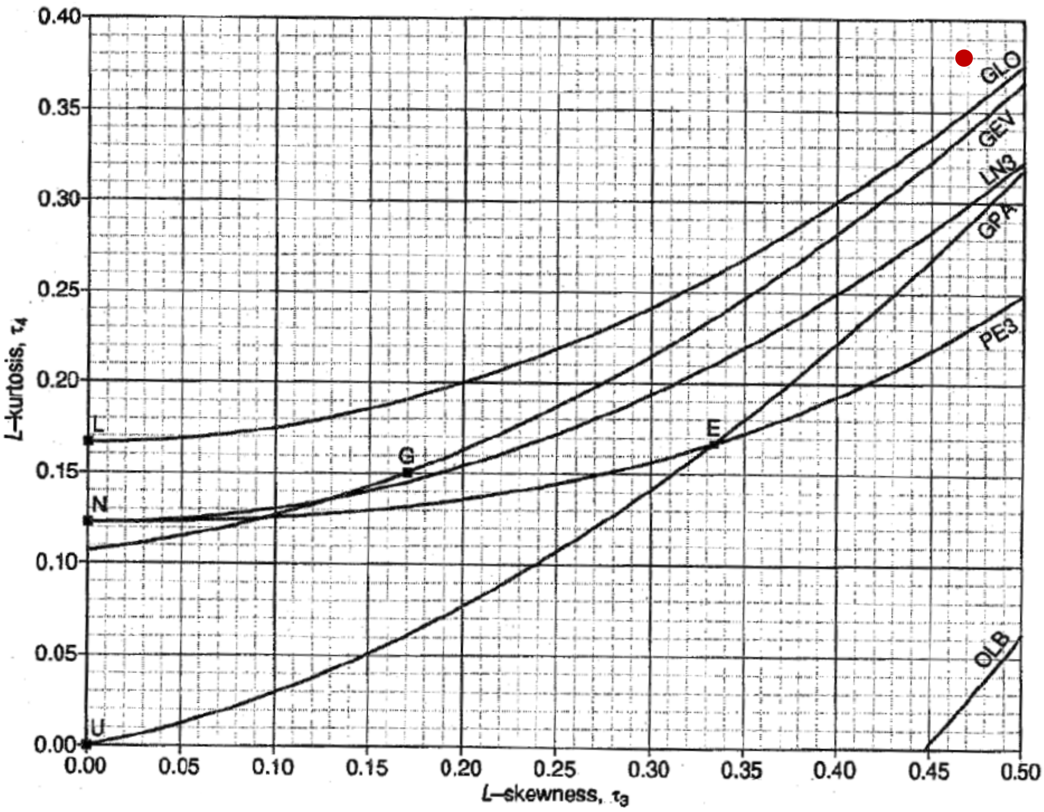


Figura 2.6.1: diagramma di Hosking - Wallis

Il diagramma in *Figura 2.6.1* considera i seguenti valori:

- in ascissa $\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$
- in ordinata $\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$

Avendo la distribuzione Log-normale e Gumbel a due parametri, sul piano saranno rappresentati dei punti (rispettivamente punto "L" e"G" sul diagramma), mentre la distribuzione GEV, a tre parametri, sarà rappresentata da una curva.
Si avrà un unico punto sul diagramma, con le seguenti coordinate (vedere valori calcolati precedentemente):

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 0{,}467$$
$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 0{,}380$$

È così possibile notare che la distribuzione Log-normale e quella di Gumbel sono più distanti dal punto rispetto alla curva della distribuzione GEV. Come riscontrato con i test di adattamento del modello probabilistico, la distribuzione che meglio approssima i valori osservati è proprio la GEV.

La distribuzione probabilistica GEV supera tutti i test di adattamento statistico a cui è stata sottoposta; per questo motivo si utilizza l'espressione relativa a tale modello per determinare il valore della portata di progetto.

$$x_T(F) = \theta_1 + \theta_2 \frac{1 - (-\ln F)^{\theta_3}}{\theta_3}$$

con

$$F = 1 - \frac{1}{T}$$

considerando tempi di ritorno T dell'evento di 50, 100 e 200 anni e i parametri calcolati nel paragrafo dedicato alla GEV.

Nel caso in cui più distribuzioni avessero superato tutti i test statistici, sarebbe stato necessario ragionare secondo una logica di insieme, considerando tutte le eventuali distribuzioni valide. Calcolate le diverse portate, il valore più cautelativo sarebbe stato il maggiore tra quelli ottenuti.

Avendo calcolato i parametri della GEV con gli L-Momenti, si ottengono i seguenti risultati

Tabella 2.6.1: portate di progetto modello GEV

Tempi di ritorno T [anni]	**Q [m^3/s]**
50	1128,27
100	1543,26
200	2095,72

3. Esercitazione 3: Costruzione di pluviogrammi di progetto

3.1. Definizione della relazione altezza media - durate

Nella *Tabella 3.1.1* sono riportati i valori $h(d)$ delle altezze di pioggia massima annuale misurate nella stazione di Pragelato per le durate d = 1, 3, 6, 12, 24 ore, nel periodo di osservazione 1955 - 2009. Si ricorda che per alcuni anni non sono state riportate misure pluviometriche.
I dati sono stati opportunamente ordinati in senso crescente per ogni durata.

Tabella 3.1.1: estremi pluviometrici della stazione di Pragelato

i	h(1) [mm]	h(3) [mm]	h(6) [mm]	h(12) [mm]	h(24) [mm]
1	7,8	11,0	16,2	20,0	27,0
2	8,0	12,0	17,0	25,4	30,0
3	9,0	13,8	18,0	26,8	30,8
4	9,4	14,6	19,4	27,0	34,2
5	9,6	14,6	21,8	29,4	35,0
6	9,6	15,0	23,0	30,0	36,0
7	9,8	15,2	23,2	32,0	38,2
8	10,0	15,6	24,0	37,3	41,6
9	10,0	17,0	24,1	38,3	41,8
10	10,8	18,0	24,4	41,6	45,9
11	11,0	18,2	25,2	41,6	47,9
12	11,2	19,4	27,0	41,8	49,4
13	11,2	20,0	28,4	43,0	49,6
14	11,2	20,6	30,0	43,6	50,3
15	11,6	22,0	30,0	43,8	51,0
16	12,2	22,4	32,0	44,6	57,0
17	12,4	23,0	32,0	46,0	57,3
18	12,6	23,0	34,0	47,0	58,0
19	13,0	23,6	34,4	49,0	59,6
20	13,2	24,0	34,6	49,4	60,6
21	13,4	24,2	35,0	50,3	63,0
22	13,5	24,6	37,1	51,2	69,8
23	15,2	25,0	39,8	57,6	75,0
24	15,3	28,8	40,0	59,0	77,0
25	16,0	29,0	41,0	59,0	78,9
26	17,0	31,0	43,8	59,7	79,0
27	17,0	32,0	46,8	63,4	80,6
28	17,4	32,4	50,3	67,0	93,9
29	18,0	32,8	50,4	71,0	106,8
30	22,8	35,7	50,8	86,0	113,0
31	27,7	39,0	52,7	88,0	114,0
32	30,0	43,0	56,4	91,9	124,1
33	33,0	50,3	61,8	92,0	139,0

Una volta calcolate le medie dei massimi annui di precipitazione per ogni durata, come riportato in *Tabella 3.1.2*, si realizza un grafico in scala cartesiana, diagrammando il logaritmo naturale della media delle $h(d)$ in funzione del logaritmo naturale delle rispettive durate.
Attraverso il comando di Excel "Inserisci linea di tendenza", si procede con una approssimazione lineare dell'andamento dei valori ottenuti.

Tabella 3.1.2: valori delle altezze medie di pioggia

	1 h	3 h	6 h	12 h	24 h
Media $h(d)$ [mm]	14,2	24,0	34,1	50,1	64,1

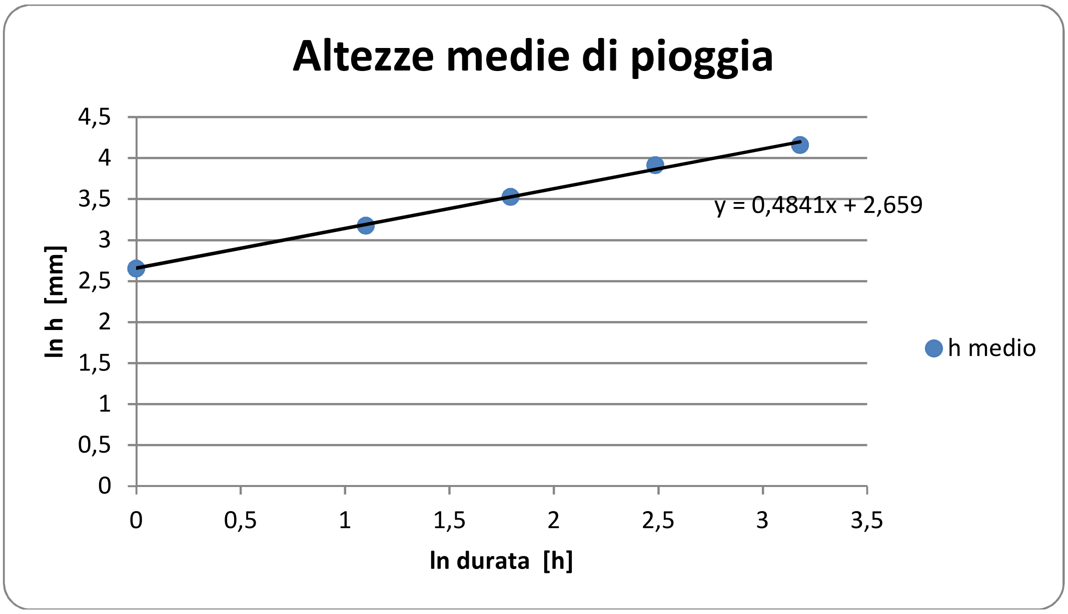


Figura 3.1.1: andamento altezze medie di pioggia

Dall'equazione $y = \gamma x + \beta$ così ottenuta, si ricavano i parametri:

- coefficiente pluviale orario a, con $a = e^{\beta}$;
- esponente della curva n, con $n = \gamma$;

I parametri a e n verranno utilizzati per determinare la relazione che lega la media dei massimi di precipitazione $\overline{h_d}$ alle durate, utilizzando un modello di regressione

$$\overline{h_d} = a \cdot d^n$$

Tabella 3.1.3: parametri regressione lineare

$\boldsymbol{y = 0,4841x + 2,659}$	
$\boldsymbol{\beta}$	2,659
$\boldsymbol{a}$	14,282
$\boldsymbol{n}$	0,484

3.2. Parametri adimensionali delle distribuzioni Gumbel e GEV

Considerando l'uso del modello probabilistico di Gumbel, con parametri stimati con i momenti ordinari, si calcolano i coefficienti di variazione dei massimi annui di precipitazione registrati nelle 5 durate e si rappresentano su un grafico.

Ricordando che:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

si ottengono i risultati riportati in *Tabella 3.2.1*, assumendo un unico coefficiente di variazione *CV* pari alla media dei *CV* diverse durate.

Tabella 3.2.1: coefficienti di variazione Gumbel

	1 h	3 h	6 h	12 h	24 h
σ	6,125	9,226	12,222	19,280	29,174
μ	14,2	24,0	34,1	50,1	64,1
CV_d	0,430	0,385	0,359	0,385	0,455
CV medio			0,403		

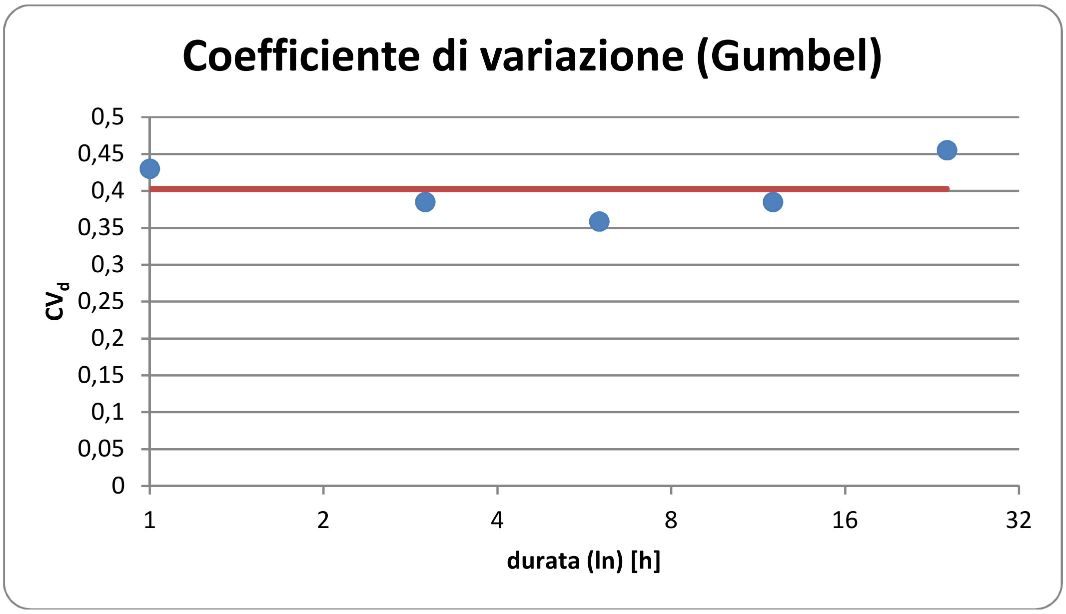


Figura 3.2.1: coefficiente di variazione

Nel caso della distribuzione GEV, si considerano i parametri adimensionalizzati θ_1/μ, θ_2/μ e θ_3, e come valori unici si assumeranno i valori medi.

Tabella 3.2.2: parametri GEV

	1 h	3 h	6 h	12 h	24 h	Valori medi
$\varepsilon = \theta_1/\mu$	0,785	0,816	0,836	0,820	0,774	0,785
$\alpha = \theta_2/\mu$	0,215	0,297	0,312	0,309	0,328	0,215
$k = \theta_3$	-0,303	-0,042	0,055	-0,005	-0,103	-0,079

3.3. Rappresentazione delle curve IDF

Si utilizza la legge di Gumbel per rappresentare i quantili di precipitazione relativi alla generica durata d una volta fissato il periodo di ritorno T a 10, 50, 100 anni.

$$h_{d,T} = \overline{h_d}\left\{1 - CV\left[0{,}45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi}\ln\left(\ln\frac{T}{T-1}\right)\right]\right\}$$

Vengono anche riportati i valori delle intensità di pioggia, calcolate tramite la relazione

$$i_{d,T} = \frac{h_{d,T}}{d}$$

Tabella 3.3.1: dati per la costruzione delle curve CPP e IDF, Gumbel

Durate [h]	$\overline{h_d}$ [mm]	$h_{d,10}$ [mm]	$h_{d,50}$ [mm]	$h_{d,100}$ [mm]	$i_{d,10}$ [mm/h]	$i_{d,50}$ [mm/h]	$i_{d,100}$ [mm/h]
1	14,28	21,79	29,19	32,32	21,79	29,19	32,32
2	19,98	30,47	40,83	45,21	15,24	20,42	22,61
3	24,31	37,08	49,69	55,02	12,36	16,56	18,34
4	27,94	42,62	57,11	63,24	10,66	14,28	15,81
5	31,13	47,48	63,63	70,45	9,50	12,73	14,09
6	34,00	51,87	69,50	76,95	8,64	11,58	12,83
7	36,64	55,88	74,88	82,92	7,98	10,70	11,85
8	39,08	59,62	79,88	88,45	7,45	9,99	11,06
9	41,37	63,11	84,57	93,64	7,01	9,40	10,40
10	43,54	66,42	89,00	98,54	6,64	8,90	9,85
11	45,60	69,55	93,20	103,20	6,32	8,47	9,38
12	47,56	72,54	97,21	107,63	6,05	8,10	8,97
13	49,44	75,41	101,05	111,89	5,80	7,77	8,61
14	51,24	78,17	104,74	115,97	5,58	7,48	8,28
15	52,98	80,82	108,30	119,91	5,39	7,22	7,99
16	54,66	83,39	111,73	123,72	5,21	6,98	7,73
17	56,29	85,87	115,06	127,40	5,05	6,77	7,49
18	57,87	88,28	118,29	130,98	4,90	6,57	7,28
19	59,41	90,62	121,43	134,45	4,77	6,39	7,08
20	60,90	92,90	124,48	137,83	4,64	6,22	6,89
21	62,36	95,12	127,46	141,13	4,53	6,07	6,72
22	63,78	97,28	130,36	144,34	4,42	5,93	6,56
23	65,16	99,40	133,19	147,48	4,32	5,79	6,41
24	66,52	101,47	135,97	150,55	4,23	5,67	6,27

Si costruiscono le curve di possibilità pluviometrica (CPP), nonché le curve di intensità – durata – frequenza (IDF), rappresentandole in coordinate cartesiane e in scala bi-logaritmica, per periodi di ritorno di 10, 50 e 100 anni.

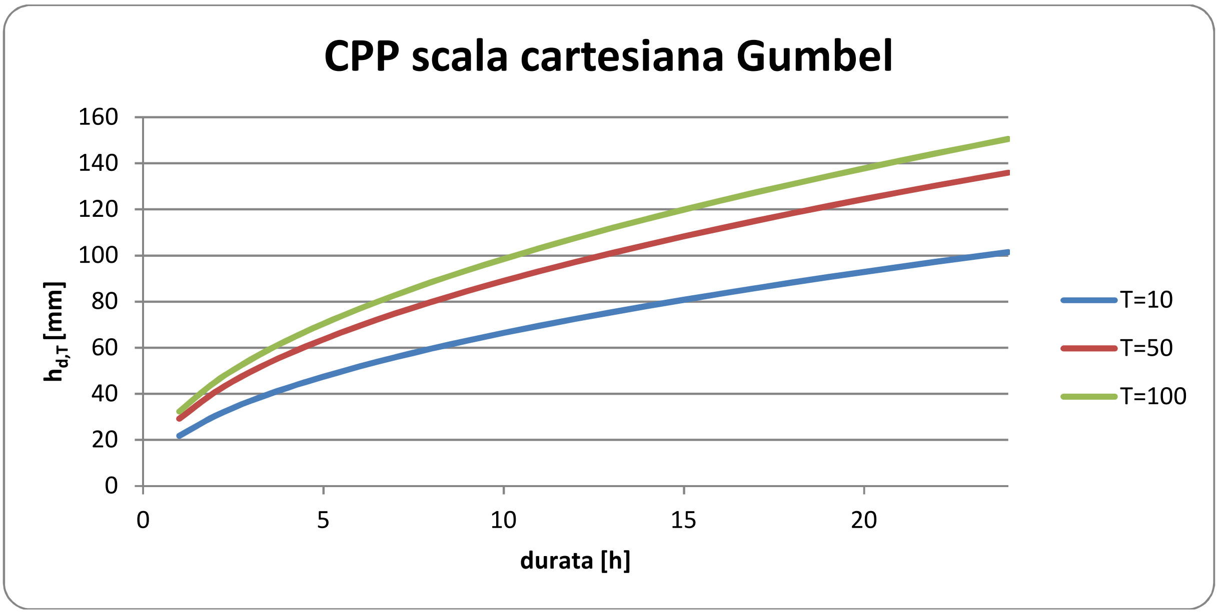


Figura 3.3.1: curva CPP, scala cartesiana, Gumbel

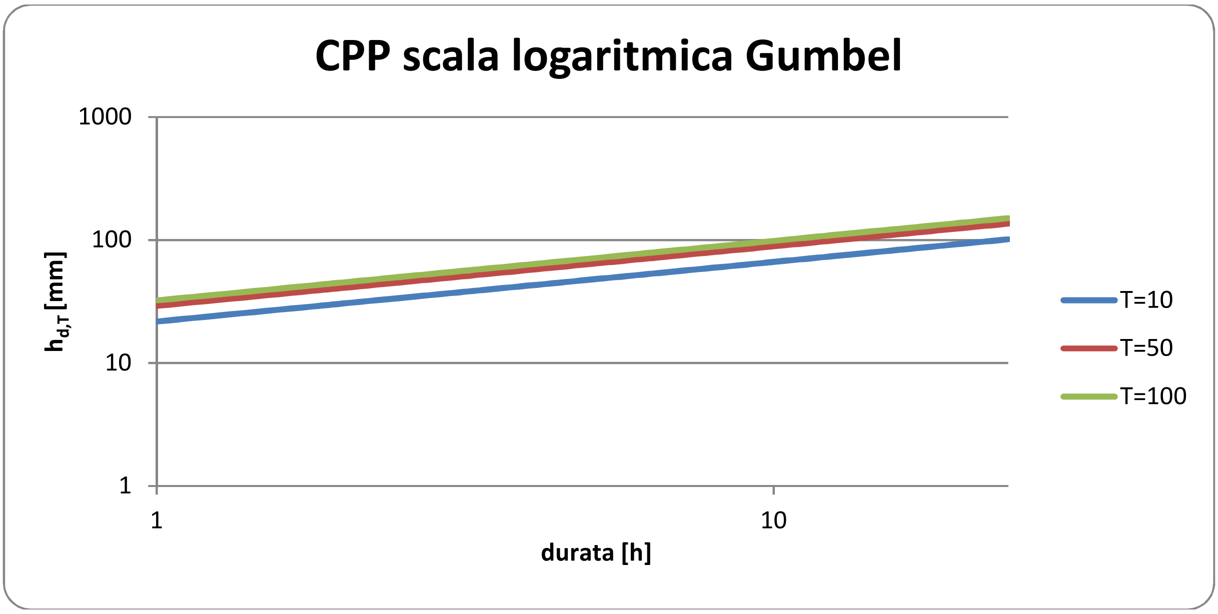


Figura 3.3.2: curva CPP, scala logaritmica, Gumbel

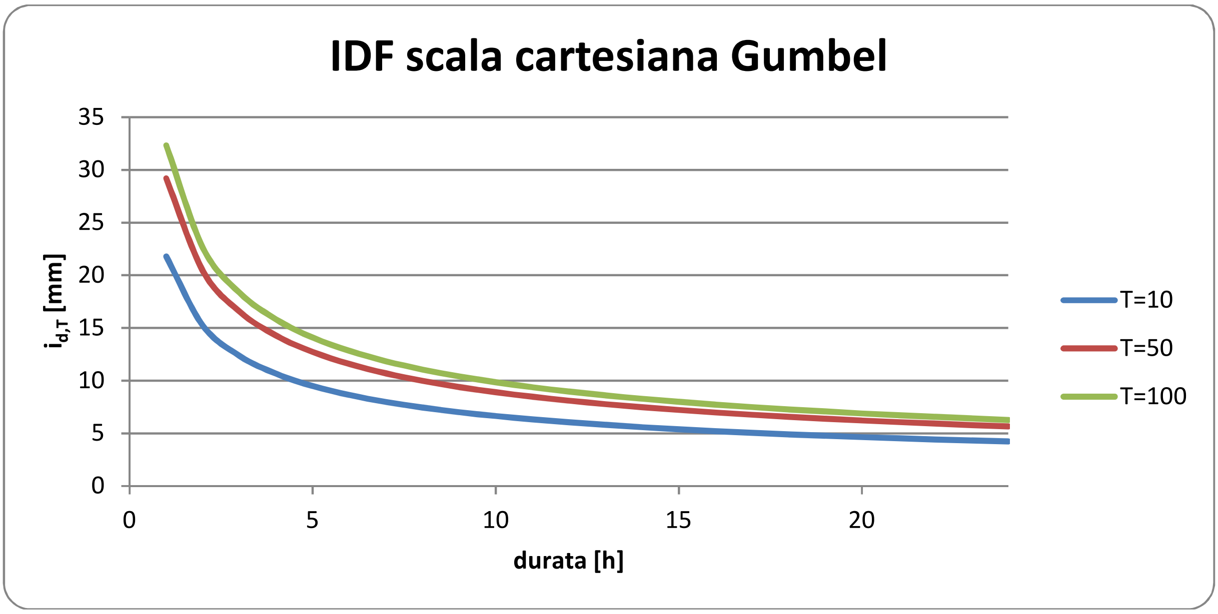


Figura 3.3.3: curva IDF, scala cartesiana, Gumbel

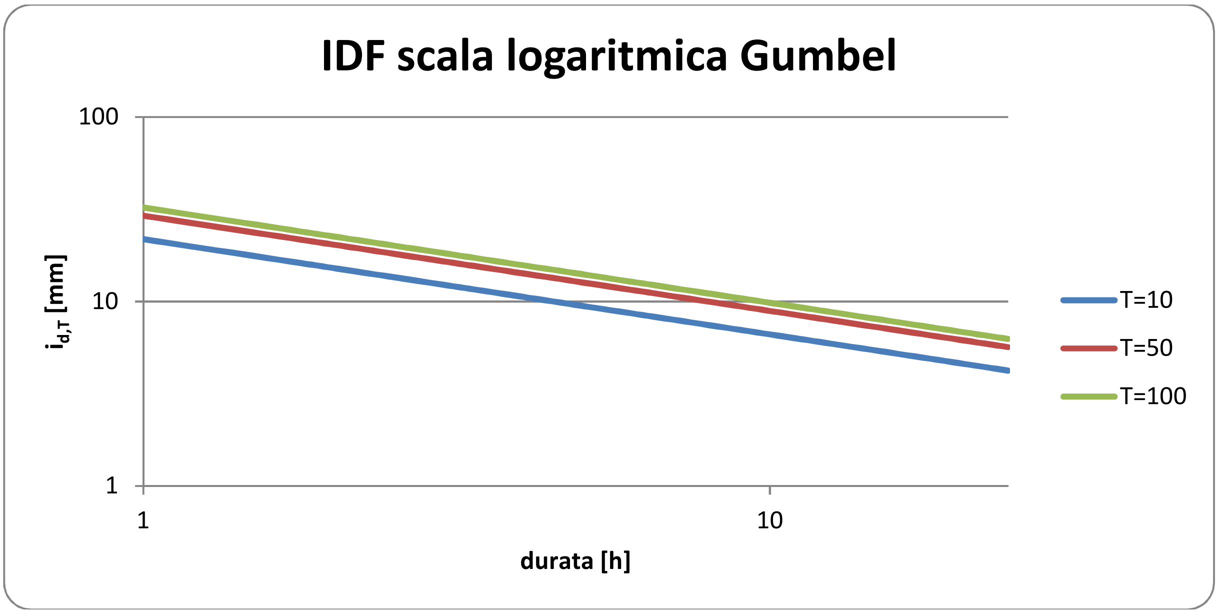


Figura 3.3.4: curva IDF, scala logaritmica, Gumbel

Si utilizza quindi anche la distribuzione GEV per rappresentare i quantili di precipitazione relativi alla generica durata una volta fissato il periodo di ritorno T a 10, 50, 100 anni.

$$h_{d,T} = \overline{h_d}\left\{\varepsilon + \frac{\alpha}{\theta_3}\left[1 - exp\left[-\theta_3\left(-\ln\left(\ln\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]\right]\right\}$$

Si utilizza la già citata relazione per il calcolo delle intensità

$$i_{d,T} = \frac{h_{d,T}}{d}$$

Tabella 3.3.2: dati per la costruzione delle curve CPP e IDF, GEV

Durate [h]	$\boldsymbol{h_d}$ **[mm]**	$\boldsymbol{h_{d,10}}$ **[mm]**	$\boldsymbol{h_{d,50}}$ **[mm]**	$\boldsymbol{h_{d,100}}$ **[mm]**	$\boldsymbol{i_{d,10}}$ **[mm/h]**	$\boldsymbol{i_{d,50}}$ **[mm/h]**	$\boldsymbol{i_{d,100}}$ **[mm/h]**
1	14,28	21,79	30,59	34,67	21,79	30,59	34,67
2	19,98	30,48	42,79	48,50	15,24	21,39	24,25
3	24,31	37,09	52,07	59,01	12,36	17,36	19,67
4	27,94	42,63	59,85	67,83	10,66	14,96	16,96
5	31,13	47,49	66,67	75,57	9,50	13,33	15,11
6	34,00	51,88	72,83	82,54	8,65	12,14	13,76
7	36,64	55,90	78,47	88,94	7,99	11,21	12,71
8	39,08	59,63	83,71	94,88	7,45	10,46	11,86
9	41,37	63,13	88,62	100,45	7,01	9,85	11,16
10	43,54	66,43	93,26	105,70	6,64	9,33	10,57
11	45,60	69,57	97,66	110,69	6,32	8,88	10,06
12	47,56	72,56	101,86	115,46	6,05	8,49	9,62
13	49,44	75,43	105,89	120,02	5,80	8,15	9,23
14	51,24	78,18	109,75	124,40	5,58	7,84	8,89
15	52,98	80,84	113,48	128,63	5,39	7,57	8,58
16	54,66	83,40	117,08	132,71	5,21	7,32	8,29
17	56,29	85,89	120,57	136,66	5,05	7,09	8,04
18	57,87	88,30	123,95	140,49	4,91	6,89	7,81
19	59,41	90,64	127,24	144,22	4,77	6,70	7,59
20	60,90	92,92	130,44	147,85	4,65	6,52	7,39
21	62,36	95,14	133,56	151,38	4,53	6,36	7,21
22	63,78	97,30	136,60	154,83	4,42	6,21	7,04
23	65,16	99,42	139,57	158,20	4,32	6,07	6,88
24	66,52	101,49	142,48	161,49	4,23	5,94	6,73

Si costruiscono le curve di possibilità pluviometrica (CPP), nonché le curve di intensità – durata – frequenza (IDF), rappresentandole in coordinate cartesiane e in scala bi-logaritmica, per periodi di ritorno di 10, 50 e 100 anni.

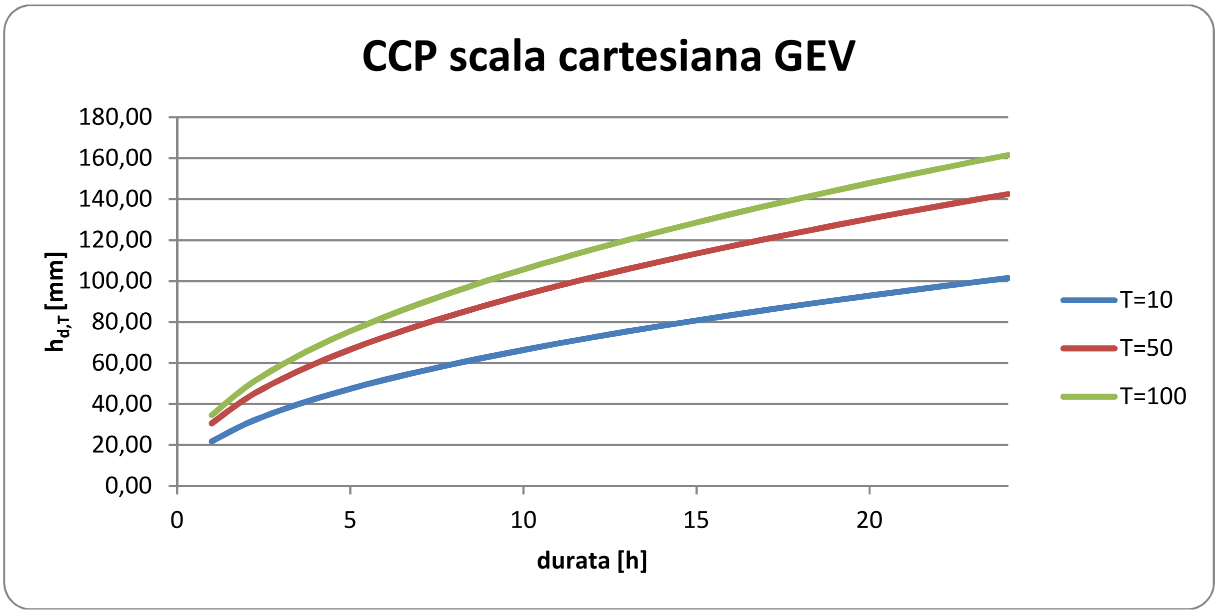


Figura 3.3.5: curva CPP, scala cartesiana, GEV

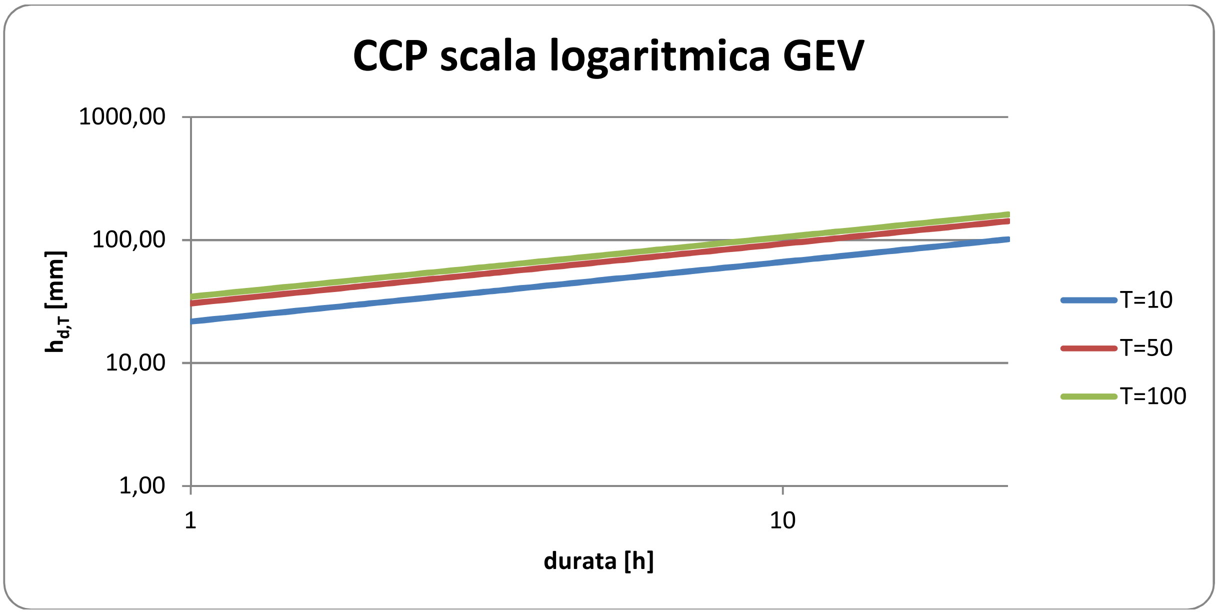


Figura 3.3.6: curva CPP, scala logaritmica, GEV

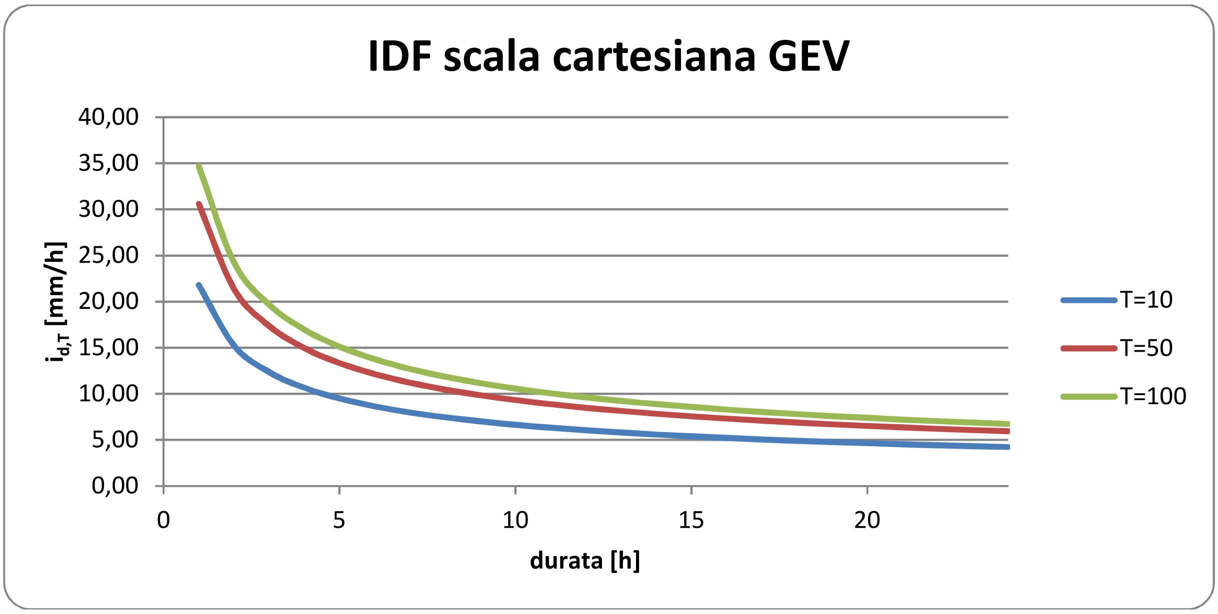


Figura 3.3.7: curva IDF, scala cartesiana, GEV

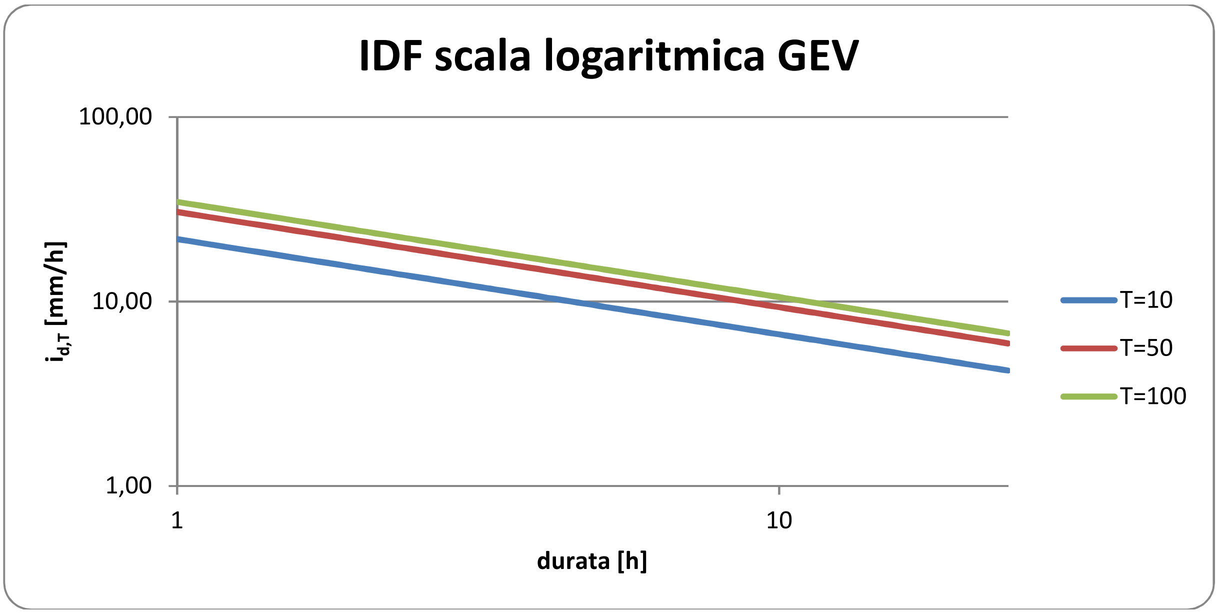


Figura 3.3.8: curva IDF, scala logaritmica, GEV

3.4. Pluviogramma di progetto

Si considerino i quantili $h_{6,100}$ di entrambe le distribuzioni già utilizzate.
Si costruisce un pluviogramma di progetto con il metodo dei blocchi alternati (pluviogramma Chicago discretizzato), sia nel caso della Gumbel, sia nel caso della GEV, con valori in ordinate

$$i(d) = \frac{h_{j+1} - h_j}{d_{j+1} - d_j}$$

Tabella 3.4.1: ietogramma Chicago, Gumbel

Durate [h]	$h_{d,100}$ [mm]	$i(d)$ [mm/h]
1	32,32	32,32
2	45,21	12,89
3	55,02	9,81
4	63,24	8,22
5	70,45	7,21
6	76,95	6,50

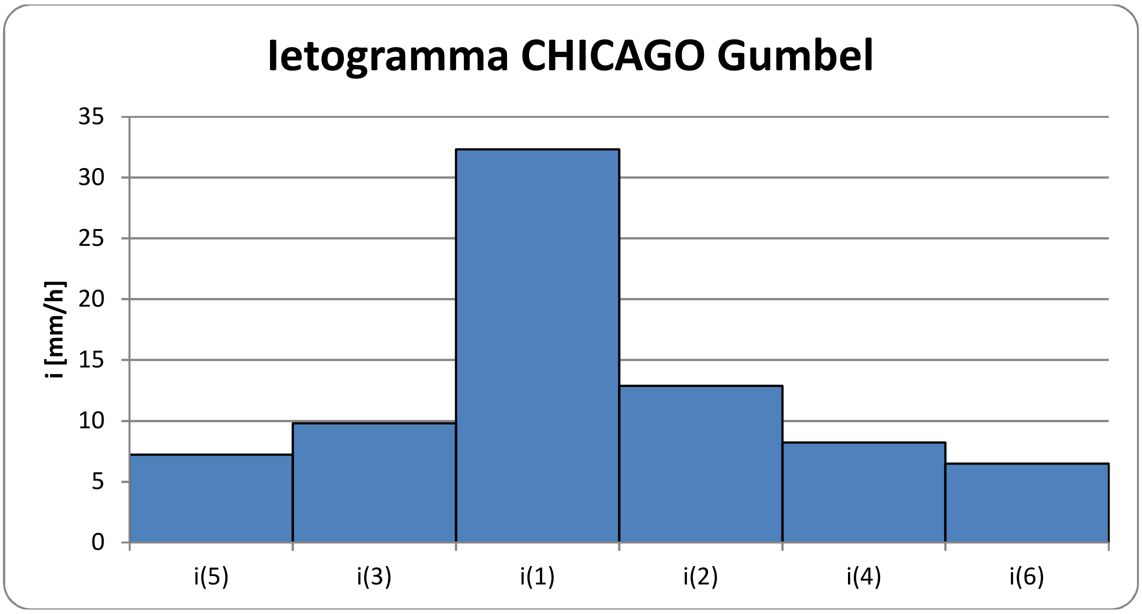


Figura 3.4.1: ietogramma Chicago, Gumbel

Tabella 3.4.2: ietogramma Chicago, GEV

Durate [h]	$h_{d,100}$ [mm]	$i(d)$ [mm/h]
1	34,67	34,67
2	48,50	13,82
3	59,01	10,52
4	67,83	8,82
5	75,57	7,74
6	82,54	6,97

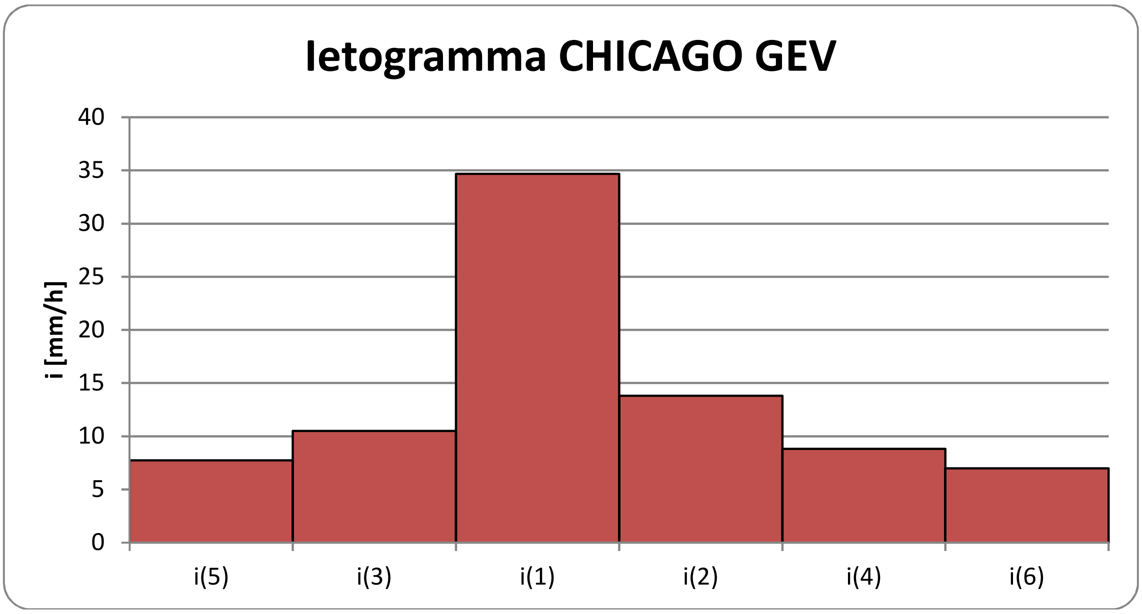


Figura 3.4.2: ietogramma Chicago, GEV

Per chiarire la differenza che esiste tra intensità media in una durata d ed intensità marginali di un pluviogramma, si rappresenta il pluviogramma ottenuto ordinando le intensità in senso decrescente e sovrapponendolo alla rispettiva curva di intensità media.

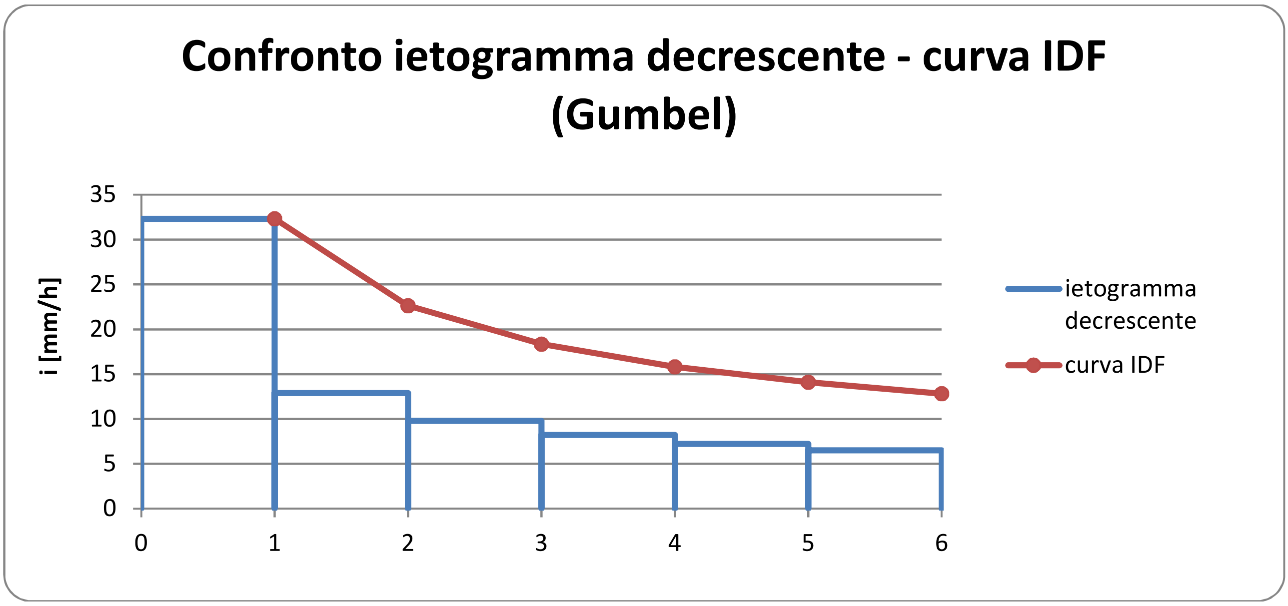


Figura 3.4.3: confronto ietogramma - IDF, Gumbel

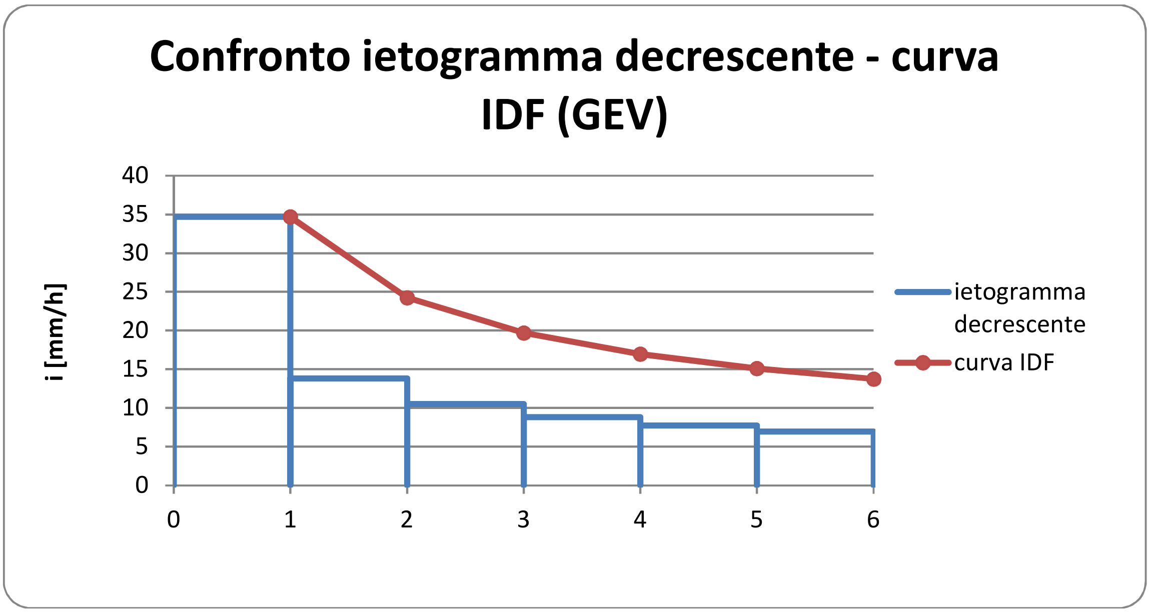


Figura 3.4.4: confronto ietogramma - IDF, GEV

4. Esercitazione 4: Rilevati arginali - Piena di progetto stimata con i metodi indiretti

4.1. Ricostruzione di un idrogramma di piena lordo con il metodo cinematico (o metodo della corrivazione)

Curva ipsografica

Inizialmente si costruisce la curva ipsografica (*Figura 4.1.1*), riportando i quantili forniti dall'Atlante dei Bacini Imbriferi Piemontesi, relativi al Chisone a San Martino. Si diagrammano le varie quote altimetriche in relazione ai quantili delle aree sovrastanti le relative quote su un grafico $[a_s(z), z]$.

Tabella 4.1.1: curva ipsografica (dall'Atlante dei Bacini Piemontesi)

Area bacino A [km²]	580,53	
Quantili [%]	z [m]	$a_s(z)$ [km²]
0	3234	0
2,5	2742	14,51
5	2647	29,03
10	2520	58,05
25	2224	145,13
50	1773	290,27
75	1276	435,40
90	878	522,48
95	711	551,50
97,5	603	566,02
100	415	580,53

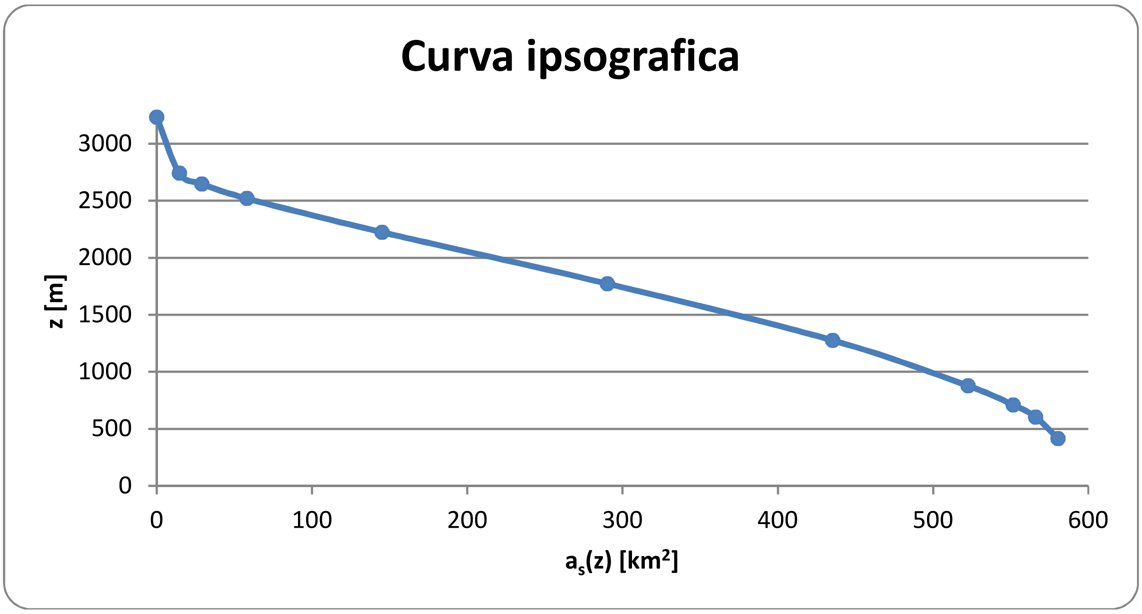


Figura 4.1.1: curva ipsografica

Curva ipsometrica

Si costruisce quindi anche la curva ipsometrica (*Figura 4.1.2*), cioè la curva ipsografica normalizzata secondo le seguenti relazioni:

$$x = \frac{a_s(z)}{A} \qquad \zeta = \frac{z - z_{min}}{\Delta z} = \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}}$$

Tabella 4.1.2: curva ipsometrica

ζ [-]	x [-]
1,000	0,000
0,825	0,025
0,792	0,050
0,747	0,100
0,642	0,250
0,482	0,500
0,305	0,750
0,164	0,900
0,105	0,950
0,067	0,975
0,000	1,000

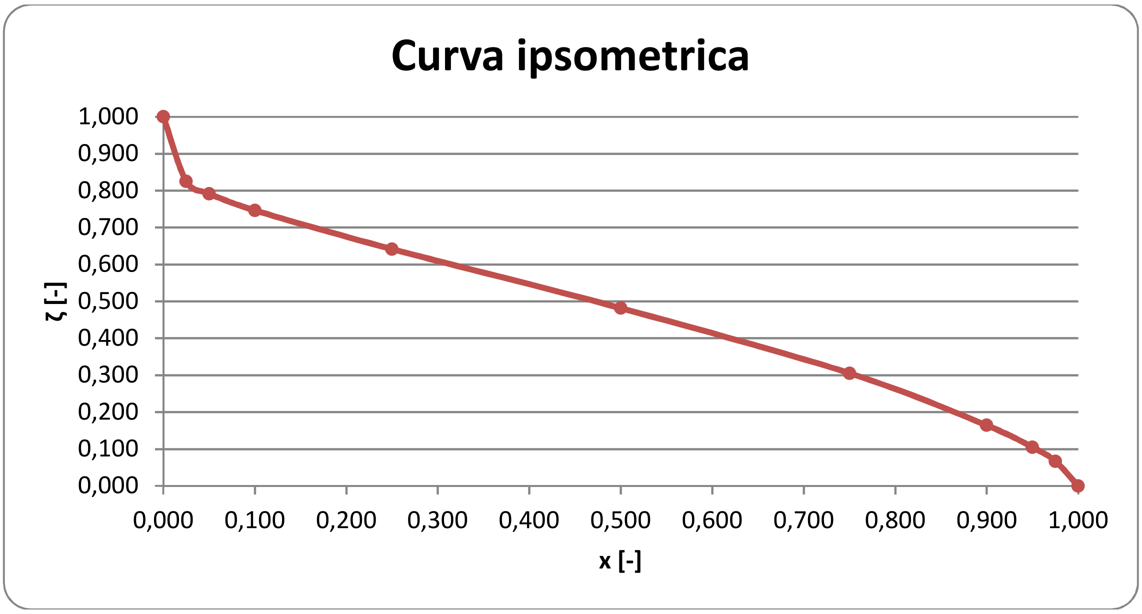


Figura 4.1.2: curva ipsometrica

Si vogliono ricercare sulla curva ipsometrica i valori delle k aree a_j sovrastanti i valori ottenuti dividendo il rilievo del bacino $(z_{max} - z_{min})$ in k dislivelli uguali, con k = 6.
Si calcola il dislivello uguale con l'espressione

$$\Delta z = \frac{z_{max} - z_{min}}{k} = \frac{3234 - 415}{6} = 469{,}83\ m$$

Si procede interpolando linearmente i valori della curva ipsometrica in *Figura 4.1.2* a due a due, trovando così un'equazione lineare per ogni tratto, tramite il comando di Excel che inserisce una linea di tendenza (lineare); si calcolano quindi le aree normalizzate invertendo opportunamente le equazioni delle rette interpolanti.

$$y = mx + q$$

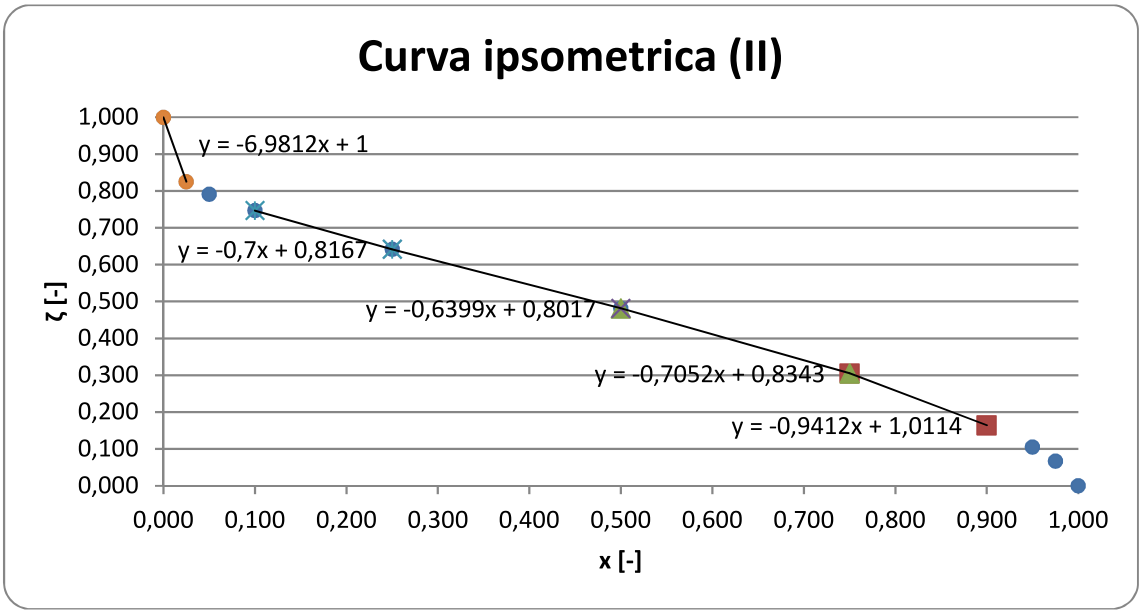


Figura 4.1.3: curva ipsometrica con rette interpolanti

Nota y, cioè la nuova ζ calcolata con il dislivello imposto, si trova la corrispettiva $x = a_j$ invertendo l'equazione.

Si riportano quindi i risultati ottenuti.

Tabella 4.1.3: curva ipsometrica dislivelli equidistanti

z [m]	**ζ [-]**	**x [-]**	**$a_s(z)$ [km^2]**
3234	1,000	0,000	0,00
2764	0,833	0,024	13,86
2294	0,667	0,214	124,43
1825	0,500	0,471	273,71
1355	0,333	0,710	412,40
885	0,167	0,898	521,03
415	0,000	1,000	580,53

Curva aree – tempi

Si costruisce, secondo l'ipotesi isocorrive = isoipse, la curva aree – tempi, usando come base dei tempi la stima del tempo di corrivazione t_c, ottenuta mediante la formula di Giandotti, approssimando t_c all'intero più vicino.

Si riprendono i valori dall'Atlante dei Bacini Imbriferi Piemontesi relativi al Chisone a San Martino, aggiungendo anche i valori di z_{media} e L = lunghezza dell'asta principale.

Tabella 4.1.4: caratteristiche morfologiche del bacino del Chisone a San Martino

$\boldsymbol{z_{min}}$	415 m
$\boldsymbol{z_{media}}$	1739 m
$\boldsymbol{z_{max}}$	3234 m
$\boldsymbol{A}$	580,53 km^2
$\boldsymbol{L}$	57,524 km

La formula di Giandotti già citata è la seguente:

$$t_c = \frac{4\sqrt{A} + 1{,}5L}{0{,}8\sqrt{\bar{z} - z_{min}}} = \frac{4\sqrt{580{,}53\ \mathrm{km}^2} + 1{,}5 \cdot 57{,}524\ \mathrm{km}}{0{,}8\sqrt{1739\ \mathrm{m} - 415\ \mathrm{m}}} = 6{,}275\ ore \cong 6\ ore$$

La curva aree – tempi avrà sull'asse delle ascisse la scala temporale, con un intervallo compreso tra 0 e il tempo di corrivazione t_c calcolato, e sull'asse delle ordinate l'area del bacino avente corrispondente t_c.

Tabella 4.1.5: curva aree - tempi

t_c [h]	z [m]	$a_{sovrastante}$(z) [km^2]	$a_{sottostante}$ (z) [km^2]
0	415	580,53	0,00
1	885	521,03	59,50
2	1355	412,40	168,13
3	1825	273,71	306,82
4	2294	124,43	456,10
5	2764	13,86	566,67
6	3234	0,00	580,53

Si riporta alla pagina seguente il grafico ottenuto (*Figura 4.1.4*)

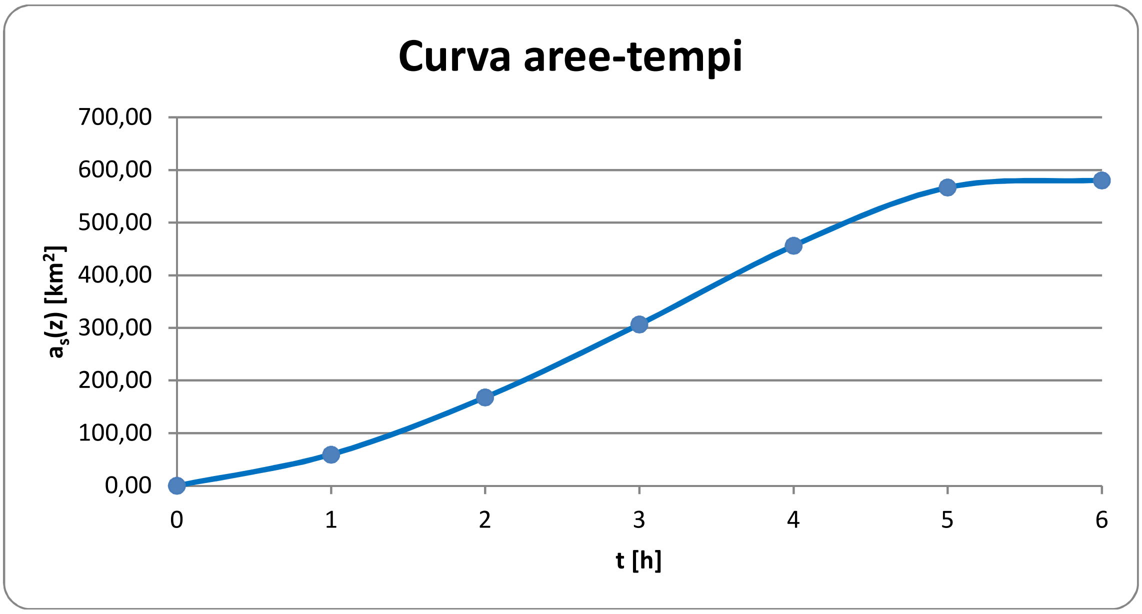


Figura 4.1.4: curva aree – tempi

Idrogramma unitario del bacino

Per realizzare l'idrogramma unitario del bacino, è necessario ottenere le "aree isocorrive" U_j mediante la differenza fra i valori successivi di a_j, considerando il caso delle aree sottostanti, già precedentemente calcolate per differenza con l'area totale (vedere *Tabella 4.1.5*).

Si utilizza la seguente relazione:

$$U_j = a_j - a_{j-1}$$

Tabella 4.1.6: idrogramma unitario del bacino

t_c [h]	z [m]	$a_{sottostante}$ (z) [km^2]	$a_{sottostante}$ (z) [-]	$U_j = a_j - a_{j-1}$
0	415	0,00	0,0	0,0
1	885	59,50	0,102	0,102
2	1355	168,13	0,290	0,187
3	1825	306,82	0,529	0,239
4	2294	456,10	0,786	0,257
5	2764	566,67	0,976	0,190
6	3234	580,53	1,000	0,024

Si riportano alla pagina successiva i valori dell'idrogramma unitario di bacino (*Figura 4.1.5*).

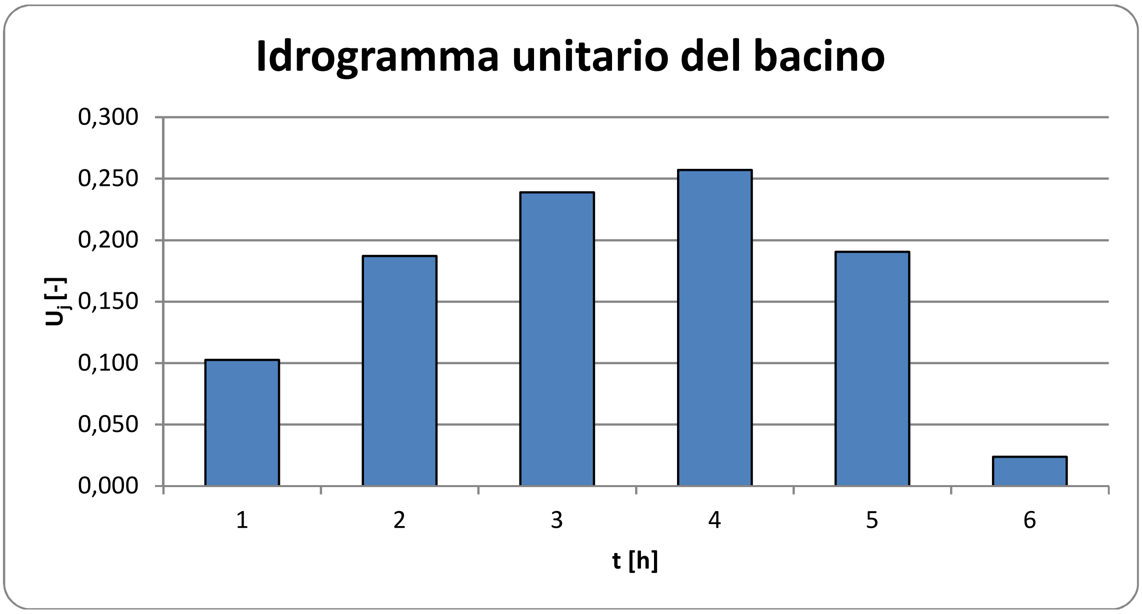


Figura 4.1.5: idrogramma unitario del bacino

Ietogramma di progetto

Usando la curva IDF già determinata per la stazione di Pragelato e scegliendo K_{100} sulla funzione di Gumbel (vedere Esercitazione 3, paragrafo 3.3*, Tabella 3.3.1*), si costruisce lo ietogramma di progetto con il metodo degli alternating blocks (Chicago discretizzato) per una durata di pioggia t_p pari al tempo di corrivazione t_c. Anche qui si utilizzano 6 intervalli e si derivano le intensità dalla relazione, già vista nel paragrafo precedentemente citato:

$$i_j = \frac{h_{j+1} - h_j}{\Delta t}$$

Per i valori utilizzati, si consideri la *Tabella 3.4.1*.

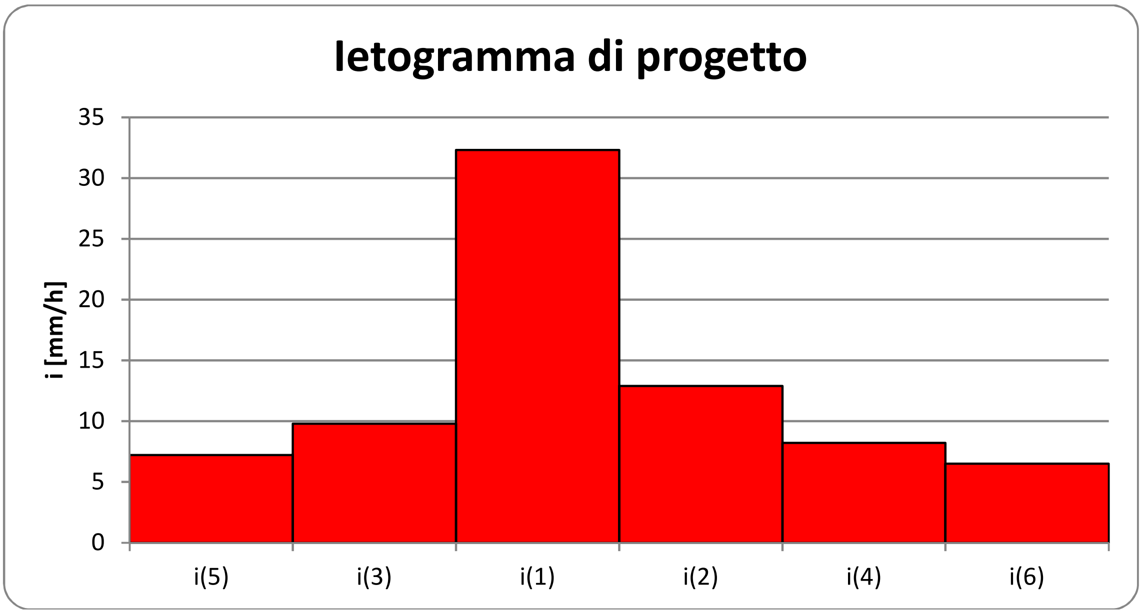


Figura 4.1.6: ietogramma Chicago

Idrogramma (lordo) di piena

Si applica la convoluzione discreta tra i_j e U_j, impostando la sommatoria del metodo di corrivazione come:

$$q_k = \frac{1}{3{,}6} \sum_{j=1}^{k} i_j \cdot U_{k-j+1}$$

dove U_j sono le ordinate dell'idrogramma unitario.

<u>*N.B.:*</u> si impongono nuovi indici alle intensità, poiché si considerano nell'ordine dei blocchi alternati, con picco in posizione centrale.

Tabella 4.1.7: matrice di convoluzione

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **7,214**	i_2 **9,805**	i_3 **32,324**	i_4 **12,888**	i_5 **8,221**	i_6 **6,501**					
U_1 **0,102**	0,739	1,005	3,313	1,321	0,843	0,666					
U_2 **0,187**		1,350	1,835	6,048	2,412	1,538	1,216				
U_3 **0,239**			1,723	2,343	7,722	3,079	1,964	1,553			
U_4 **0,257**				1,855	2,521	8,312	3,314	2,114	1,672		
U_5 **0,190**					1,374	1,868	6,156	2,455	1,566	1,238	
U_6 **0,024**						0,172	0,234	0,772	0,308	0,196	0,155
Somme	0,739	2,355	6,871	11,567	14,872	15,635	12,885	6,893	3,545	1,434	0,155
q_k	0,205	0,654	1,909	3,213	4,131	4,343	3,579	1,915	0,985	0,398	0,043

Una volta trovate le portate specifiche q_k, se moltiplicate per l'area del bacino A = 580,53 km^2, si ottengono le portate Q, in m^3/s.

$$Q = q_k \cdot A \qquad [m^3/s]$$

Tabella 4.1.8: idrogramma lordo di piena

t [h]	**Q [m^3/s]**
1	119,230
2	379,732
3	1108,031
4	1865,248
5	2398,226
6	2521,328
7	2077,829
8	1111,633
9	571,689
10	231,313
11	25,027

Si descrivono i risultati ottenuti con il metodo cinematico sull'idrogramma lordo di piena, rappresentato in due versioni, come curva (*Figura 4.1.7*) e come istogramma (*Figura 4.1.8*).

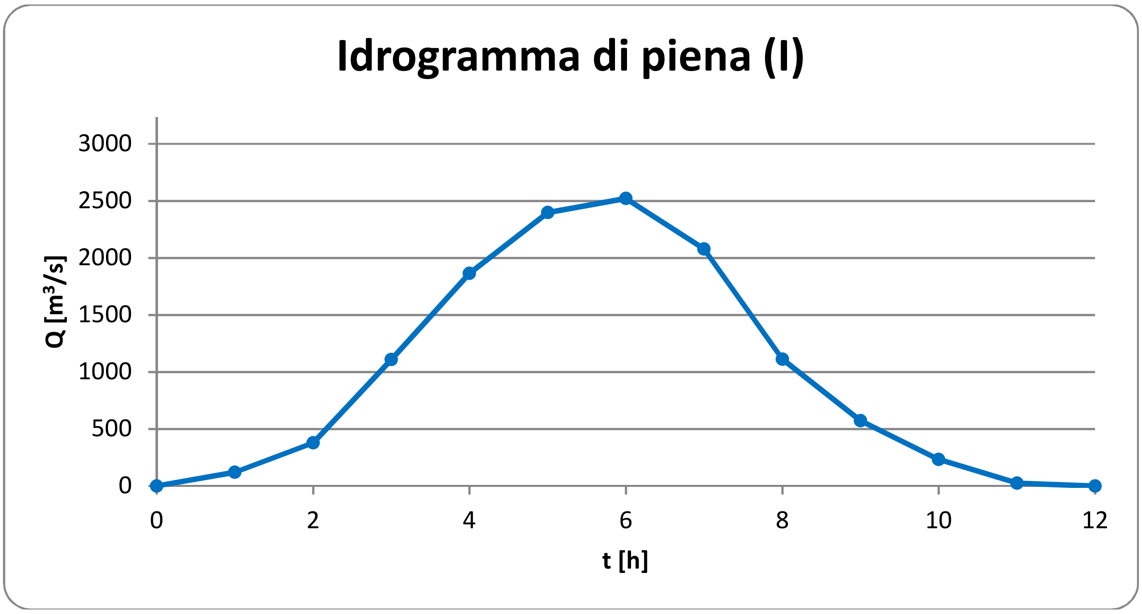


Figura 4.1.7: idrogramma lordo di piena (I)

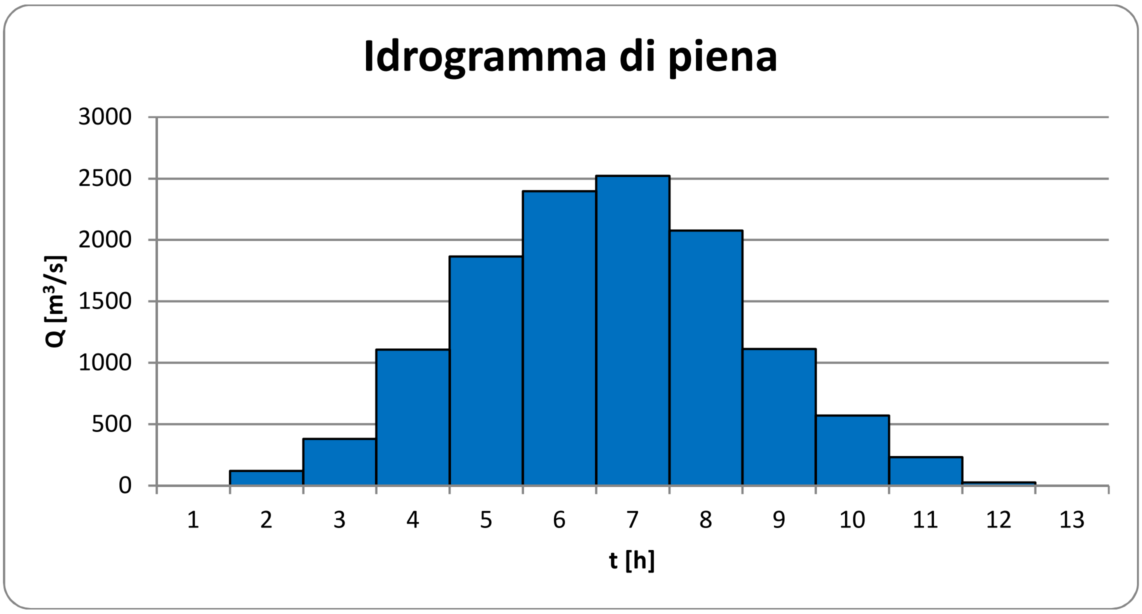


Figura 4.1.8: idrogramma lordo di piena (II)

4.2. Stima dell'idrogramma di piena dalle piogge nette: pluviogramma lordo areale

Utilizzando il metodo cinematico con ipotesi isocorrive = isoipse, si applicheranno due metodi di assorbimento semplificati per pervenire alla stima indiretta della Q_{100} nella sezione del Chisone a San Martino; il metodo ψ e il metodo SCS – CN.

Per determinare lo ietogramma lordo di progetto, si utilizzi il metodo indice, che prevede l'utilizzo della formula:

$$Q_{100} = Q_{indice} \cdot K(T)$$

Sia la media che il fattore di crescita $K(T)$ dovranno essere rappresentativi di tutto il bacino. Si considerano quindi i valori medi areali dei parametri, reperibili sull'Atlante dei Bacini Imbriferi Piemontesi.

Tabella 4.2.1: parametri Chisone a San Martino

Coefficiente pluviale orario medio a	17,438
Esponente della curva n	0,506
Area del bacino A [km^2]	580,53

Si definisca la curva IDF media applicando le formule già considerate nell'Esercitazione 3 per ricavare l'altezza e successivamente l'intensità, considerando un tempo di pioggia di 6 ore e intervalli di un'ora:

$$\bar{h} = ad^n$$
$$\bar{\imath} = \frac{h}{d}$$

Si ricavano quindi anche le espressioni delle intensità parziali di pioggia per la realizzazione degli ietogrammi:

$$i_j = \frac{h_{j+1} - h_j}{d_{j+1} - d_j}$$

Nota la curva IDF media, si costruisce il pluviogramma lordo con il metodo Chicago discretizzato; si dispongano le intensità parziali di pioggia i_j in ordine temporale utilizzando tre forme:

- picco iniziale (ietogramma decrescente), in *Figura 4.2.1*;
- picco finale (ietogramma crescente) in *Figura 4.2.2*;
- picco centrale (ietogramma quasi - simmetrico) in *Figura 4.2.3*.

d [h]	$\bar{h}$ [mm]	$\bar{\imath}$ [mm/h]	i_j decrescente [mm/h]	i_j crescente [mm/h]	i_j quasi – s. [mm/h]
1	17,44	17,44	17,44	3,80	4,20
2	24,76	12,38	7,33	4,20	5,64
3	30,40	10,13	5,64	4,76	17,44
4	35,17	8,79	4,76	5,64	7,33
5	39,37	7,87	4,20	7,33	4,76
6	43,18	7,20	3,80	17,44	3,80

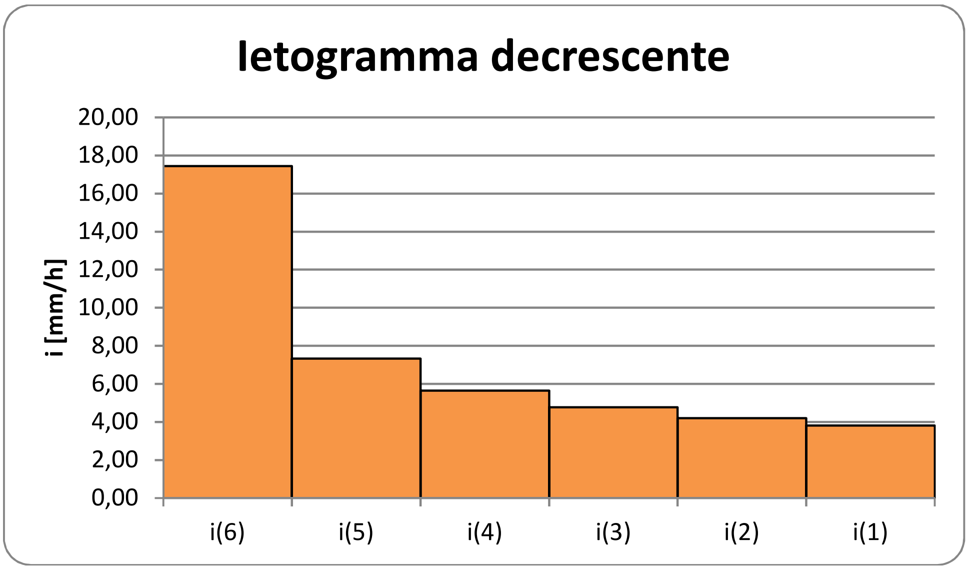


Figura 4.2.1: ietogramma decrescente

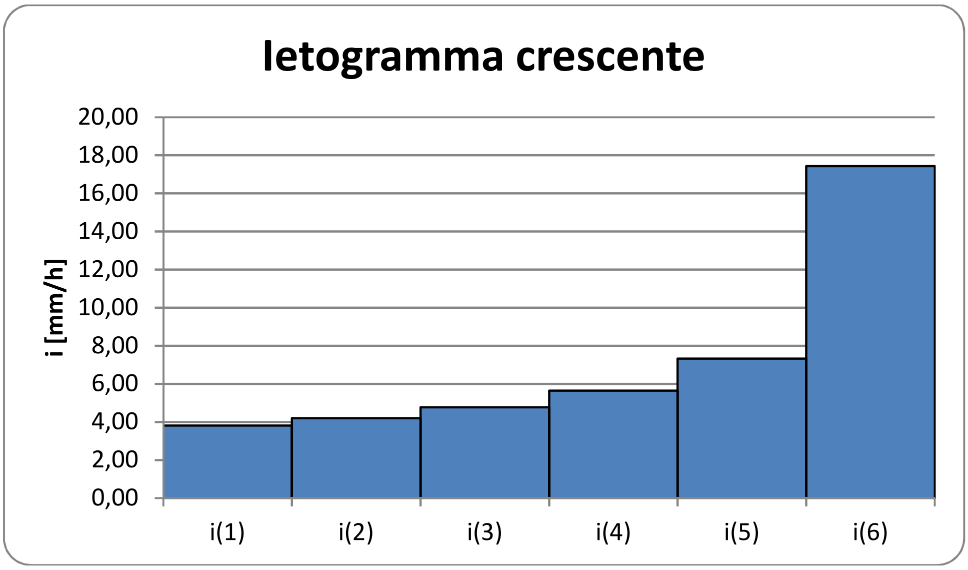


Figura 4.2.2: ietogramma crescente

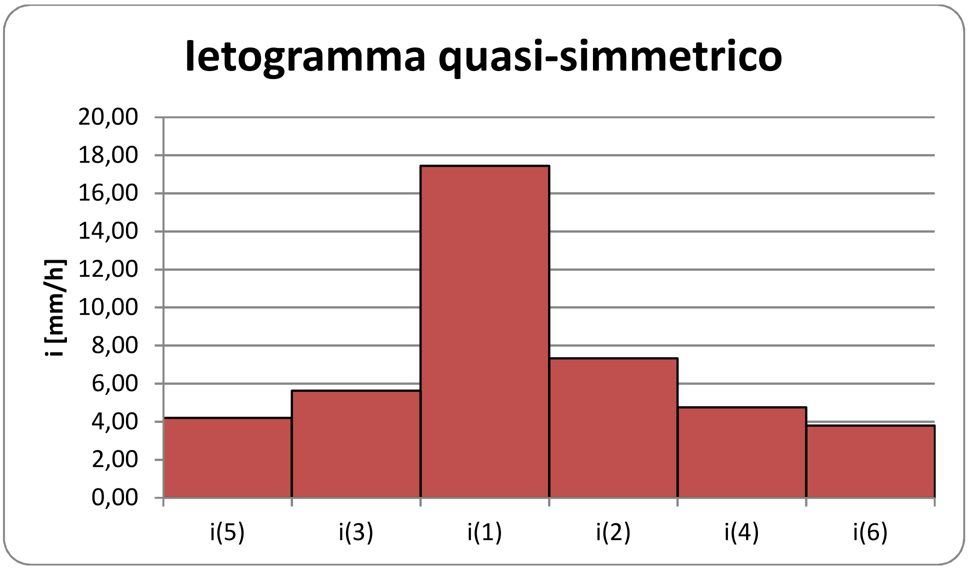


Figura 4.2.3: ietogramma Chicago

4.3. Pluviogramma netto: metodo ψ

Il metodo ψ (o metodo percentuale o del coefficiente di afflusso) è il metodo principe della taratura; l'altezza (e/o intensità) di pioggia netta è valutata come percentuale dell'altezza (e/o intensità) totale di pioggia.

Immaginando di dover effettuare la stessa valutazione indiretta di Q_T in un sottobacino di quello per il quale si hanno i dati, si procede alla taratura di ψ sul bacino chiuso a San Martino, ricercando quel valore che consente di ottenere un idrogramma (calcolato con il metodo della corrivazione) che abbia portata al colmo uguale alla media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili per il Chisone a san Martino.

Si tari il coefficiente ψ nei tre casi corrispondenti alle diverse forme di pluviogramma lordo.

A livello pratico, il procedimento da svolgere è il seguente:
- si definiscono tre matrici di convoluzione per il metodo della corrivazione (vedere paragrafo 4.1), una per ogni forma di ietogramma lordo descritto nel paragrafo 4.2;
- nelle suddette matrici si applica un coefficiente ψ < 1 alle intensità;
- si modifica manualmente il coefficiente ψ in ogni matrice fin quando il valore di picco delle portate Q non converge alla media della serie di valori osservati, pari a 267,61 m^3/s.

Si riportano nelle successive tabelle le matrici di convoluzione utilizzate al fine del calcolo, avendo inserito come intensità quelle già moltiplicate per il coefficiente ψ.

Tabella 4.3.1: matrice di convoluzione, caso ietogramma decrescente

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ψ **0,211**	i_1 **3,679**	i_2 **1,546**	i_3 **1,190**	i_4 **1,005**	i_5 **0,887**	i_6 **0,803**					
U_1 **0,102**	0,377	0,158	0,122	0,103	0,091	0,082					
U_2 **0,187**		0,688	0,289	0,223	0,188	0,166	0,150				
U_3 **0,239**			0,879	0,369	0,284	0,240	0,212	0,192			
U_4 **0,257**				0,946	0,397	0,306	0,258	0,228	0,206		
U_5 **0,190**					0,701	0,294	0,227	0,191	0,169	0,153	
U_6 **0,024**						0,088	0,037	0,028	0,024	0,021	0,019
Somme	0,377	0,847	1,290	1,641	1,662	1,177	0,884	0,640	0,399	0,174	0,019
q_k	0,105	0,235	0,358	0,456	0,462	0,327	0,246	0,178	0,111	0,048	0,005
Q	60,81	136,57	208,06	264,65	267,94	189,74	142,58	103,16	64,40	28,07	3,09

Tabella 4.3.2: matrice di convoluzione, caso ietogramma crescente

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ψ **0,222**	i_1 **0,845**	i_2 **0,933**	i_3 **1,058**	i_4 **1,252**	i_5 **1,626**	i_6 **3,871**					
U_1 **0,102**	0,087	0,096	0,108	0,128	0,167	0,397					
U_2 **0,187**		0,158	0,175	0,198	0,234	0,304	0,724				
U_3 **0,239**			0,202	0,223	0,253	0,299	0,389	0,925			
U_4 **0,257**				0,217	0,240	0,272	0,322	0,418	0,995		
U_5 **0,190**					0,161	0,178	0,201	0,238	0,310	0,737	
U_6 **0,024**						0,020	0,022	0,025	0,030	0,039	0,092
Somme	0,087	0,254	0,485	0,766	1,054	1,470	1,659	1,607	1,335	0,776	0,092
q_k	0,024	0,070	0,135	0,213	0,293	0,408	0,461	0,446	0,371	0,216	0,026
Q	13,96	40,91	78,18	123,58	170,04	237,06	267,46	259,11	215,30	125,16	14,90

Tabella 4.3.3: matrice di convoluzione, caso ietogramma quasi - simmetrico

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ψ **0,191**	i_1 **0,803**	i_2 **1,077**	i_3 **3,331**	i_4 **1,399**	i_5 **0,910**	i_6 **0,727**					
U_1 **0,102**	0,082	0,110	0,341	0,143	0,093	0,074					
U_2 **0,187**		0,150	0,202	0,623	0,262	0,170	0,136				
U_3 **0,239**			0,192	0,257	0,796	0,334	0,217	0,174			
U_4 **0,257**				0,206	0,277	0,856	0,360	0,234	0,187		
U_5 **0,190**					0,153	0,205	0,634	0,266	0,173	0,138	
U_6 **0,024**						0,019	0,026	0,080	0,033	0,022	0,017
Somme	0,082	0,261	0,735	1,230	1,581	1,660	1,373	0,754	0,394	0,160	0,017
q_k	0,023	0,072	0,204	0,342	0,439	0,461	0,381	0,209	0,109	0,044	0,005
Q	13,27	42,03	118,48	198,42	254,90	267,66	221,45	121,53	63,47	25,82	2,80

Si confrontino i tre valori di ψ ottenuti con quello ricavato usando la formula razionale

$$Q_T = \psi \cdot i_{d,T} \cdot \frac{A}{3,6}$$

nella quale l'evento è rettangolare e l'intensità media di precipitazione è determinata per $d = t_c$ ($i = a \cdot t_c^{n-1} = 7{,}20$ mm/h).

$$\psi = \frac{Q_T}{i_{d,T} \cdot \frac{A}{3,6}} = \frac{267,61}{7,20 \cdot \frac{580,53}{3,6}} = 0,23$$

Tabella 4.3.4: indice ψ

	ψ
i decrescente	0,211
i crescente	0,222
i quasi - simmetrico	0,191
medio	0,208
Formula razionale	0,230

Si realizzano quindi gli ietogrammi per i tre diversi casi (decrescente, crescente e quasi – simmetrico), riportando i valori delle intensità di pioggia parziali lorde e nette (calcolata come $\psi \cdot i$). I valori sono riportati nelle precedenti tabelle di questa esercitazione.

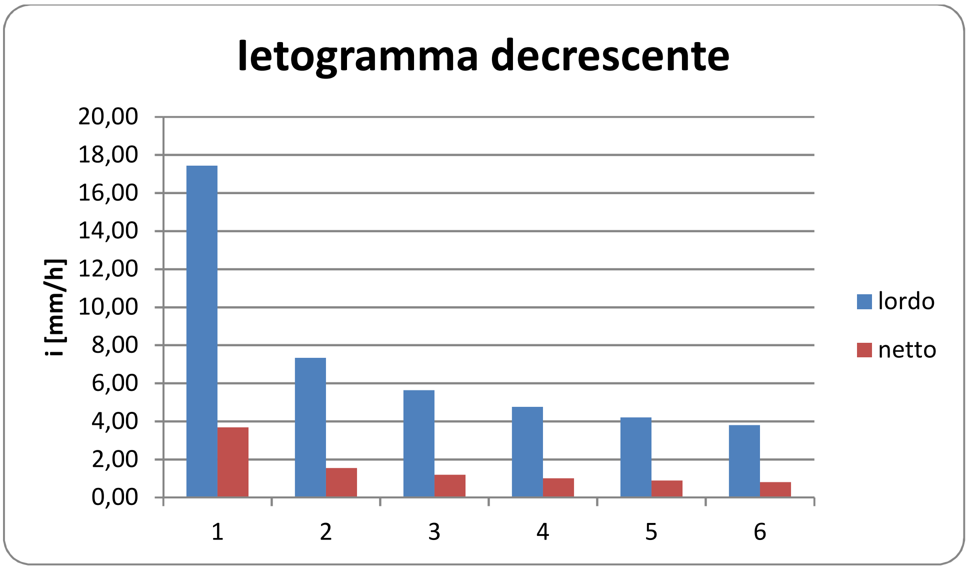


Figura 4.3.1: metodo ψ, ietogramma lordo e netto, caso decrescente

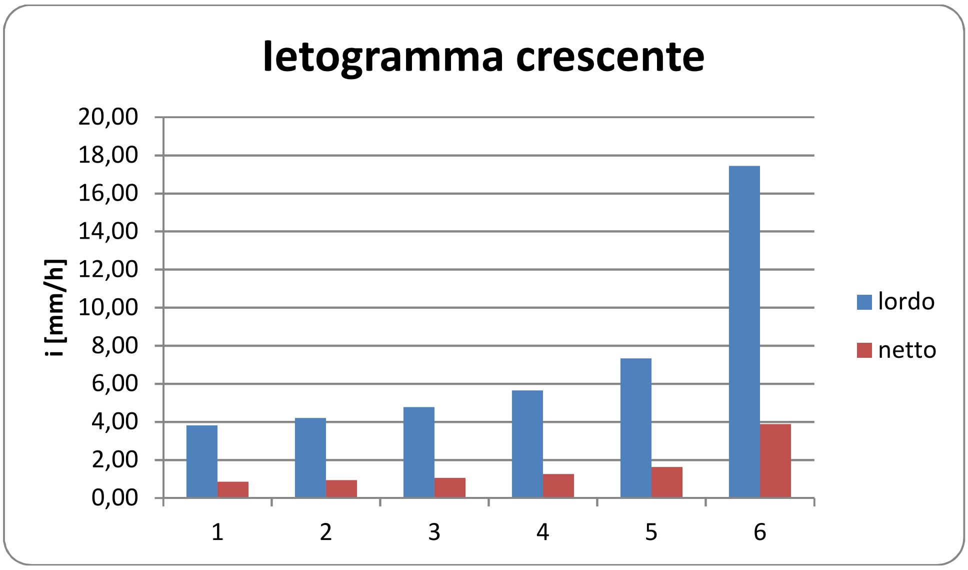


Figura 4.3.2: metodo ψ, ietogramma lordo e netto, caso crescente

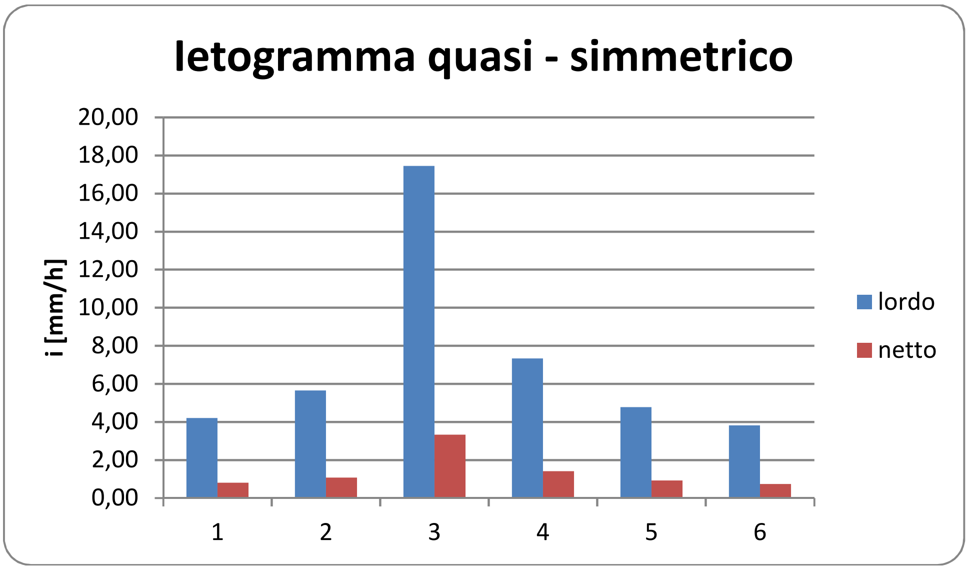


Figura 4.3.3: metodo ψ, ietogramma lordo e netto, caso quasi – simmetrico

4.4. Pluviogramma netto: metodo SCS – CN

Il metodo si basa sulla determinazione di CN (curve number), che assume valori compresi tra 0 e 100, che corrisponde al valore di un suolo perfettamente impermeabile, con trasformazione totale della precipitazione in deflusso superficiale: infatti ora sarà necessario tener conto anche dell'assorbimento del terreno.
Questa rappresentazione è svolta in riferimento ai volumi di acqua, quindi le grandezze coinvolte saranno tutte espresse in mm.

Si procede prima alla determinazione del pluviogramma netto, assumendo di considerare l'assorbimento iniziale (o intercettazione) $I_a = 0{,}2S$, con S = volume specifico di saturazione.
Si parte quindi con un valor medio spaziale di CN proposto nel già più volte citato Atlante dei Bacini ($CN = 64{,}8$).

Si segue la seguente procedura:

- si ha

$$S = S_0\left(\frac{100}{CN} - 1\right)$$

dove $S_0 = 254;$
$CN = 64{,}8;$

Si calcola $I_a = 0{,}2 \cdot S = 0{,}2 \cdot 137{,}98 = 27{,}60\ mm$

- si considera la precipitazione totale P pari alle altezze di pioggia già considerate (pluviogramma lordo, nei tre casi considerati) e si calcola la pioggia netta PN come

$$PN = \frac{(P - I_a)^2}{(P - I_a + S)}$$

- a tal scopo è necessario prima verificare che $P - I_a > 0$; in caso contrario si considera $PN = 0$ (si utilizza la funzione "*SE*" di Excel);

- calcolati i valori delle altezze di pioggia, lorde e nette, si possono calcolare e diagrammare i valori dello ietogramma lordo e netto, con la formula:

$$i_j = \frac{h_{j+1} - h_j}{d_{j+1} - d_j}$$

Si riportano i risultati finali del procedimento sopra descritto nelle successive tabelle (*Tabella 4.4.1* e *Tabella 4.4.2*), in cui si divide lo studio in valori lordi e valori netti.

Tabella 4.4.1: metodo SCS - CN, pluviogramma e ietogramma lordi

		Pluviogramma lordo			**Ietogramma lordo**		
		Decrescente	*Crescente*	*Simmetrico*	*Decrescente*	*Crescente*	*Simmetrico*
t [h]	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	17,44	17,44	3,80	4,20	17,44	3,80	4,20
2,00	24,76	24,76	8,01	9,84	7,33	4,20	5,64
3,00	30,40	30,40	12,77	27,28	5,64	4,76	17,44
4,00	35,17	35,17	18,41	34,61	4,76	5,64	7,33
5,00	39,37	39,37	25,74	39,37	4,20	7,33	4,76
6,00	43,18	43,18	43,18	43,18	3,80	17,44	3,80

Tabella 4.4.2: metodo SCS -CN, pluviogramma e ietogramma netto

		Pluviogramma netto			**Ietogramma netto**		
		Decrescente	*Crescente*	*Simmetrico*	*Decrescente*	*Crescente*	*Simmetrico*
t [h]	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	17,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2,00	24,76	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3,00	30,40	0,06	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00
4,00	35,17	0,39	0,00	0,34	0,34	0,00	0,34
5,00	39,37	0,93	0,00	0,93	0,53	0,00	0,59
6,00	43,18	1,58	1,58	1,58	0,65	1,58	0,65

A titolo rappresentativo, si riportano gli ietogrammi loridi e netti nei tre diversi casi analizzati (*Figura 4.4.1*, *Figura 4.4.2* e *Figura 4.4.3*).

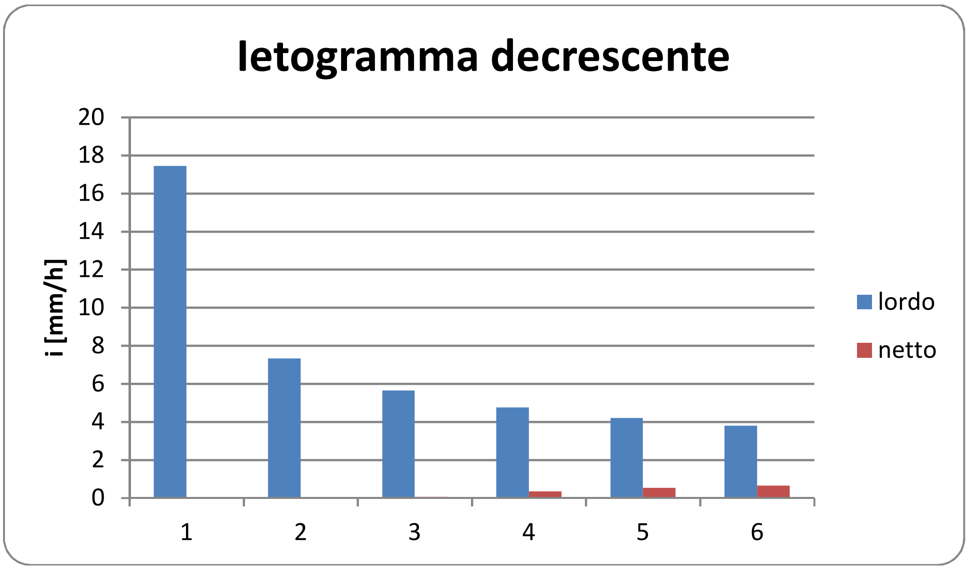


Figura 4.4.1: metodo SCS - CN, ietogramma lordo e netto, caso decrescente

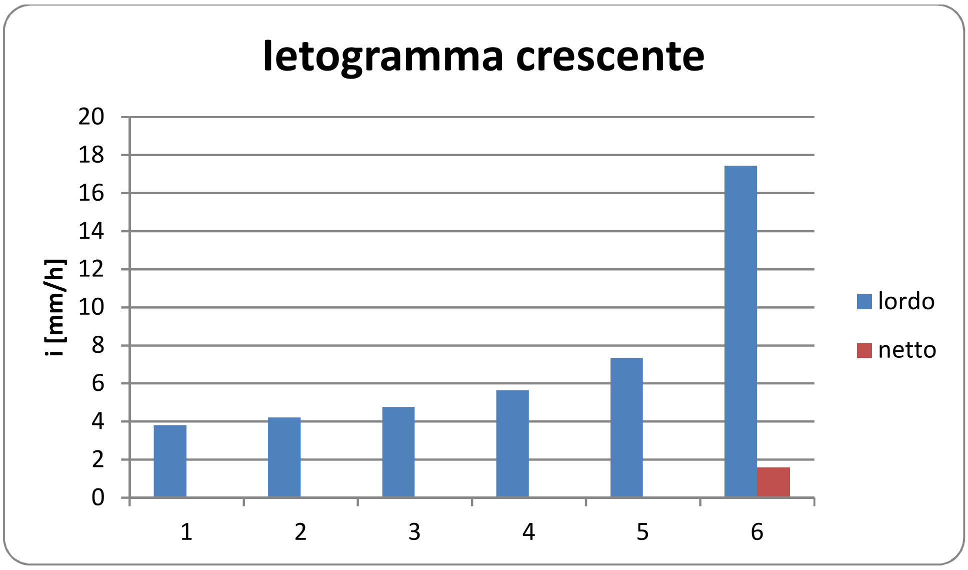


Figura 4.4.2: metodo SCS - CN, ietogramma lordo e netto, caso crescente

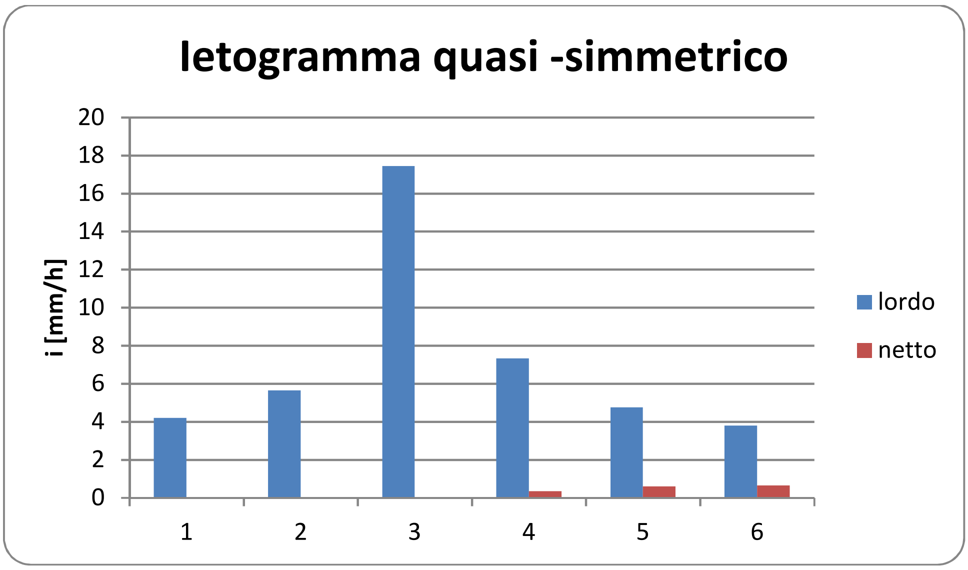


Figura 4.4.3: metodo SCS - CN, ietogramma lordo e netto, caso quasi - simmetrico

Si procede alla taratura di CN sul bacino chiuso a San Martino, ricercando, per il solo ietogramma con picco centrale e con $K(T) = 1$, il valore di CN che consente di ottenere dal metodo della corrivazione una portata al colmo uguale alla media dei massimi osservati.
Il valore ottenuto sarà usato successivamente su qualunque forma di ietogramma.

Si considera quindi la matrice di convoluzione, inserendo le intensità come funzione delle espressioni che descrivono la relazione tra CN, I_a e S. Come accaduto per il metodo ψ, si procede modificando manualmente il valore del Curve Number, finché non si giunge alla convergenza delle suddette portate.

Si riporta di seguito il risultato finale.

Tabella 4.4.3: taratura CN

$\boldsymbol{CN}$	76,9
$\boldsymbol{S}$	76,30
$\boldsymbol{I_a}$	15,26

Tabella 4.4.4: matrice di convoluzione, taratura CN

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\boldsymbol{CN}$ **76,9**	$\boldsymbol{i_1}$ **0,0**	$\boldsymbol{i_2}$ **0,0**	$\boldsymbol{i_3}$ **1,636**	$\boldsymbol{i_4}$ **2,277**	$\boldsymbol{i_5}$ **1,876**	$\boldsymbol{i_6}$ **1,688**					
$\boldsymbol{U_1}$ **0,102**	0,000	0,000	0,168	0,233	0,192	0,173					
$\boldsymbol{U_2}$ **0,187**		0,000	0,000	0,306	0,426	0,351	0,316				
$\boldsymbol{U_3}$ **0,239**			0,000	0,000	0,391	0,544	0,448	0,403			
$\boldsymbol{U_4}$ **0,257**				0,000	0,000	0,421	0,586	0,482	0,434		
$\boldsymbol{U_5}$ **0,190**					0,000	0,000	0,312	0,434	0,357	0,322	
$\boldsymbol{U_6}$ **0,024**						0,000	0,000	0,039	0,054	0,045	0,040
Somme	0,000	0,000	0,168	0,540	1,009	1,489	1,661	1,359	0,846	0,366	0,040
$\boldsymbol{q_k}$	0,000	0,000	0,047	0,150	0,280	0,414	0,461	0,377	0,235	0,102	0,011
$\boldsymbol{Q}$	0,00	0,00	27,04	87,01	162,76	240,10	267,91	219,08	136,40	59,07	6,50

Tarato il CN, è possibile calcolare il pluviogramma e ietogramma netto come fatto in precedenza.

Tabella 4.4.5: pluviogramma e ietogramma con CN tarato

		Pluviogramma lordo	**Ietogramma lordo**	**Pluviogramma netto**	**Ietogramma netto**
t [h]	**h [mm]**	**h [mm]**	**i [mm/h]**	**h [mm]**	**i [mm/h]**
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	17,44	4,20	4,20	0,00	0,00
2,00	24,76	9,84	5,64	0,00	0,00
3,00	30,40	27,28	17,44	1,64	1,64
4,00	35,17	34,61	7,33	3,91	2,28
5,00	39,37	39,37	4,76	5,79	1,88
6,00	43,18	43,18	3,80	7,48	1,69

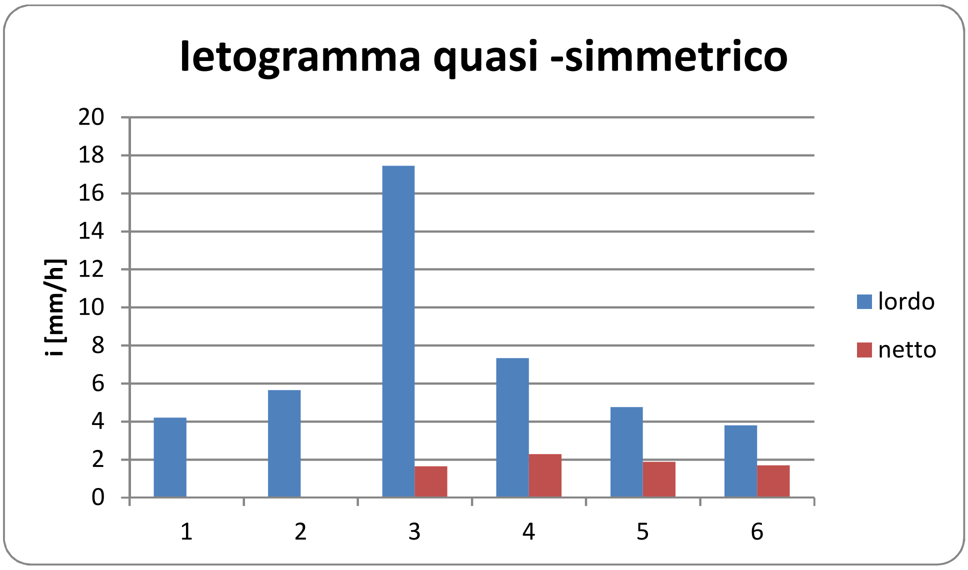


Figura 4.4.4: ietogramma lordo e netto, con CN tarato

4.5. Stima di piene di progetto

Una volta tarati i metodi di assorbimento si può usare il metodo cinematico per la stima del valore della portata di progetto, per il quale va ricostruito il valore $K(T = 100)$. Sull'Atlante dei Bacini sono riportati i valori medi areali degli L-Coefficienti *LCV* ed *LCA* delle precipitazioni per le varie durate disponibili. Ricordando che L_1 corrisponde al valor medio, si utilizzi in questo caso la funzione GEV per determinare $K(T)$.

È possibile individuare il valore di $K(T = 100)$, tramite la seguente espressione:

$$K(T) = \varepsilon + \frac{\alpha}{\theta_3} \cdot \left[1 - e^{-\theta_3 \cdot \left(ln\left(ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right)}\right]$$

individuati i valori *LCV* e *LCA* sull'Atlante e trovati i valori dei parametri della GEV (come fatto nell'*Esercitazione 2*).

Si rappresentano nelle successive tabelle i diversi passaggi del procedimento.

Tabella 4.5.1: determinazione parametri GEV (I)

d [h]	1	3	6	12	24
$h_{d,medio}$ **[mm]**	17,4	30,4	43,2	61,3	87,1
$\tau = LCV$	0,182	0,164	0,17	0,195	0,219
$\tau_3 = LCA$	0,187	0,088	0,134	0,191	0,24
c	0,00	0,02	0,01	0,00	-0,01
λ_1	17,4	30,4	43,2	61,3	87,1
λ_2	3,17	4,99	7,34	11,96	19,07
λ_3	0,59	0,44	0,98	2,28	4,58
θ_1	14,71	26,71	37,37	51,09	69,96
θ_2	4,47	8,02	11,144	16,74	24,67
θ_3	-0,03	0,13	0,06	-0,03	-0,11

Tabella 4.5.2: determinazione parametri GEV (II)

d [h]	1	3	6	12	24	**Valori medi**
$\boldsymbol{\varepsilon}$	0,84	0,88	0,87	0,83	0,80	0,845
$\boldsymbol{\alpha}$	0,26	0,26	0,26	0,27	0,28	0,267
$\boldsymbol{\theta_3}$	-0,03	0,13	0,06	-0,03	-0,11	0,005

Si ottiene un $K(T = 100) = 2{,}06$.

Una volta valutato il $K(T)$, è possibile andare a stimare le piene di progetto, con il metodo ψ e il metodo $SCS - CN$.

Stima della portata con il metodo ψ

Calcolata l'altezza di pioggia media tramite l'espressione $h_{d,medio} = \alpha \cdot d^n$, si moltiplica il valore ottenuto per il $K(T = 100)$ in modo da ottenere l'altezza di pioggia di progetto media con un tempo di ritorno di 100 anni.

$$h_{d,100} = h_{d,medio} \cdot K(T)$$

Individuate le intensità di pioggia lorda, si passa alle intensità di pioggia netta moltiplicando per il valore di ψ medio ($\psi = 0{,}21$) individuato nella taratura:

$$i_{d,100,netta} = i_{d,100} \cdot \psi$$

Si riportano di seguito i valori ottenuti e i relativi grafici degli ietogrammi lordo e netto.

Tabella 4.5.3: ietogrammi di progetto, metodo ψ

			Ietogramma lordo			**Ietogramma netto**		
			Decrescente	*Crescente*	*Simmetrico*	*Decrescente*	*Crescente*	*Simmetrico*
t [h]	$\boldsymbol{\overline{h_d}}$ **[mm]**	$\boldsymbol{h_{d,100}}$ **[mm]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**
1	17,44	35,92	35,92	7,84	8,66	7,54	1,65	1,82
2	24,76	51,01	15,09	8,66	11,62	3,17	1,82	2,44
3	30,40	62,63	11,62	9,81	35,92	2,44	2,06	7,54
4	35,17	72,44	9,81	11,62	15,09	2,06	2,44	3,17
5	39,37	81,10	8,66	15,09	9,81	1,82	3,17	2,06
6	43,18	88,94	7,84	35,92	7,84	1,65	7,54	1,65

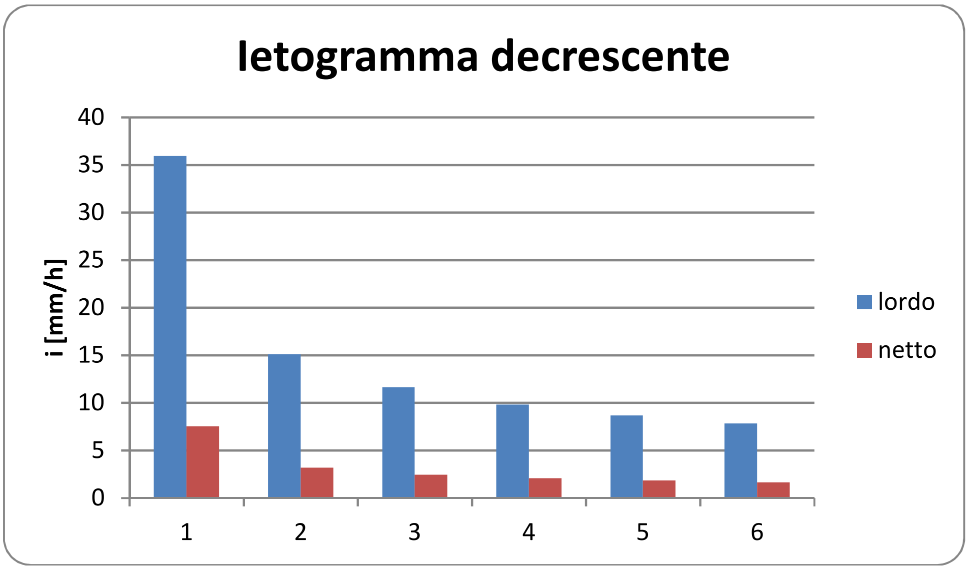


Figura 4.5.1: ietogrammi di progetto, metodo ψ, caso decrescente

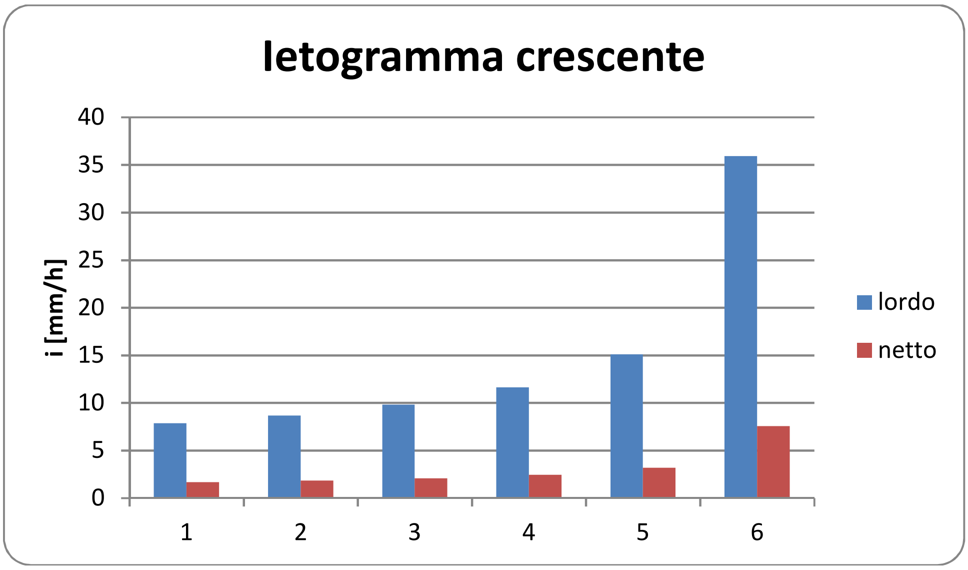


Figura 4.5.2: ietogrammi di progetto, metodo ψ, caso crescente

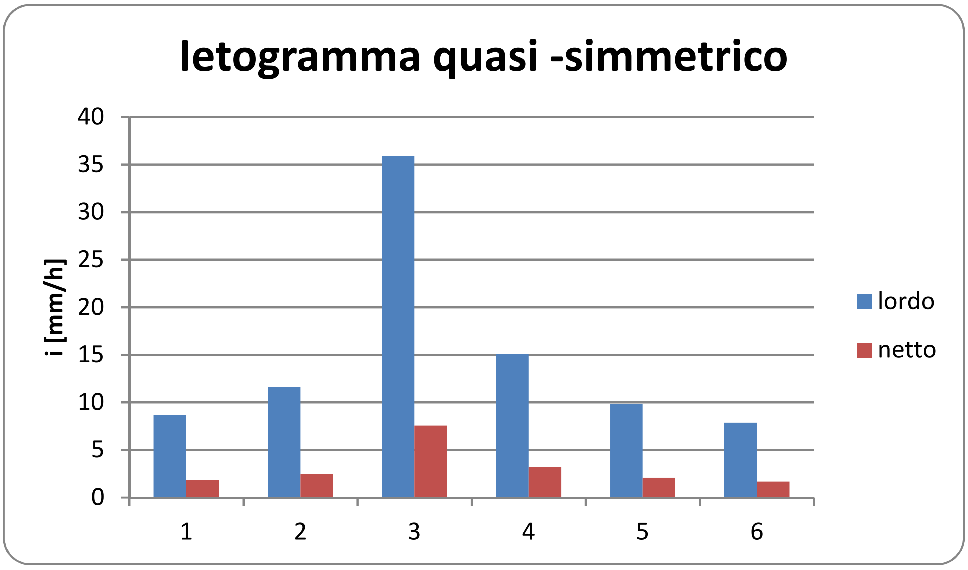


Figura 4.5.3: ietogrammi di progetto, metodo ψ, caso quasi - simmetrico

Noti gli ietogrammi netti, si procede alla stima della portata tramite la costruzione dei tre idrogrammi di piena con il metodo della corrivazione.

Tabella 4.5.4: matrice di convoluzione, metodo ψ, caso decrescente

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **7,54**	i_2 **3,17**	i_3 **2,44**	i_4 **2,06**	i_5 **1,82**	i_6 **1,65**					
U_1 **0,102**	0,773	0,325	0,250	0,211	0,186	0,169					
U_2 **0,187**		1,412	0,593	0,456	0,386	0,340	0,308				
U_3 **0,239**			1,802	0,757	0,583	0,492	0,434	0,393			
U_4 **0,257**				1,940	0,815	0,627	0,530	0,468	0,423		
U_5 **0,190**					1,437	0,604	0,465	0,393	0,346	0,314	
U_6 **0,024**						0,180	0,076	0,058	0,049	0,043	0,039
Somme	0,773	1,736	2,645	3,365	3,407	2,412	1,813	1,312	0,819	0,357	0,039
q_k	0,215	0,482	0,735	0,935	0,946	0,670	0,504	0,364	0,227	0,099	0,011
Q	124,68	280,00	426,58	542,59	549,34	389,02	292,32	211,51	132,04	57,56	6,34

Tabella 4.5.5: matrice di convoluzione, metodo ψ, caso crescente

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **1,65**	i_2 **1,82**	i_3 **2,06**	i_4 **2,44**	i_5 **3,17**	i_6 **7,54**					
U_1 **0,102**	0,169	0,186	0,211	0,250	0,325	0,773					
U_2 **0,187**		0,308	0,340	0,386	0,456	0,593	1,412				
U_3 **0,239**			0,393	0,434	0,492	0,583	0,757	1,802			
U_4 **0,257**				0,423	0,468	0,530	0,627	0,815	1,940		
U_5 **0,190**					0,314	0,346	0,393	0,465	0,604	1,437	
U_6 **0,024**						0,039	0,043	0,049	0,058	0,076	0,180
Somme	0,169	0,494	0,945	1,493	2,055	2,865	3,232	3,131	2,602	1,512	0,180
q_k	0,047	0,137	0,262	0,415	0,571	0,796	0,898	0,870	0,723	0,420	0,050
Q	27,21	79,72	152,35	240,82	331,35	461,95	521,18	504,91	419,54	243,89	29,04

Tabella 4.5.6: matrice di convoluzione, metodo ψ, caso quasi - simmetrico

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$\boldsymbol{i_1}$ **1,82**	$\boldsymbol{i_2}$ **2,44**	$\boldsymbol{i_3}$ **7,54**	$\boldsymbol{i_4}$ **3,17**	$\boldsymbol{i_5}$ **2,06**	$\boldsymbol{i_6}$ **1,65**					
$\boldsymbol{U_1}$ **0,102**	0,186	0,250	0,773	0,325	0,211	0,169					
$\boldsymbol{U_2}$ **0,187**		0,340	0,456	1,412	0,593	0,386	0,308				
$\boldsymbol{U_3}$ **0,239**			0,434	0,583	1,802	0,757	0,492	0,393			
$\boldsymbol{U_4}$ **0,257**				0,468	0,627	1,940	0,815	0,530	0,423		
$\boldsymbol{U_5}$ **0,190**					0,346	0,465	1,437	0,604	0,393	0,314	
$\boldsymbol{U_6}$ **0,024**						0,043	0,058	0,180	0,076	0,049	0,039
Somme	0,186	0,590	1,664	2,787	3,580	3,759	3,110	1,707	0,891	0,363	0,039
$\boldsymbol{q_k}$	0,052	0,164	0,462	0,774	0,994	1,044	0,864	0,474	0,248	0,101	0,011
$\boldsymbol{Q}$	30,06	95,19	268,35	449,40	577,33	606,23	501,57	275,25	143,75	58,49	6,34

Stima della portata con il metodo $\mathbf{SCS - CN}$

Calcolata l'altezza di pioggia media tramite l'espressione $h_{d,medio} = \alpha \cdot d^n$, si moltiplica il valore ottenuto per il $K(T = 100)$ in modo da ottenere l'altezza di pioggia di progetto media con un tempo di ritorno di 100 anni.

$$h_{d,100} = h_{d,medio} \cdot K(T)$$

Individuate le intensità di pioggia lorda, si passa alle intensità di pioggia netta con il metodo SCS-CN, utilizzando il CN tarato in precedenza, pari a 76,9.

Si riportano di seguito i valori ottenuti e i ralativi grafici degli ietogrammi lordo e netto.

Tabella 4.5.7: pluviogramma e ietogrammi lordi, metodo SCS - CN

		Pluviogramma lordo			**Ietogramma lordo**		
		Decrescente	*Crescente*	*Simmetrico*	*Decrescente*	*Crescente*	*Simmetrico*
t [h]	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	35,92	35,92	7,84	8,66	35,92	7,84	8,66
2,00	51,01	51,01	16,50	20,28	15,09	8,66	11,62
3,00	62,63	62,63	26,31	56,20	11,62	9,81	35,92
4,00	72,44	72,44	37,93	71,29	9,81	11,62	15,09
5,00	81,10	81,10	53,02	81,10	8,66	15,09	9,81
6,00	88,94	88,94	88,94	88,94	7,84	35,92	7,84

Tabella 4.5.8: pluviogramma e ietogrammi netti, metodo SCS - CN

		Pluviogramma netto			Ietogramma netto		
		Decrescente	*Crescente*	*Simmetrico*	*Decrescente*	*Crescente*	*Simmetrico*
t [h]	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**h [mm]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**	**i [mm/h]**
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	35,92	4,40	0,00	0,00	4,40	0,00	0,00
2,00	51,01	11,41	0,02	0,31	7,01	0,02	0,31
3,00	62,63	18,15	1,40	14,30	6,74	1,38	13,99
4,00	72,44	24,50	5,19	23,72	6,35	3,79	9,43
5,00	81,10	30,50	12,50	30,50	6,00	7,31	6,78
6,00	88,94	36,20	36,20	36,20	5,70	23,70	5,70

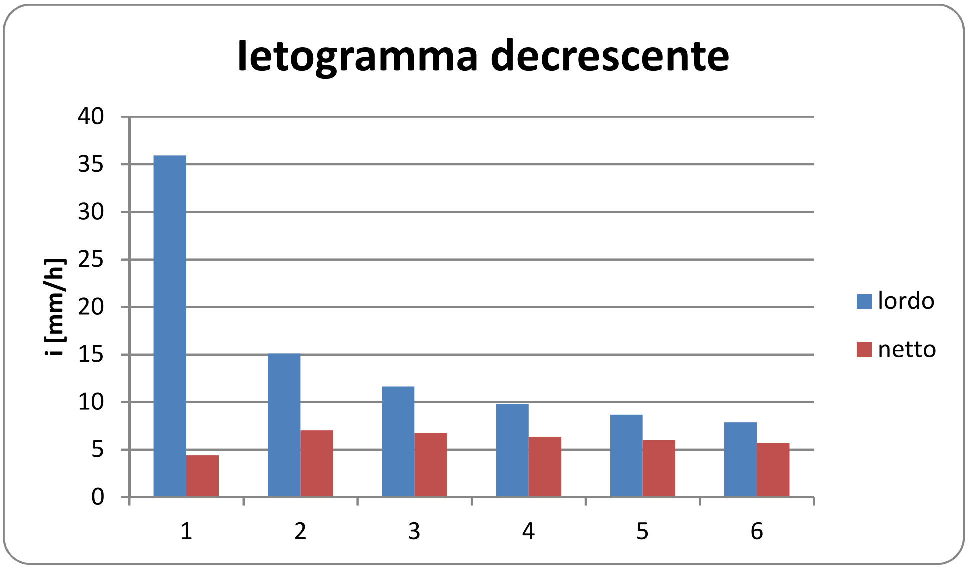


Figura 4.5.4: ietogrammi di progetto, metodo SCS - CN, caso decrescente

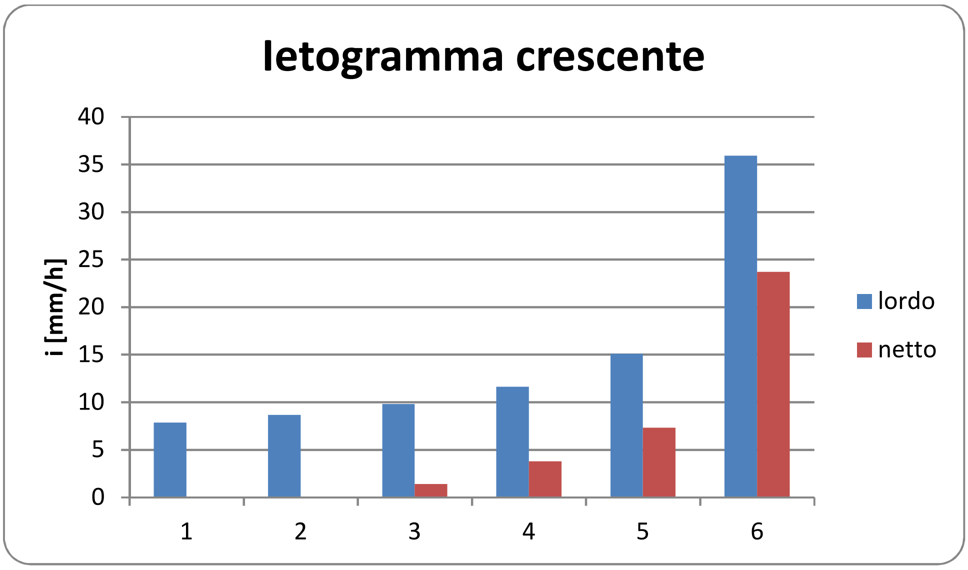


Figura 4.5.5: : ietogrammi di progetto, metodo SCS - CN, caso crescente

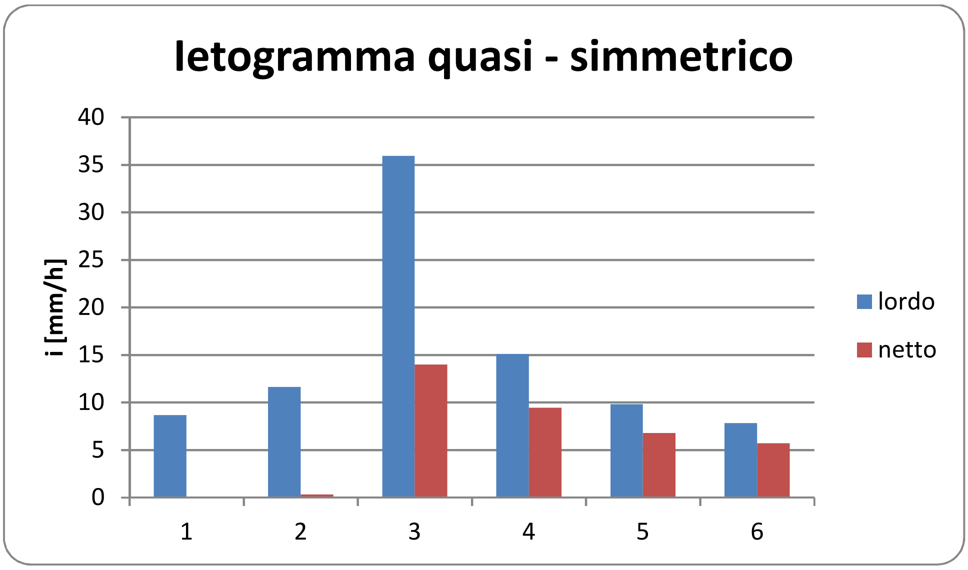


Figura 4.5.6: : ietogrammi di progetto, metodo SCS - CN, caso quasi - simmetrico

Noti gli ietogrammi netti, si procede alla stima della portata tramite la costruzione dei tre idrogrammi di piena con il metodo della corrivazione.

Tabella 4.5.9: matrice di convoluzione, metodo SCS – CN, caso decrescente

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **4,40**	i_2 **7,01**	i_3 **6,74**	i_4 **6,35**	i_5 **6,00**	i_6 **5,70**					
U_1 **0,102**	0,451	0,718	0,690	0,651	0,615	0,584					
U_2 **0,187**		0,824	1,311	1,261	1,189	1,123	1,066				
U_3 **0,239**			1,052	1,674	1,609	1,518	1,434	1,361			
U_4 **0,257**				1,132	1,801	1,732	1,634	1,544	1,465		
U_5 **0,190**					0,839	1,334	1,283	1,210	1,143	1,085	
U_6 **0,024**						0,105	0,167	0,161	0,152	0,143	0,136
Somme	0,451	1,542	3,053	4,718	6,053	6,397	5,584	4,276	2,760	1,229	0,136
q_k	0,125	0,428	0,848	1,310	1,682	1,777	1,551	1,188	0,767	0,341	0,038
Q	72,78	248,64	492,36	760,75	976,17	1031,51	900,50	689,48	445,09	198,11	21,94

Tabella 4.5.10: matrice di convoluzione, metodo SCS – CN, caso crescente

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **0,00**	i_2 **0,02**	i_3 **1,38**	i_4 **3,79**	i_5 **7,31**	i_6 **23,70**					
U_1 **0,102**	0,000	0,002	0,141	0,389	0,749	2,429					
U_2 **0,187**		0,000	0,004	0,258	0,710	1,368	4,434				
U_3 **0,239**			0,000	0,005	0,329	0,906	1,746	5,662			
U_4 **0,257**				0,000	0,005	0,354	0,976	1,879	6,094		
U_5 **0,190**					0,000	0,004	0,263	0,723	1,392	4,513	
U_6 **0,024**						0,000	0,000	0,033	0,091	0,174	0,566
Somme	0,000	0,002	0,145	0,652	1,793	5,061	7,419	8,296	7,576	4,688	0,566
q_k	0,000	0,001	0,040	0,181	0,498	1,406	2,061	2,305	2,105	1,302	0,157
Q	0,00	0,33	23,38	105,07	289,21	816,14	1196,37	1337,88	1221,74	755,97	91,23

Tabella 4.5.11: matrice di convoluzione, metodo SCS – CN, caso quasi - simmetrico

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **0,00**	i_2 **0,31**	i_3 **13,99**	i_4 **9,43**	i_5 **6,78**	i_6 **5,70**					
U_1 **0,102**	0,000	0,032	1,433	0,966	0,695	0,584					
U_2 **0,187**		0,000	0,058	2,617	1,764	1,268	1,066				
U_3 **0,239**			0,000	0,074	3,341	2,253	1,619	1,361			
U_4 **0,257**				0,000	0,080	3,597	2,424	1,743	1,465		
U_5 **0,190**					0,000	0,059	2,664	1,796	1,291	1,085	
U_6 **0,024**						0,000	0,007	0,334	0,225	0,162	0,136
Somme	0,000	0,032	1,491	3,657	5,880	7,760	7,781	5,233	2,981	1,247	0,136
q_k	0,000	0,009	0,414	1,016	1,633	2,156	2,161	1,454	0,828	0,346	0,038
Q	0,00	5,12	240,50	589,78	948,17	1251,36	1254,72	843,94	480,70	201,09	21,94

Ricordando che:

$$Q_{media} = 267{,}61\ m^3/s$$

$$K(T) = \frac{Q_{100}}{Q_{media}}$$

si procede al controllo dei rispettivi valori $K(T)$ ottenuti sulle portate di picco (come riportato dalla formula sopra descritta) e si confrontano con il coefficiente di crescita corrispondente ottenuto dall'analisi di frequenza delle piene (vedere *Esercitazione 2*).

Metodo	Andamento	Portata [m^3/s]	$K(T = 100)$
ψ	Decrescente	549,338	2,05
	Crescente	521,182	1,95
	Simmetrico	606,231	2,27
$SCS - CN$	Decrescente	1031,510	3,85
	Crescente	1337,876	5,00
	Simmetrico	1254,722	4,69
GEV			2,06

4.6. Criterio variazionale per la stima indiretta della piena indice

Nell'ambito di applicazione del metodo dell'evento critico per il progetto idrologico *Alfieri et al. (2008)*, è stato dimostrato che, tra le varie forme di ietogramma più efficienti, si distingue per efficacia e semplicità lo ietogramma rettangolare, purché non vincolato ad avere una durata pari al tempo di corrivazione. La durata "critica" di pende dalla forma della funzione di risposta del bacino, ed è da ricavare attraverso prove successive, definendo così un metodo che viene chiamato "variazionale".

Una volta ricavata la durata critica, questa diventa una proprietà del bacino e può essere usata con riferimento ad una formulazione avanzata del metodo razionale, detta *formulazione geomorfoclimatica*.
Il metodo, come descritto nell'articolo, consiste nel calcolare le portate al picco derivanti da ietogrammi rettangolari di diverse durate. Affinché questi mantengano sempre la conformità con la curva di possibilità pluviometrica, il loro volume sarà sempre dato da $K_T a d^n$. La durata critica sarà quella per la quale si ottiene il picco massimo.

Si fa riferimento alla già nota curva IDF areale, calcolata all'inizio del paragrafo 4.2.

Tabella 4.6.1: IDF areale

d [h]	i [mm/h]
1	17,438
2	12,382
3	10,134
4	8,792
5	7,874
6	7,196

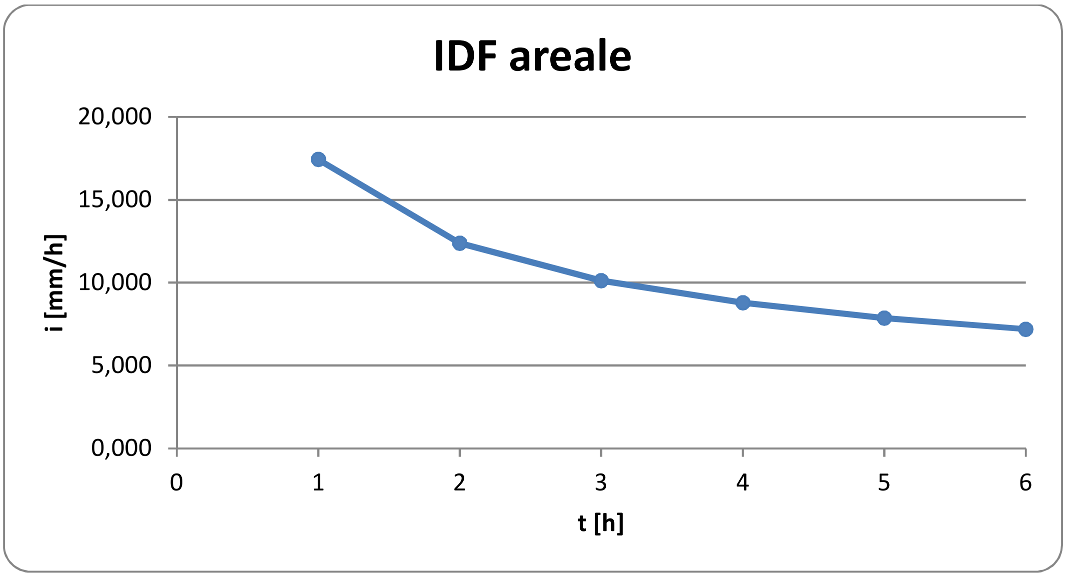


Figura 4.6.1: IDF areale

Si ricerca, tramite convoluzione, il valore più elevato del picco di piena che risulta dall’applicazione di ietogrammi ad intensità costante di durata variabile tra 1/6 e 6/6 del tempo di corrivazione, imposto pari a 6 ore. Si utilizzi la precipitazione media, cioè con K_T = 1.
Per il calcolo degli assorbimenti si procede utilizzando il metodo percentuale, con $\psi = 0{,}21$, calcolando gli ietogrammi netti per tutte le durate considerate, andando a moltiplicare le intensità della IDF per il coefficiente ψ già nelle matrici di convoluzione.

La durata di pioggia che produrrà il valore massimo di picco, come già detto, risulterà essere la durata critica per quel bacino.

Si riportano a mo’ di esempio, le prime due matrici di convoluzione, per:

- $i_1 = 17{,}438 \cdot 0{,}21 = 3{,}662$ mm/h;
- $i_2 = 12{,}382 \cdot 0{,}21 = 2{,}600$ mm/h.

Tabella 4.6.2: matrice di convoluzione, per i_1

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 3,662										
U_1 0,102	0,375	0	0	0	0	0					
U_2 0,187		0,685	0	0	0	0	0				
U_3 0,239			0,875	0	0	0	0	0			
U_4 0,257				0,942	0	0	0	0	0		
U_5 0,190					0,697	0	0	0	0	0	
U_6 0,024						0,087	0	0	0	0	0
Somme	0,375	0,685	0,875	0,942	0,697	0,087	0	0	0	0	0
q_k	0,104	0,190	0,243	0,262	0,194	0,024	0	0	0	0	0
Q	60,52	110,50	141,08	151,85	112,47	14,10	0	0	0	0	0

Tabella 4.6.3: matrice di convoluzione per i_2

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_2 2,600	**i_2 2,600**									
U_1 0,102	0,267	0,267	0	0	0	0					
U_2 0,187		0,487	0,487	0	0	0	0				
U_3 0,239			0,621	0,621	0	0	0	0			
U_4 0,257				0,669	0,669	0	0	0	0		
U_5 0,190					0,495	0,495	0	0	0	0	
U_6 0,024						0,062	0,062	0	0	0	0
Somme	0,267	0,753	1,108	1,290	1,164	0,557	0,062	0	0	0	0
q_k	0,074	0,209	0,308	0,358	0,323	0,155	0,017	0	0	0	0
Q	42,98	121,43	178,63	208,00	187,68	89,87	10,01	0	0	0	0

Si indicano nella *Tabella 4.6.4* le portate di picco ricavate dalle diverse matrici di convoluzione.

Tabella 4.6.4: portate di picco per le diverse matrici di convoluzione

	Q [m³/s]
i_1	151,85
i_2	208,00
i_3	235,61
i_4	260,11
i_5	260,29
i_6	243,69

Si calcola il massimo delle portate di picco, che risulta essere in corrispondenza del quinto valore: la durata critica sarà quindi pari a 5 ore.

Per verifica controllare che la pioggia di durata pari al tempo di corrivazione produca un valore di picco uguale a quello della formula razionale tradizionale.

$$Q_T = \psi \cdot i_{d,T} \cdot \frac{A}{3,6} = 0,21 \cdot 7,196 \cdot \frac{580,53}{3,6} = 243,69\ m^3/s = Q(i_6)$$

Si costruiscano poi analiticamente gli idrogrammi di piena ottenuti per gli stessi pluviogrammi netti usando l'IUH del metodo dell'invaso, con tempo di ritardo (parametro K) pari alla metà del tempo di corrivazione.

Avendo quindi:

$$K = \frac{t_c}{2} = 3$$

$$IUH = h(t) = \frac{1}{K} e^{-t/K}$$

Tabella 4.6.5: funzione di risposta IUH

d [h]	IUH = h(t)
1	0,239
2	0,171
3	0,123
4	0,088
5	0,063
6	0,045

L'idrogramma di piena può essere definito da due equazioni (vedere anche *Figura 4.6.2*):

- una è valida fino alla durata d corrispondente al tempo di pioggia (nel caso dell'intensità di pioggia i_1 sarà fino a $d = 1$, nel caso dell'intensità di pioggia i_2 sarà fino a $d = 2$, ecc…):

$$q(t) = p\left(1 - e^{-t/K}\right), \qquad con \quad p = i \cdot \psi$$

$$Q(t) = q(t)\frac{A}{3,6}$$

- l'altra è valida per il ramo di esaurimento della precipitazione (a livello pratico dal momento in cui smette di piovere):

$$q(t) = q_{max}e^{-\frac{1}{K}(t-T)}, \qquad con \quad T = durata\, della\, pioggia$$

$$Q(t) = q(t)\frac{A}{3,6}$$

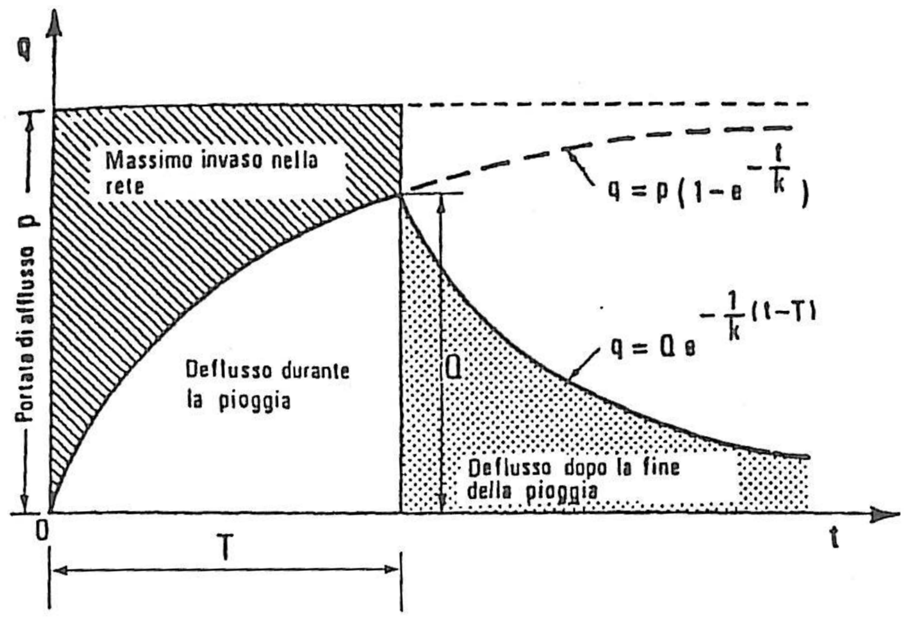


Figura 4.6.2: formule idrogramma di piena

Si riportano di seguito le tabelle con i valori delle portate specifiche q in mm/h e delle portate assolute Q in m^3/s (*Tabella 4.6.6* e *Tabella 4.6.7*) e i relativi ideogrammi di piena (*Figura 4.6.3* e *Figura 4.6.4*).

Tabella 4.6.6: idrogramma di piena, portate specifiche [mm/h]

t	i_1 **3,662**	i_2 **2,600**	i_3 **2,128**	i_4 **1,846**	i_5 **1,654**	i_6 **1,511**
0	0	0	0	0	0	0
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,744	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,533	0,907	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,382	0,650	0,964	0,000	0,000	0,000
5	0,274	0,465	0,691	0,974	0,000	0,000
6	0,196	0,334	0,495	0,698	0,961	0,000
7	0,140	0,239	0,355	0,500	0,689	0,936
8	0,101	0,171	0,254	0,358	0,493	0,671
9	0,072	0,123	0,182	0,257	0,354	0,481
10	0,052	0,088	0,130	0,184	0,253	0,344
11	0,037	0,063	0,093	0,132	0,182	0,247
12	0,027	0,045	0,067	0,094	0,130	0,177
13	0,019	0,032	0,048	0,068	0,093	0,127
14	0,014	0,023	0,034	0,049	0,067	0,091
15	0,010	0,017	0,025	0,035	0,048	0,065
16	0,007	0,012	0,018	0,025	0,034	0,047
17	0,005	0,009	0,013	0,018	0,025	0,033
18	0,004	0,006	0,009	0,013	0,018	0,024

Tabella 4.6.7: idrogramma di piena, portate assolute [m³/s]

t	i_1 **3,662**	i_2 **2,600**	i_3 **2,128**	i_4 **1,846**	i_5 **1,654**	i_6 **1,511**
0	0	0	0	0	0	0
1	167,395	118,860	97,285	84,397	75,588	69,077
2	119,944	204,026	166,993	144,870	129,749	118,574
3	85,944	146,191	216,940	188,200	168,557	154,039
4	61,581	104,751	155,445	219,248	196,364	179,451
5	44,125	75,057	111,381	157,098	216,289	197,660
6	31,617	53,781	79,808	112,566	154,978	210,707
7	22,654	38,536	57,185	80,657	111,046	150,978
8	16,233	27,612	40,975	57,793	79,568	108,181
9	11,631	19,785	29,360	41,411	57,013	77,515
10	8,334	14,176	21,037	29,672	40,852	55,542
11	5,972	10,158	15,074	21,261	29,272	39,797
12	4,279	7,278	10,801	15,234	20,974	28,516
13	3,066	5,215	7,739	10,916	15,029	20,433
14	2,197	3,737	5,545	7,821	10,768	14,641
15	1,574	2,678	3,973	5,604	7,716	10,490
16	1,128	1,919	2,847	4,016	5,529	7,517
17	0,808	1,375	2,040	2,877	3,961	5,386
18	0,579	0,985	1,462	2,062	2,839	3,859

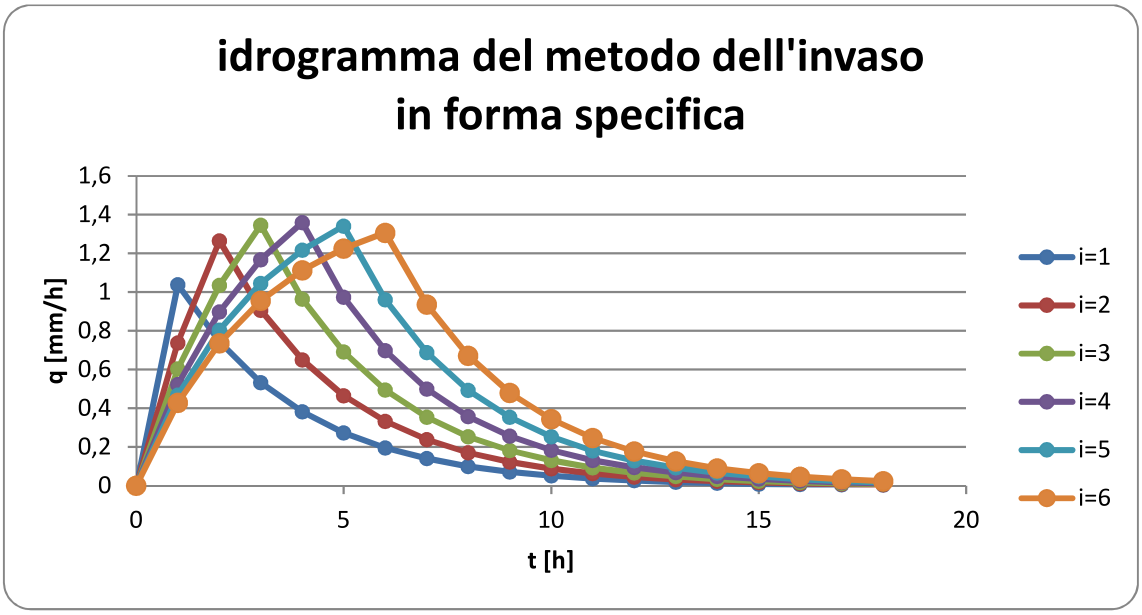


Figura 4.6.3: idrogramma di piena, portate specifiche

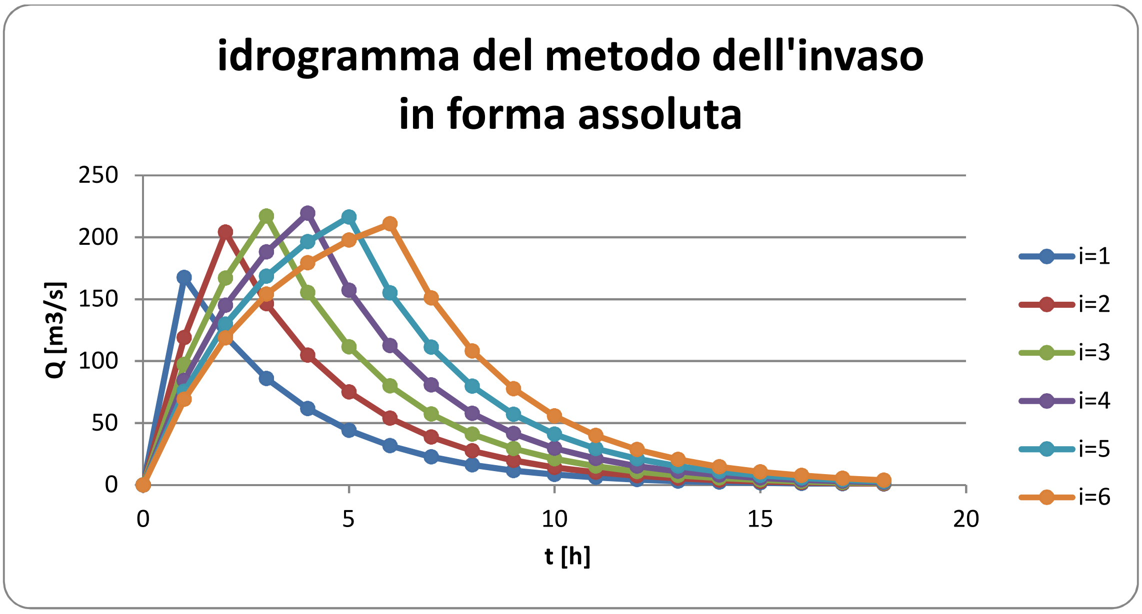


Figura 4.6.4: idrogramma di piena, portate assolute

4.7. Ricerca dell'idrogramma di progetto più gravoso

Detto $U_j = UH$ l'idrogramma unitario costruito sulla base delle aree contribuenti normalizzate, nella seconda colonna sono riportate le posizioni che occuperebbero i vari elementi dell'UH in una sequenza ordinata in senso decrescente, nella terza colonna vi è l'ordinamento speculare. Lo ietogramma di progetto nella sua forma decrescente è riportato nella colonna 5 (con relative posizioni in colonna 6), mentre nella colonna 4 si riporta lo ietogramma riordinato (e più gravoso) ottenuto abbinando le intensità di colonna 5 alle posizioni ordinate di colonna 3. Applicando il coefficiente $\Psi = 0{,}21$, si calcolano le intensità nette nella colonna 7

Calcolo con $K(T) = 1$

Tabella 4.7.1: costruzione ietogramma critico

1	2	3	4	5	6	7
UH	**ordine**	**speculare**	**i ordinata [mm/h]**	**i decresc. [mm/h]**	**ordine**	**i nette [mm/h]**
0,102	5	6	3,80	17,44	1	0,80
0,187	4	3	5,64	7,33	2	1,18
0,239	2	1	17,44	5,64	3	3,66
0,257	1	2	7,33	4,76	4	1,54
0,190	3	4	4,76	4,20	5	1,00
0,024	6	5	4,20	3,80	6	0,88

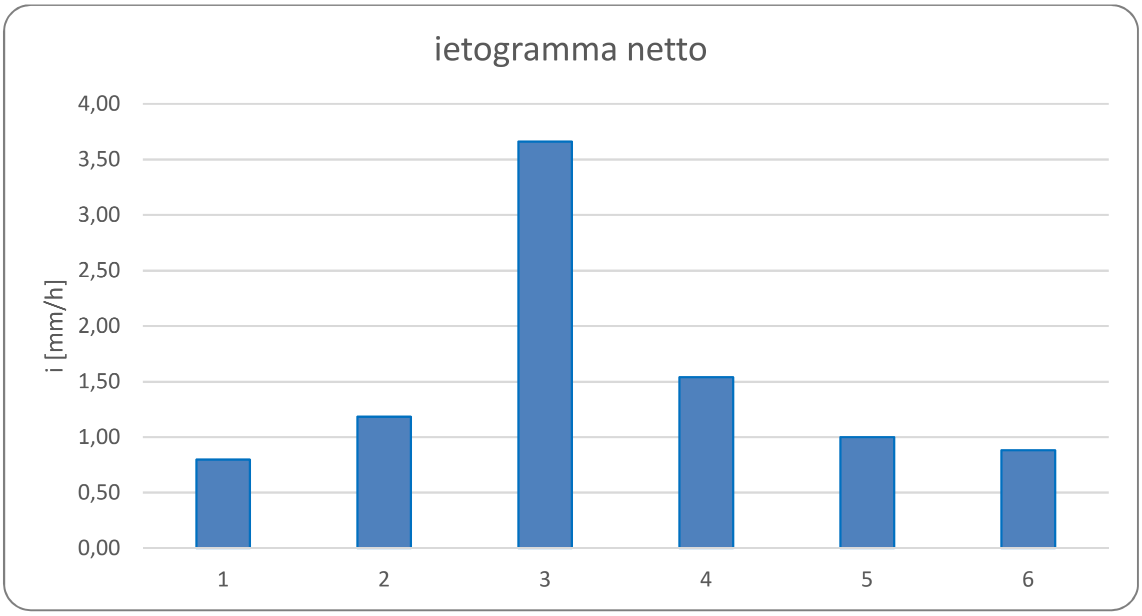


Figura 4.7.1: ietogramma netto critico

Tabella 4.7.2: matrice di convoluzione ietogramma critico

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **0,80**	i_2 **1,18**	i_3 **3,66**	i_4 **1,54**	i_5 **1,00**	i_6 **0,88**					
U_1 **0,102**	0,082	0,121	0,375	0,158	0,103	0,090					
U_2 **0,187**		0,150	0,222	0,685	0,288	0,187	0,165				
U_3 **0,239**			0,191	0,283	0,875	0,368	0,239	0,211			
U_4 **0,257**				0,205	0,305	0,942	0,396	0,257	0,227		
U_5 **0,190**					0,152	0,226	0,697	0,293	0,191	0,168	
U_6 **0,024**						0,019	0,028	0,087	0,037	0,024	0,021
Somme	0,082	0,271	0,788	1,331	1,722	1,832	1,526	0,849	0,454	0,192	0,021
q_k	0,023	0,075	0,219	0,370	0,478	0,509	0,424	0,236	0,126	0,053	0,006
Q	13,21	43,68	127,04	214,68	277,69	295,35	246,00	136,84	73,26	30,96	3,40

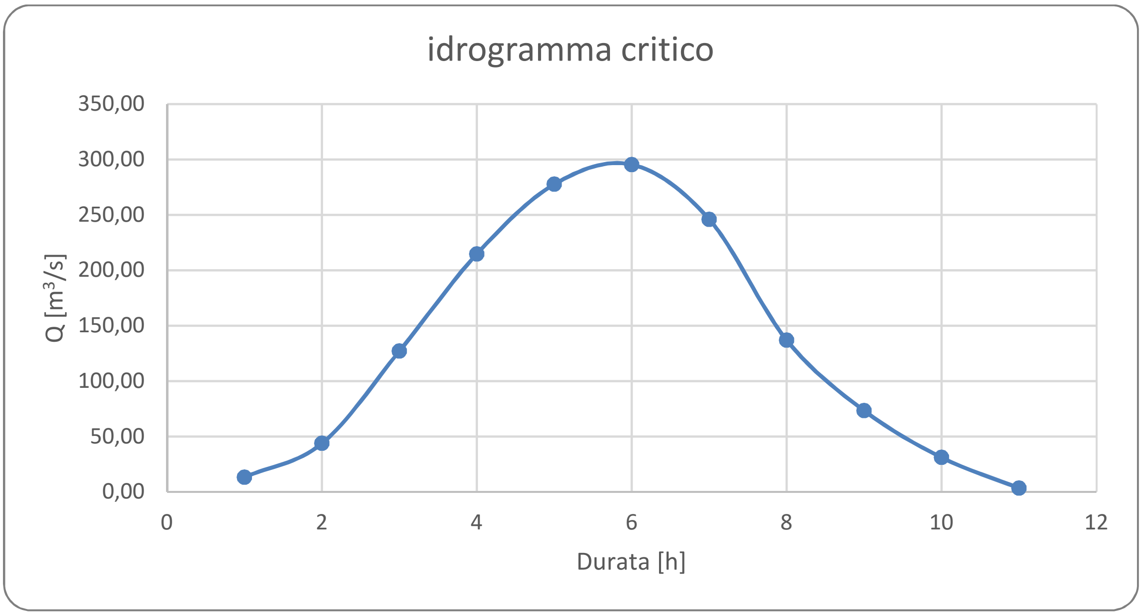


Figura 4.7.2: idrogramma di piena critico

Calcolo con $K(T = 100) = 2,06$

Tabella 4.7.3: costruzione ietogramma critico

1	2	3	4	5	6	7
UH	**ordine**	**speculare**	**i ordinata [mm/h]**	**i decresc. [mm/h]**	**ordine**	**i nette [mm/h]**
0,102	5	6	7,84	35,92	1	1,65
0,187	4	3	11,62	15,09	2	2,44
0,239	2	1	35,92	11,62	3	7,54
0,257	1	2	15,09	9,81	4	3,17
0,190	3	4	9,81	8,66	5	2,06
0,024	6	5	8,66	7,84	6	1,82

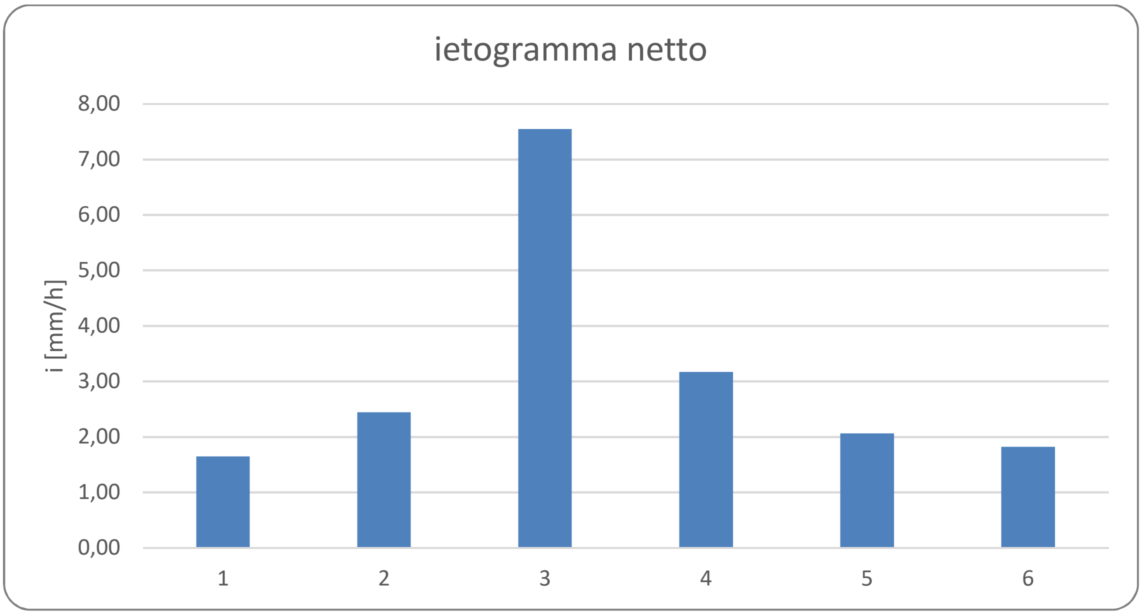


Figura 4.7.3: ietogramma netto critico

Tabella 4.7.4: matrice di convoluzione ietogramma critico

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	i_1 **1,65**	i_2 **2,44**	i_3 **7,54**	i_4 **3,17**	i_5 **2,06**	i_6 **1,82**					
U_1 **0,102**	0,169	0,250	0,773	0,325	0,211	0,186					
U_2 **0,187**		0,308	0,456	1,412	0,593	0,386	0,340				
U_3 **0,239**			0,393	0,583	1,802	0,757	0,492	0,434			
U_4 **0,257**				0,423	0,627	1,940	0,815	0,530	0,468		
U_5 **0,190**					0,314	0,465	1,437	0,604	0,393	0,346	
U_6 **0,024**						0,039	0,058	0,180	0,076	0,049	0,043
Somme	0,169	0,558	1,623	2,742	3,547	3,773	3,143	1,748	0,936	0,396	0,043
q_k	0,047	0,155	0,451	0,762	0,985	1,048	0,873	0,486	0,260	0,110	0,012
Q	27,21	89,99	261,71	442,25	572,04	608,42	506,77	281,90	150,91	63,79	7,00

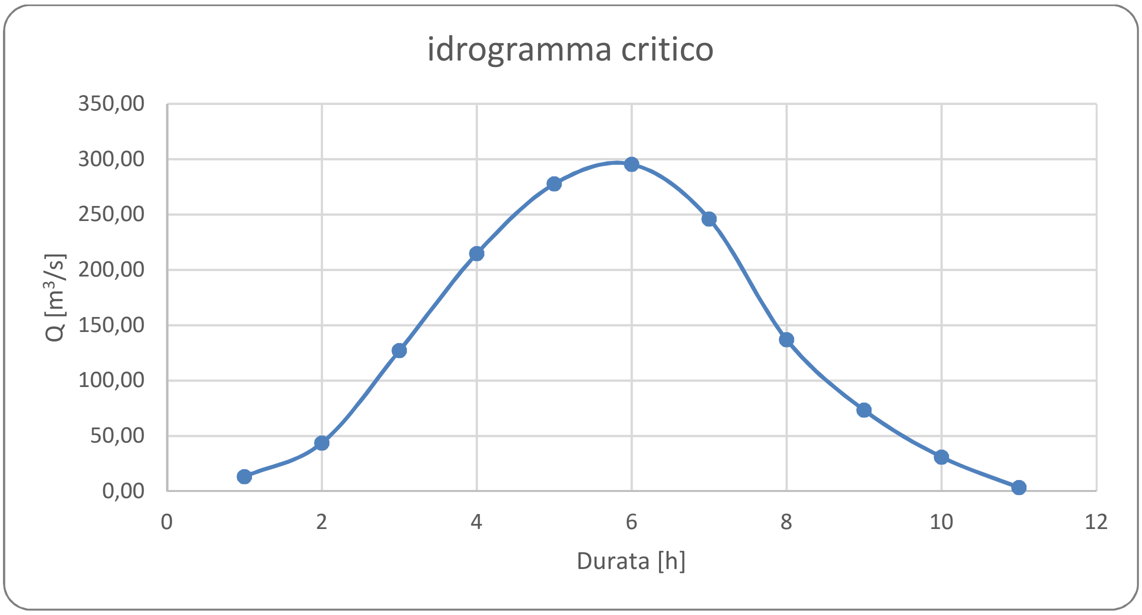


Figura 4.7.4: idrogramma di piena critico

5. Esercitazione 5: Simulazione di una sequenza di infiltrazione con il metodo Green – Ampt

Si valuta l'evoluzione dell'infiltrazione cumulata F, del tasso di infiltrazione f e del deflusso superficiale r a seguito di una sequenza di precipitazione di durata pari a 12 ore, definita come segue:

- intensità $w_1 = 20\ mm/h$, costante per le prime 1,5 ore;
- intensità $w_2 = 0\ mm/h$, nell'intervallo 1,5 – 3 ore;
- intensità $w_3 = 10\ mm/h$, per le ore comprese tra la terza e la dodicesima.

I terreni su cui simulare i flussi sono uno limoso e uno argilloso; ad entrambi compete un grado di saturazione iniziale del 30 %.

Il modello di Green – Ampt è una semplificazione del caso reale: si ipotizza che il fronte di bagnatura sia un divisione orizzontale netta tra la zona di suolo non ancora raggiunta dalla filtrazione in cui il contenuto d'acqua è pari al contenuto d'acqua iniziale) e la zona del terreno satura (in cui il mezzo poroso ha un contenuto d'acqua pari alla porosità).
Ciò significa che, data una intensità di precipitazione w, finché il suolo non è saturo, il tasso di infiltrazione effettivo f è pari a w, avendo un tasso di infiltrazione potenziale pari a f_c; al tempo di ponding, quando il terreno raggiunge la condizione di saturazione, $f_c = w$.

5.1. Caso 1: terreno limoso

Si hanno le seguenti caratteristiche del terreno.

Tabella 5.1.1: caratteristiche terreno limoso

Limo	
Porosità n [-]	0,486
Potenziale di suzione Ψ [mm]	166,8
Conducilbilità satura K_S [mm/h]	6,5
Grado di saturazione iniziale S_i [-]	0,3

Si determina inizialmente il tempo di ponding t_c, ovvero l'istante di tempo in cui il terreno giunge a saturazione.

Si ha:

$$t_p = \frac{K_s \cdot P}{(w_1 - K_s) \cdot w_1}$$

Ricordando che:

$$P = \Psi \cdot \Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \theta_e - \theta_0$$
$$\theta_e = n \qquad \theta_0 = \theta_e \cdot S_i$$

si ottiene un tempo di ponding $\qquad t_p = 1{,}37\ h.$

Al tempo di ponding, l'altezza di acqua infiltrata può essere valutata come:

$$F_p - F_0 = w_1 \cdot t_p$$

Di solito si ha $F_0 = 0$, specificando con ciò che l'acqua contenuta nel suolo corrisponde solo al contenuto d'acqua iniziale.

Si ottiene quindi $F_p = w_1 \cdot t_p = 20\ mm/h \cdot 1{,}37\ h = 27{,}32\ mm.$

A partire dall'instate in cui si raggiunge la saturazione, quindi dopo il tempo di ponding, l'infiltrazione cumulata si ricava con la seguente relazione:

$$F_1 = F_p + K_s \cdot (t_1 - t_p) + \Psi \cdot \Delta\theta \cdot ln\left(\frac{\Psi \cdot \Delta\theta + F_1}{\Psi \cdot \Delta\theta + F_p}\right)$$

Essendo la precedente un'equazione implicita, deve essere risolta per iterazioni. Inizialmente si inserisce al secondo membro dell'equazione un valore di primo tentativo di F_1, ponendo $F_1 = F_p$; si procede iterando, finché al primo membro dell'equazione non si ottiene un valore corrispondente alla F inserita al secondo membro, con precisione al millesimo.
Ottenuto F_1 al tempo t_1 con il metodo delle successive sostituzioni, questa diventa la condizione iniziale F_p per un nuovo passo temporale, con cui posso ottenere F_2 al tempo t_2.

Si riportano a mo' di esempio due tracce del calcolo sopra descritto.

Tabella 5.1.2: esempio 1 calcolo iterativo

t **[h]**	$\boldsymbol{F_p}$ **[mm]**	$\boldsymbol{F_1}$ **[mm]**	**Verfica convergenza**
1,4	27,322	27,322	
		27,542	0,220
		27,691	0,149
		27,791	0,100
		27,858	0,067
		27,903	0,045
		27,933	0,030
		27,953	0,020
		27,967	0,014
		27,976	0,009
		27,982	0,006
		27,986	0,004
		27,989	0,003
		27,991	0,002
		27,992	0,001
		27,993	0,001
		27,993	0,001
Convergenza!		27,994	0,000

Tabella 5.1.3: esempio 2 calcolo iterativo

t **[h]**	$\boldsymbol{F_p}$ **[mm]**	$\boldsymbol{F_1}$ **[mm]**	**Verfica convergenza**
1,5	27,994	27,994	
		28,644	0,650
		29,077	0,434
		29,365	0,287
		29,554	0,190
		29,679	0,125
		29,761	0,082
		29,815	0,054
		29,851	0,035
		29,874	0,023
		29,889	0,015
		29,899	0,010
		29,905	0,007
		29,909	0,004
		29,912	0,003
		29,914	0,002
		29,915	0,001
		29,916	0,001
		29,917	0,001
Convergenza!		29,917	0,000

Il tasso di infiltrazione potenziale f corrispondente ad ogni valore F è dato dall'espressione:

$$f(t) = K_s \cdot \left(1 + \frac{\Psi \cdot \Delta\theta}{F(t)}\right)$$

con $f = w$, fino a quando $t = t_c$.

Si calcola infine il deflusso superficiale tramite la relazione:

$$r = w - f$$

Poiché nell'intervallo tra 1,5 e 3 ore non piove ($w_2 = 0\ mm/h$), è necessario verificare, una volta ripresa la pioggia, se ci si trova ancora in condizioni di saturazione confrontando f con w. In questo caso si nota che $f(3h) > w_3$: ciò implica che il terreno non si trova più in condizioni di saturazione, per questo, bisogna calcolare un nuovo tempo di ponding t_p in cui si raggiunge nuovamente tale situazione.

Si ottiene l'infiltrazione cumulata al t_p sfruttando la relazione:

$$F_p = \frac{K_s \cdot P}{w_3 - K_s}$$

Successivamente, considerando $F_0 = F(3h)$, si calcola il tempo di ponding con la già citata

$$F_p - F_0 = w_3 \cdot t_p$$

Si ricava quindi un tempo di ponding relativo $t_p = 7{,}547\ h$, a cui si sommano le 3 ore già trascorse per ottenere il tempo di ponding assoluto $t_{p,ass} = 10{,}547\ h$.

A partire da questo istante, è possibile ripartire con le iterazioni. Ripetendo gli stessi procedimenti precedentemente citati, si ottengono i valori complessivi dell'infiltrazione cumulata F, del tasso di infiltrazione f e del deflusso superficiale r.

Si riportano nelle pagine successive i valori ottenuti con il metodo Green – Ampt (*Tabella 5.1.4*), l'andamento dell'infiltrazione cumulata (*Figura 5.1.1*), il confronto fra gli andamenti della precipitazione w e del tasso di infiltrazione f (*Figura 5.1.2*) e il confronto fra gli andamenti della precipitazione w e del deflusso superficiale r (*Figura 5.1.3*)

Tabella 5.1.4: risultati metodo Green - Ampt, caso limo

t [h]	w [mm/h]	F [mm]	f [mm/h]	r [mm/h]
0	20	0	20	0
0,5	20	10,00	20	0
1	20	20,00	20,00	0,00
1,37	20	27,32	20,00	0,00
1,4	20	27,99	19,68	0,32
1,5	20	29,92	18,83	1,17
1,5	0	29,92	0,00	0
3	0	29,92	0,00	0
3	10	29,92	10,00	0,00
3,5	10	34,92	10,00	0,00
4	10	39,92	10,00	0,00
4,5	10	44,92	10,00	0,00
5	10	49,92	10,00	0,00
5,5	10	54,92	10,00	0,00
6	10	59,92	10,00	0,00
6,5	10	64,92	10,00	0,00
7	10	69,92	10,00	0,00
7,5	10	74,92	10,00	0,00
8	10	79,92	10,00	0,00
8,5	10	84,92	10,00	0,00
9	10	89,92	10,00	0,00
9,5	10	94,92	10,00	0,00
10	10	99,92	10,00	0,00
10,547	10	105,38	10,00	0,00
10,55	10	105,42	10,00	0,00
11	10	109,88	9,86	0,14
11,5	10	114,78	9,71	0,29
12	10	119,60	9,58	0,42

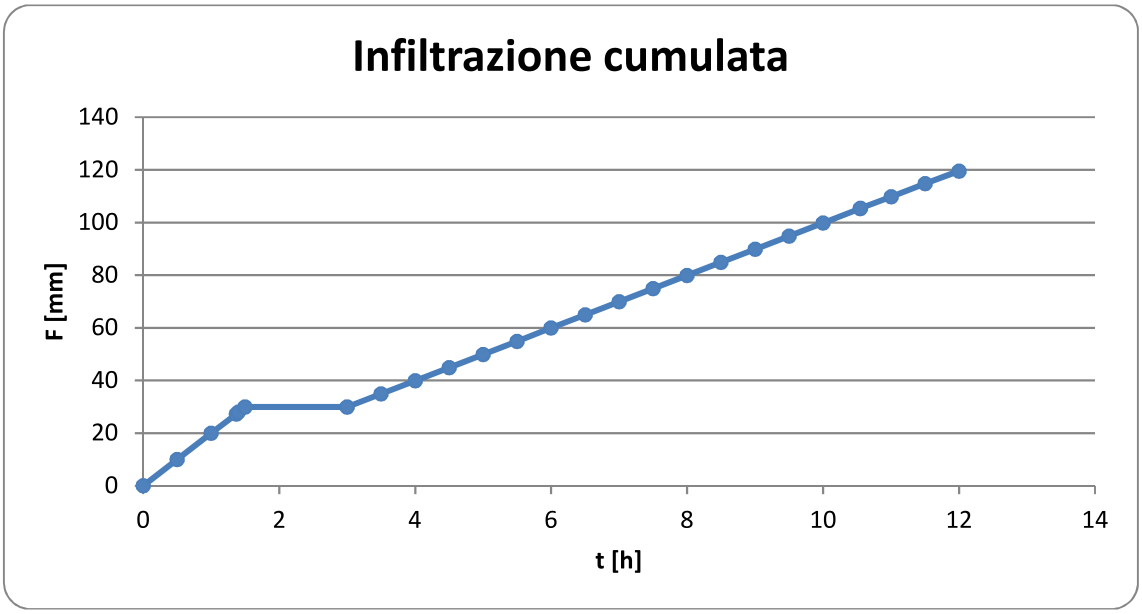


Figura 5.1.1: metodo Green - Ampt, limo, infiltrazione cumulata F

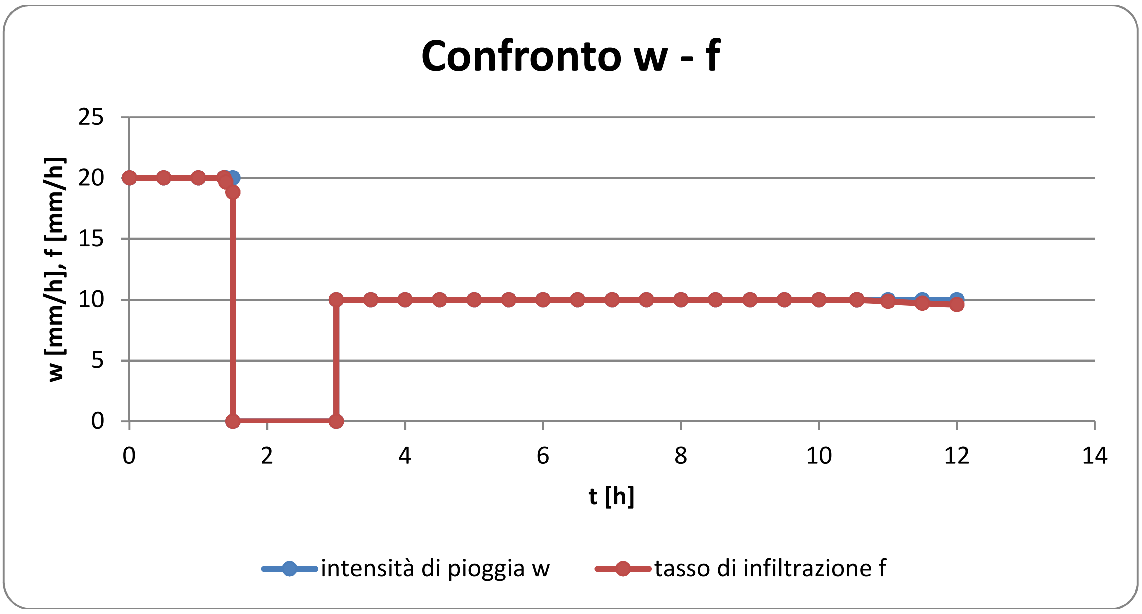


Figura 5.1.2: metodo Green - Ampt, limo, confronto w – f

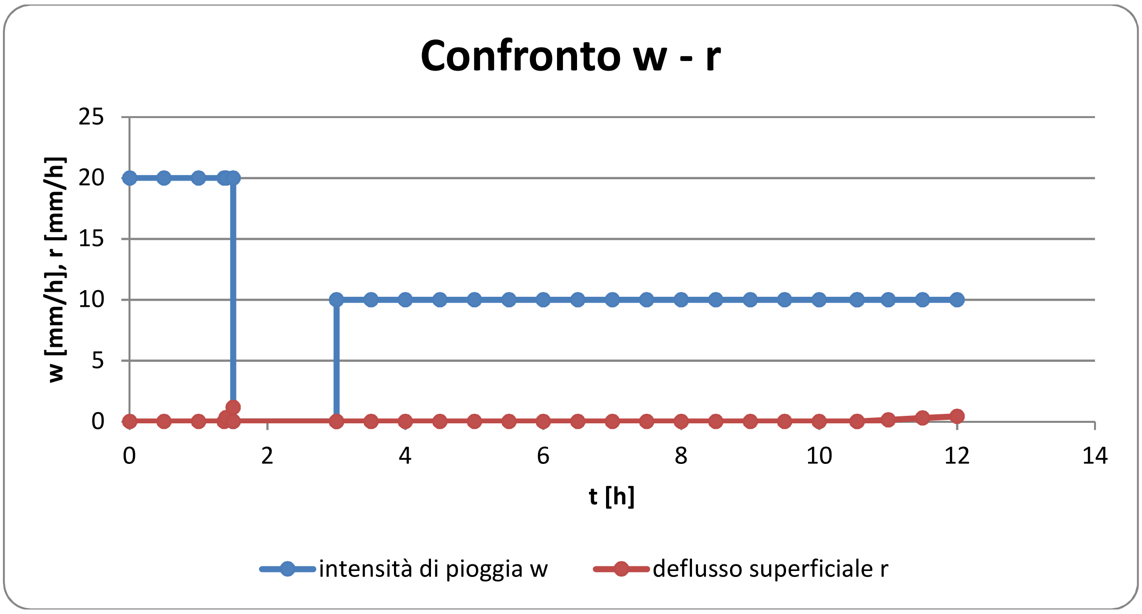


Figura 5.1.3: metodo Green - Ampt, limo, confronto w – r

5.2. Caso 2: terreno argilloso

Si esegue il medesimo procedimento logico del caso del terreno limoso.

Si hanno le seguenti caratteristiche del terreno.

Tabella 5.2.1: caratteristiche terreno argilloso

Limo	
Porosità n [-]	0,385
Potenziale di suzione Ψ [mm]	316,3
Conducilbilità satura K_S [mm/h]	0,3
Grado di saturazione iniziale S_i [-]	0,3

Si determina inizialmente il tempo di ponding t_c, ovvero l'istante di tempo in cui il terreno giunge a saturazione.

Si ha:

$$t_p = \frac{K_s \cdot P}{(w_1 - K_s) \cdot w_1}$$

Ricordando che:

$$P = \Psi \cdot \Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \theta_e - \theta_0$$
$$\theta_e = n \qquad \theta_0 = \theta_e \cdot S_i$$

si ottiene un tempo di ponding $t_p = 0{,}065\ h$.

Si valuta il volume di acqua infiltrata

$$F_p = w_1 \cdot t_p = 20\ mm/h \cdot 0{,}065\ h = 1{,}30\ mm$$

.

A partire dall'instate in cui si raggiunge la saturazione, quindi dopo il tempo di ponding, l'infiltrazione cumulata si ricava con la seguente relazione:

$$F_1 = F_p + K_s \cdot (t_1 - t_p) + \Psi \cdot \Delta\theta \cdot ln\left(\frac{\Psi \cdot \Delta\theta + F_1}{\Psi \cdot \Delta\theta + F_p}\right)$$

Essendo la precedente un'equazione implicita, si risolve l'equazione per sostituzioni ricorsive.

Il tasso di infiltrazione potenziale f corrispondente ad ogni valore F è dato dall'espressione:

$$f(t) = K_s \cdot \left(1 + \frac{\Psi \cdot \Delta\theta}{F(t)}\right)$$

con $f = w$, fino a quando $t = t_c$.

Si calcola infine il deflusso superficiale tramite la relazione:

$$r = w - f$$

Poiché nell'intervallo tra 1,5 e 3 ore non piove ($w_2 = 0\ mm/h$), è necessario verificare, una volta ripresa la pioggia, se ci si trova ancora in condizioni di saturazione confrontando f con w. In questo caso si nota che $f(3h) < w_3$: ciò implica che il terreno è ancora saturo, quindi si può procedere con il calcolo iterativo.

Si riportano quindi i risultati ottenuti con il metodo di Green – Ampt nel caso di argilla.

Tabella 5.2.2: risultati metodo Green - Ampt, caso argilla

t [h]	w [mm/h]	F [mm]	f [mm/h]	r [mm/h]
0	20	0	20	0
0,065	20	1,30	20	0
0,1	20	1,35	19,26	0,74
0,5	20	4,63	5,83	14,17
1	20	6,86	4,03	15,97
1,5	20	8,57	3,28	16,72
1,5	0	8,57	0	0
3	0	8,57	0	0
3	10	8,57	3,28	6,72
3,5	10	10,01	2,85	7,15
4	10	11,29	2,57	7,43
4,5	10	12,45	2,35	7,65
5	10	13,52	2,19	7,81
5,5	10	14,53	2,06	7,94
6	10	15,48	1,95	8,05
7	10	17,29	1,78	8,22
8	10	18,96	1,65	8,35
9	10	20,52	1,55	8,45
10	10	21,99	1,46	8,54
11	10	23,38	1,39	8,61
12	10	24,72	1,33	8,67

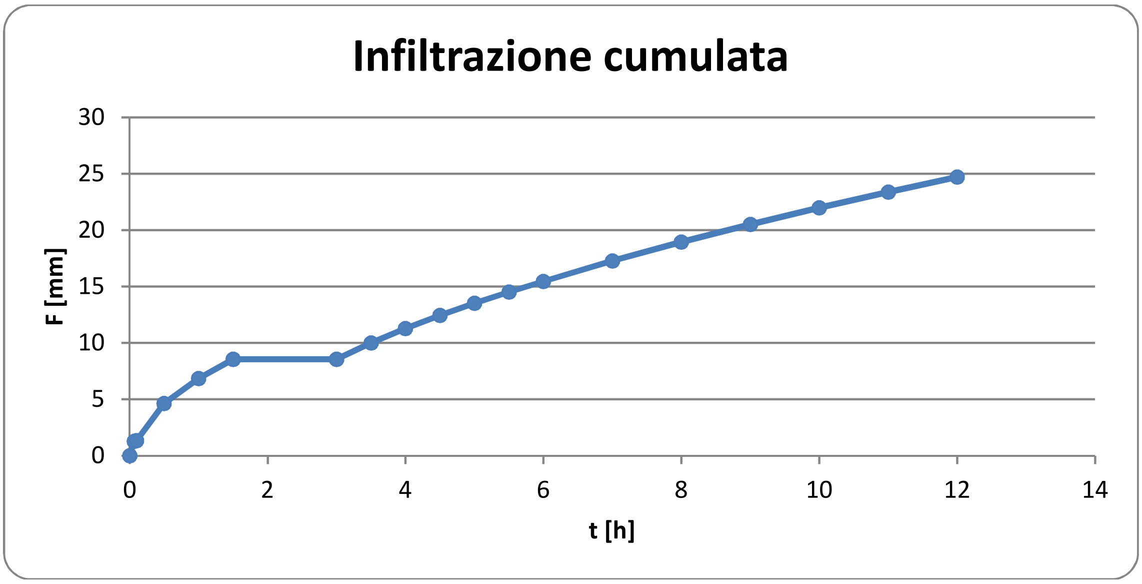


Figura 5.2.1: metodo Green - Ampt, argilla, infiltrazione cumulata F

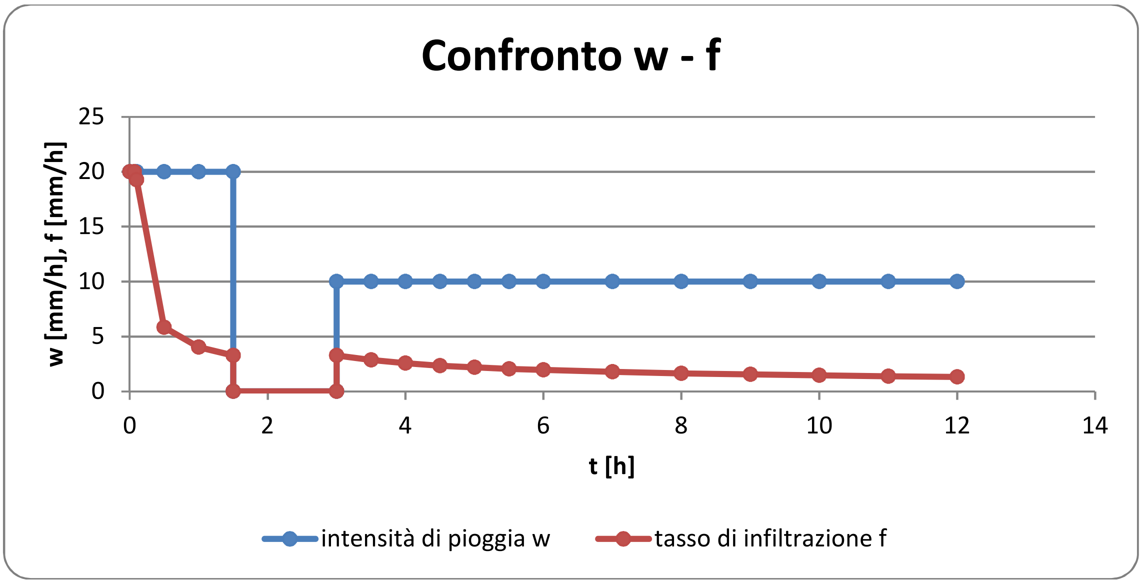


Figura 5.2.2: metodo Green - Ampt, argilla, confronto w – f

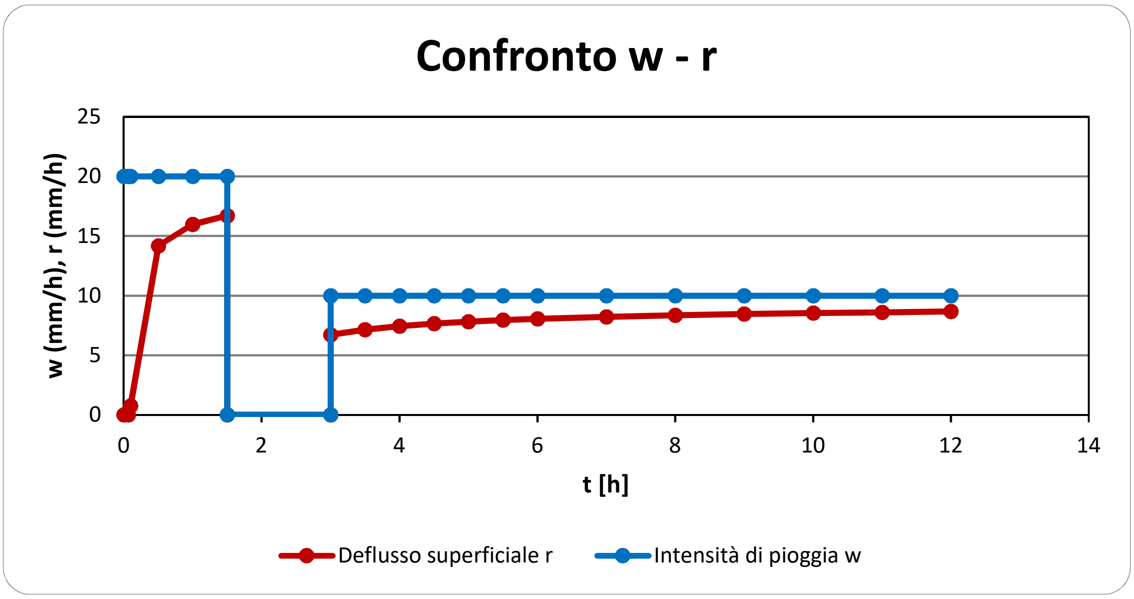


Figura 5.2.3: metodo Green - Ampt, argilla, confronto w – r

6. Esercitazione 6: Simulazione di una sequenza di infiltrazione con il metodo di Horton

6.1. Descrizione del problema

Si consideri il metodo di infiltrazione di Horton. È un modello fisico semplificato, in cui si ha l'ipotesi di superficie satura (ovvero con intensità di pioggia maggiore della velocità di infiltrazione) e con suolo caratterizzato da una velocità di infiltrazione massima iniziale f_0 ed una minima f_1, al cui valore tende asintoticamente il tasso di infiltrazione quando la durata dell'evento tende a infinito.

Si considerino i seguenti parametri del terreno:

f_0 **[mm/h]**	55
f_1 **[mm/h]**	4
α **[h^{-1}]**	1,5

Si prenda in considerazione un pluviogramma di durata complessiva pari a 4 ore, costituito da tre eventi parziali rettangolari:

- nelle prime due ore si ha $w_1 = 10\ mm/h$;
- nella terza ora si ha $w_2 = 20\ mm/h$;
- nella quarta ora si ha $w_3 = 10\ mm/h$.

Si ricostruiscano gli andamenti di:

- tasso di infiltrazione effettivo f;
- volume specifico di infiltrazione cumulata effettiva (in mm) F;
- intensità del deflusso superficiale w.

6.2. Risoluzione del problema

Metodo con f_0 variabile

Con riferimento al primo intervallo si ricerca se e quando si raggiungono per la prima volta le condizioni di ponding applicando la formula (1):

$$t_p = \frac{f_0 - w}{\alpha \cdot w} - \frac{f_1}{\alpha \cdot w} \cdot ln \frac{w - f_1}{f_0 - f_1}$$

Sostituendo i valori per le prime due ore di precipitazione, si trova un t_p pari a 3,57 ore.
Poiché le condizioni di saturazione non vengono raggiunte entro il termine del primo intervallo a precipitazione costante, si determina il valore del tasso potenziale di infiltrazione f che diventerà la nuova condizione iniziale per verificare se il terreno risulti o no subito saturo con la nuova intensità di precipitazione.

Il nuovo valore del tasso potenziale viene stabilito sfruttando la formula (2):

$$F = \frac{f_0 - f_c}{\alpha} - \frac{f_1}{\alpha} \cdot ln\left(\frac{f_c - f_1}{f_0 - f_1}\right)$$

Si compie un processo iterativo facendo diminuire progressivamente f_c (partendo dal valore limite superiore $f_0 = 55$) fino a quando il valore dell'infiltrazione cumulata F sarà pari a 20.
Dall'iterazione si ricava un valore del tasso di infiltrazione dopo 2 ore pari a $f(2h)$ pari a 28.

Essendo il $f(2h) > w_2$ ciò implica che il terreno non risulta immediatamente saturo con la nuova intensità di precipitazione. Si procede, quindi, a ricercare nuovamente il tempo di ponding usando la nuova condizione iniziale $f(2h)$ e sostituendola alla f_0

Sostituendo i valori per la precipitazione w_2, si trova un t_p pari a 0,32 ore che devono essere sommate alle 2 ore precedenti, per un t_p complessivo pari a 2,32 ore.

Al tempo di ponding si ha per definizione $f(t_p) = w$ e l'infiltrazione cumulata sarà pari a $F(t_p) = 26{,}41\ mm$

Si procede al calcolo dei valori del tasso di infiltrazione per $t > t_p$ con la formula (3):

$$f_1 + (f_0 - f_1) \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta t}$$

ricordando che $f_0 = f(t_p) = 20$ e $\Delta t = t - t_p$

Successivamente si calcola per gli istanti considerati l'infiltrazione cumulata $F(t)$, individuata come $F(t) = F(t_p) + \Delta F(t)$, con ΔF individuato con la formula (2).

Infine, terminata la precipitazione di intensità w_2 bisogna verificare di trovarsi ancora in condizioni di saturazione confrontando $f(3h)$ con w_3. Poiché si riscontra che $f(3h) < w_3$ ciò implica che ci troviamo ancora in condizioni di saturazione.

Metodo con f_0 fisso

Con riferimento al primo intervallo si ricerca se e quando si raggiungono per la prima volta le condizioni di ponding applicando la formula (1):

$$t_p = \frac{f_0 - w}{\alpha \cdot w} - \frac{f_1}{\alpha \cdot w} \cdot ln\frac{w - f_1}{f_0 - f_1}$$

Sostituendo i valori per le prime due ore di precipitazione, si trova un t_p pari a 3,57 ore.

Poiché le condizioni di saturazione non vengono raggiunte entro il termine del primo intervallo a precipitazione costante, si determina il valore del tasso potenziale di infiltrazione f che diventerà la nuova condizione iniziale per verificare se il terreno risulti o no subito saturo con la nuova intensità di precipitazione.

Il nuovo valore del tasso potenziale viene stabilito sfruttando la formula (2):

$$F(t) = \frac{f_0 - f_c}{\alpha} - \frac{f_1}{\alpha} \cdot ln\left(\frac{f_c - f_1}{f_0 - f_1}\right)$$

Si compie un processo iterativo facendo diminuire progressivamente f_c (partendo dal valore limite superiore $f_0 = 55$) fino a quando il valore dell'infiltrazione cumulata F sarà pari a 20.

Dall'iterazione si ricava un valore del tasso di infiltrazione dopo 2 ore pari a $f(2h)$ pari a 28.

Essendo il $f(2h) > w_2$ ciò implica che il terreno non risulta immediatamente saturo con la nuova intensità di precipitazione. Si procede, quindi, a ricercare nuovamente il tempo di ponding usando la nuova condizione iniziale $f(2h)$ e sostituendola alla f_0

Sostituendo i valori per la precipitazione w_2, si trova un t_p pari a 0,32 ore che devono essere sommate alle 2 ore precedenti, per un t_p complessivo pari a 2,32 ore.

Al tempo di ponding si ha per definizione $f(t_p) = w$ e l'infiltrazione cumulata sarà pari a $F(t_p) = 26{,}41\ mm$

Si procede al calcolo dei valori del tasso di infiltrazione potenziali per con la formula (3):

$$f_c = f_1 + (f_0 - f_1) \cdot e^{-\alpha \cdot \mathrm{t}}$$

Si procede al calcolo dei valori del tasso di infiltrazione effettiva per $t > t_p$ con la formula (4):

$$f' = f_1 + (f_0 - f_1) \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta \mathrm{t}}$$

ricordando che $f_0 = f(tp)$ e $\Delta t = t - t_p$

Successivamente si calcola per gli istanti considerati l'infiltrazione cumulata $F(t)$, individuata con la formula (2), sostituendo ad f_c i valori dei tassi di infiltrazione effettiva f' precedentemente calcolati. Infine, terminata la precipitazione di intensità w_2 bisogna verificare di trovarsi ancora in condizioni di saturazione confrontando il tasso di infiltrazione effettiva $f'(3h)$ con w_3.

Poiché si riscontra che $f'(3h) < w_3$ ciò implica che ci troviamo ancora in condizioni di saturazione. Infine si individua il deflusso superficiale $d_s = w - f'$ $\qquad D_s = h_{cum} - F$

Tabella 6.2.1: risultati metodo Horton

Durata [h]	w **[mm/h]**	**h cumulata [mm]**	$f_{potenziale}$ *[mm/h]*	$f_{effettivo}$ *[mm/h]*	F **[mm]**	**d_s [mm/h]**	**D_s [mm]**
0	10,00	0	55,00	10,00	0,00	0,00	0,00
0,1	10,00	1	47,90	10,00	1,00	0,00	0,00
0,2	10,00	2	41,78	10,00	2,00	0,00	0,00
0,3	10,00	3	36,52	10,00	3,00	0,00	0,00
0,4	10,00	4	31,99	10,00	4,00	0,00	0,00
0,5	10,00	5	28,09	10,00	5,00	0,00	0,00
0,6	10,00	6	24,74	10,00	6,00	0,00	0,00
0,7	10,00	7	21,85	10,00	7,00	0,00	0,00
0,8	10,00	8	19,36	10,00	8,00	0,00	0,00
0,9	10,00	9	17,22	10,00	9,00	0,00	0,00
1	10,00	10	15,38	10,00	10,00	0,00	0,00
1,1	10,00	11	13,79	10,00	11,00	0,00	0,00
1,2	10,00	12	12,43	10,00	12,00	0,00	0,00
1,3	10,00	13	11,26	10,00	13,00	0,00	0,00
1,4	10,00	14	10,25	10,00	14,00	0,00	0,00
1,5	10,00	15	9,38	10,00	15,00	0,00	0,00
1,6	10,00	16	8,63	10,00	16,00	0,00	0,00
1,7	10,00	17	7,98	10,00	17,00	0,00	0,00
1,8	10,00	18	7,43	10,00	18,00	0,00	0,00
1,9	10,00	19	6,95	10,00	19,00	0,00	0,00
2	10,00	20	6,54	10,00	20,00	0,00	0,00
2,1	20,00	22	6,19	20,00	22,00	0,00	0,00
2,2	20,00	24	5,88	20,00	24,00	0,00	0,00
2,3	20,00	26	5,62	20,00	26,00	0,00	0,00
2,32	20,00	26,4	5,57	20,00	26,40	0,00	0,00
2,4	20,00	28	5,39	18,21	27,94	1,79	0,06
2,5	20,00	30	5,20	16,23	29,66	3,77	0,34
2,6	20,00	32	5,03	14,52	31,19	5,48	0,81
2,7	20,00	34	4,89	13,06	32,57	6,94	1,43
2,8	20,00	36	4,76	11,80	33,81	8,20	2,19
2,9	20,00	38	4,66	10,71	34,93	9,29	3,07
3	20,00	40	4,57	9,78	35,96	10,22	4,04
3,1	10,00	41	4,49	8,97	36,89	1,03	4,11
3,2	10,00	42	4,42	8,28	37,76	1,72	4,24
3,3	10,00	43	4,36	7,68	38,55	2,32	4,45
3,4	10,00	44	4,31	7,17	39,30	2,83	4,70
3,5	10,00	45	4,27	6,73	39,99	3,27	5,01
3,6	10,00	46	4,23	6,35	40,64	3,65	5,36
3,7	10,00	47	4,20	6,02	41,26	3,98	5,74
3,8	10,00	48	4,17	5,74	41,85	4,26	6,15
3,9	10,00	49	4,15	5,50	42,41	4,50	6,59
4	10,00	50	4,13	5,29	42,95	4,71	7,05

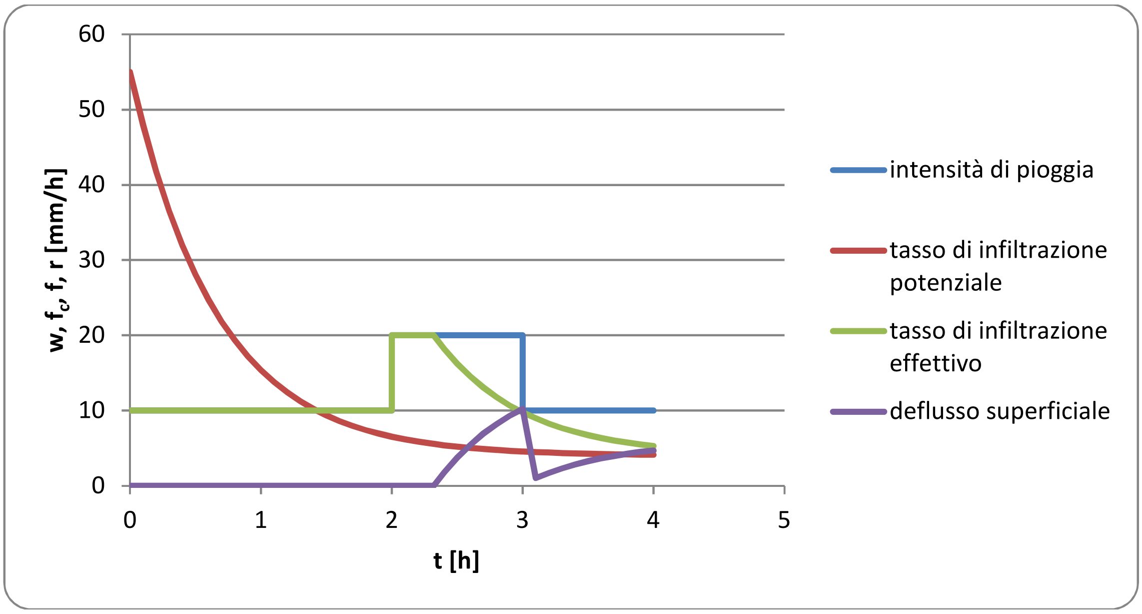


Figura 6.2.1: metodo Horton-risultati

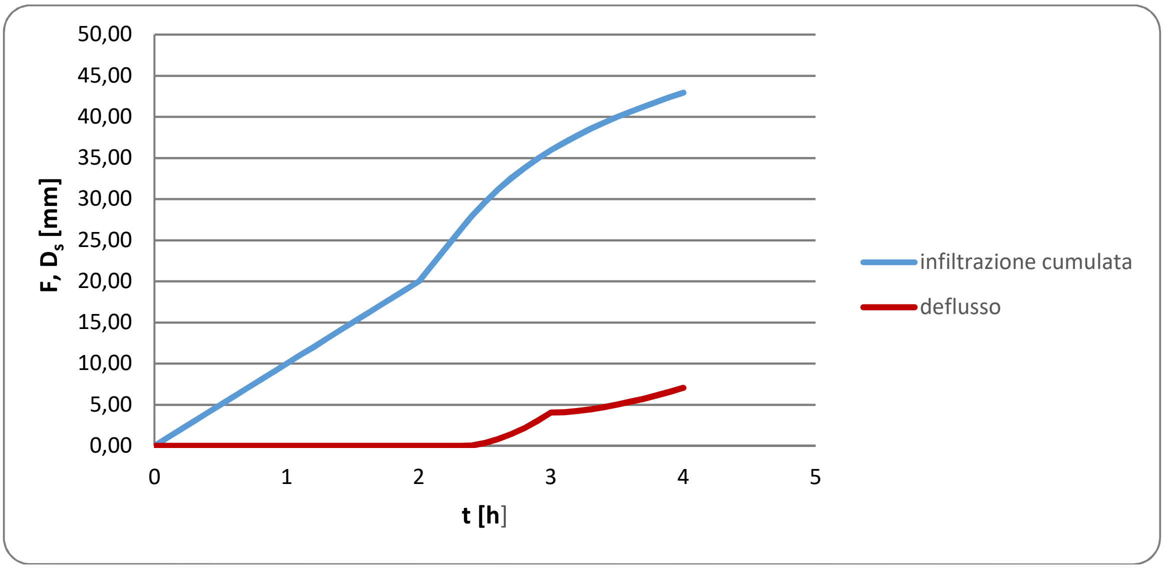


Figura 6.2.2: metodo Horton-risultati

7. Esercitazione 7: Costruzione di una curva di durata

7.1. Parte assistita

All'interno del bacino della Stura di Demonte si procede innanzitutto alla determinazione della curva di durata delle portate nella sezione (non strumentata) di Moiola. Il metodo per la determinazione della curva è denominato RENERFOR e prevede la stima dei tre L - Momenti in base a parametri di bacino che verranno ottenuti mediante procedura GIS.

Il primo passo è quello di procurarsi i parametri del bacino mediante il software gratuito GIS, oppure tramite l'applicativo WEB (http://130.192.28.30/).
Inserendo i dati all'interno del foglio Excel pre-impostato già fornito è possibile ottenere la stima degli L - momenti regionali (*L-CV*, *L-CA*).

Tabella 7.1.1: stima degli L - momenti

Area bacino	560,40 km^2
Quota Media	1819 *m s.l.m.*
Quota Massima	2957 *m s.l.m.*
a_{75}percento	1424 *m s.l.m.*
MAP	1100 *mm*
IDF a	15,979 *mm*
std IDF_a	1,538 *mm/h*
$Fourier_{B1}$	-1,4
cv_{rp}	0,3
clc_2	45,92 %
clc_3	22,9 %
c_{int}	0,015
L-CV	0,40
L-CA	0,44

Da questi ultimi si ricavano nelle tabelle a doppia entrata fornite i valori dei coefficienti *b* e *c*, necessari per il calcolo del terzo coefficiente *a* tramite l'espressione:

$$a = \frac{\bar{Q}}{b^{-1/c}} \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{1}{b}\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right] \cdot \Gamma\left[1 + \frac{1}{c}\right]}$$

Infine si procede alla stima delle portate con la formula:

$$Q = a \cdot \left[\frac{(1-p)^{-b} - 1}{b}\right]^{\frac{1}{c}}$$

indicando con p la probabilità di non superamento della portata.

Tabella 7.1.2: coefficienti per il calcolo della portata

b	1,304
c	2,936
a	11,594

Si riportano, a mo' di esempio, alcuni valori di portata ottenuti (*Tabella 7.1.3*) e successivamente la curva di durata media delle portate (*Figura 7.1.1*)

Tabella 7.1.3: curva di durata media delle portate

Giorni di superamento	$F = gg/366$	$p = 1 - F$	Q [m³/s]
1	0,003	0,997	145,7
2	0,005	0,995	107,1
3	0,008	0,992	89,4
4	0,011	0,989	78,7
5	0,014	0,986	71,2
6	0,016	0,984	65,6
7	0,019	0,981	61,3
8	0,022	0,978	57,7
9	0,025	0,975	54,8
10	0,027	0,973	52,2
…	…	…	…
360	0,984	0,016	2,9
361	0,986	0,014	2,7
362	0,989	0,011	2,5
363	0,992	0,008	2,3
364	0,995	0,005	2,0
365	0,997	0,003	1,6

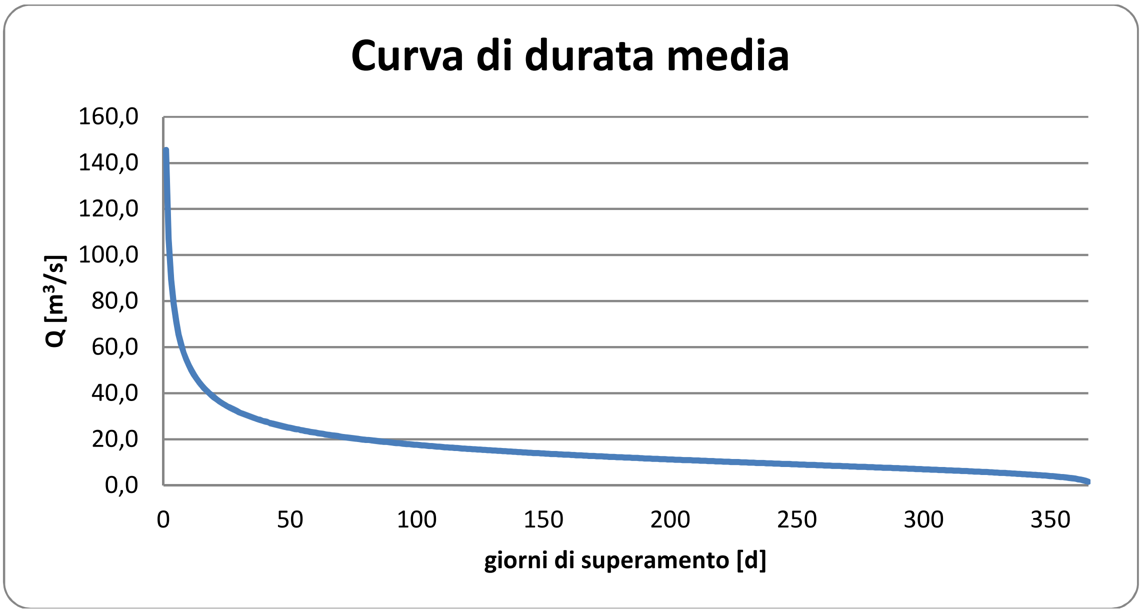


Figura 7.1.1: curva di durata media

7.2. Metodo speditivo

Per un controllo del risultato si costruisca la curva utilizzando il modello log - normale sui dati della curva media reperiti dalla Pubblicazione n.17 del SII con riferimento alla stazione di Gaiola, che sottende un bacino praticamente identico a quello di Moiola.

Si calcoli F con la formula di Weibull:

$$F = \frac{d}{d_{max} + 1}$$

e la variabile normale standard z individuata con la funzione di Excel *INV.NORM.ST*

Si costruisce la carta probabilistica plottando in ascissa la variabile z e sull'asse delle ordinate il logaritmo naturale delle rispettive portate.
Si individua una linea di tendenza e si ricava l'equazione $y = az + b$, necessaria per stimare le portate.

Tabella 7.2.1: costruzione della carta probabilistica log - normale

d	F	Q [m³/s]	$\ln Q$	z
10	0,027	55,3	4,013	-1,922
91	0,249	22,3	3,105	-0,679
182	0,497	12,7	2,542	-0,007
274	0,749	8,78	2,172	0,670
355	0,970	5,44	1,694	1,880
365	0,997	4,2	1,435	2,778

Si costruisce la carta probabilistica plottando in ascissa la variabile z e sull'asse delle ordinate il logaritmo naturale delle rispettive portate. Si individua una linea di tendenza e si ricava l'equazione (y=az+b) di quest'ultima necessaria per stimare le portate.

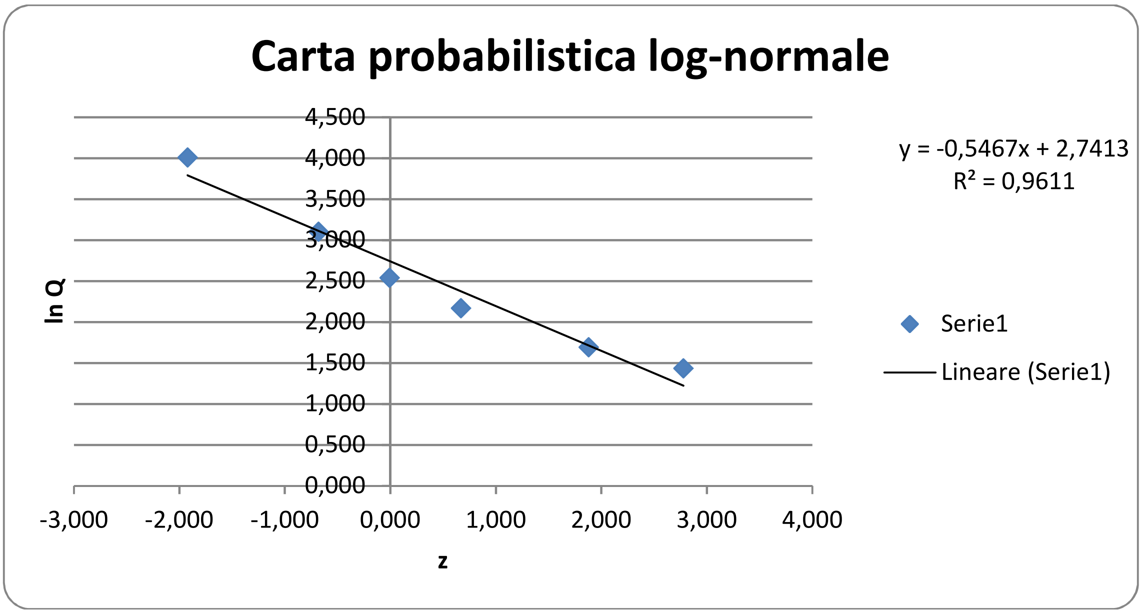


Figura 7.2.1: carta probabilistica log - normale

Si procede dunque alla stima delle portate per la realizzazione della curva di durata:

$$Q(d) = e^{a \cdot z(d) + b}$$

Si riporta in *Figura 7.2.2* il confronto tra la curva di durata delle portate calcolata al paragrafo 7.1. (metodo Burr) e le portate calcolate con la suddetta formula.

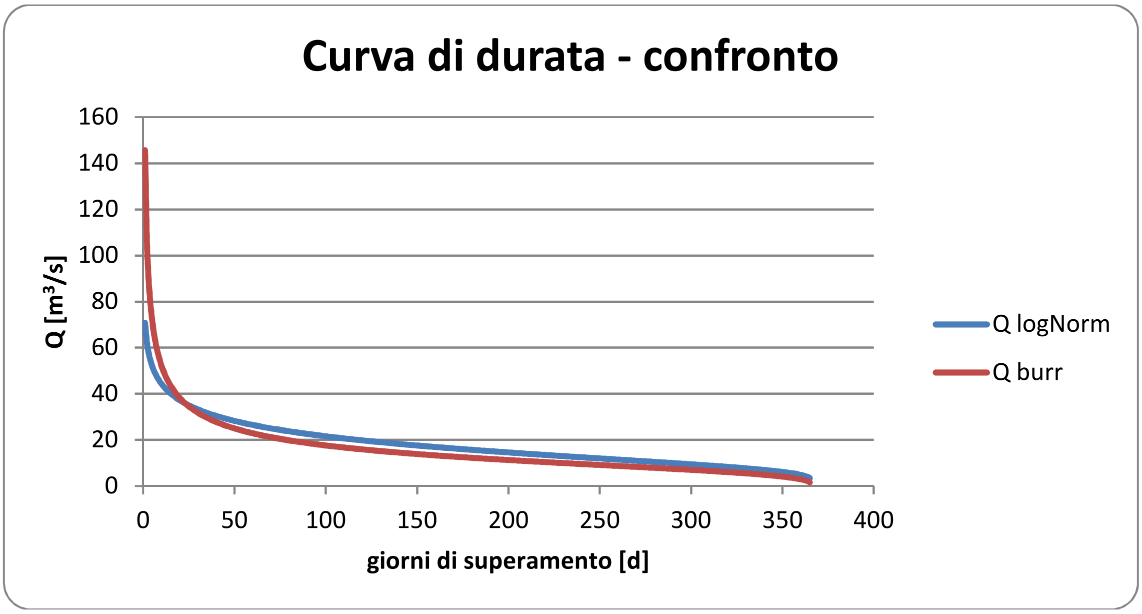


Figura 7.2.2: confronto curve di durata con metodo Burr e distribuzione log - normale

7.3. Metodo empirico basato sulle serie storiche

A partire dai dati originali di portata media giornaliera misurati alla stazione di Gaiola, per un periodo di anni compreso tra il 1942 e il 2010, si costruiscono le curve di durata annuali, e rispetto a quest'ultime si mette in evidenza la curva di durata media.

Con riferimento alla *Figura 7.3.1* riportata alla pagina seguente, si indicano con le linee nere le curve di durata dei singoli anni. La linea rossa in grassetto descrive la curva di durata media, calcolata facendo la media dei valori di portata su un singolo giorno, considerando tutti gli anni per cui sono disponibili i dati.
Φ

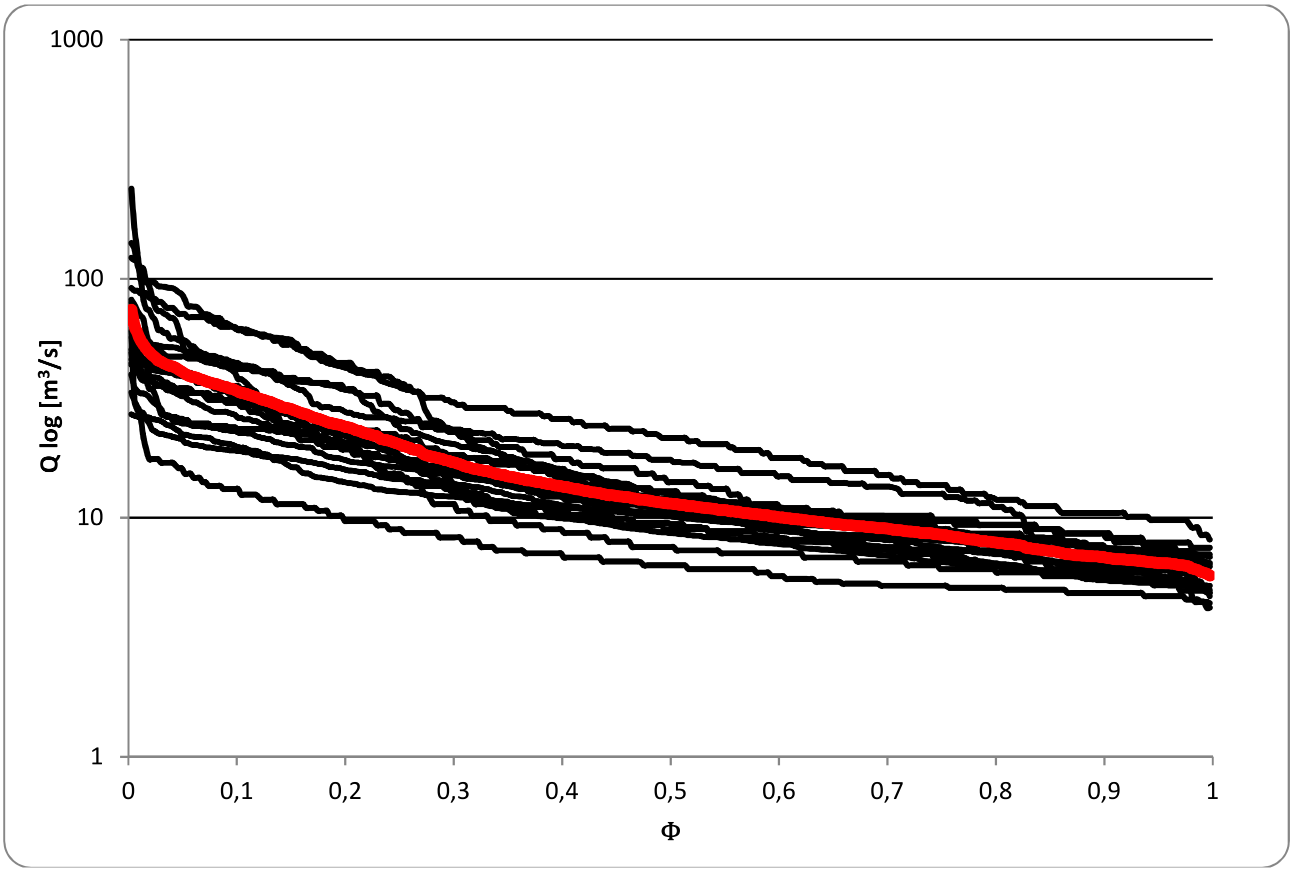


Figura 7.3.1: rappresentazione curve di durata

8. *Valutazione della rarità di un evento di piena*

Parte 1

Si calcola il q_{ind} utilizzando la formula estratta dal Rapporto sulla Valutazione delle piene – Italia Nord Occidentale (Rapporto VAPI):

$$q_{ind} = c_0 * X_1^{c_1} * X_2^{c_2}$$

Conoscendo l'equazione della scala di deflusso, si procede al calcolo della q_{colmo} inserendo nella formula il livello massimo nelle ultime 24 ore, e successivamente si trova $K(T) = {}^{q_{colmo}}/_{q_{ind}}$

Il tempo di ritorno, calcolato con la formula riportata nel Rapporto VAPI, relativa al metodo GEV, è:

$$T = \frac{1}{1 - exp\left\{-\left[1 - \frac{k}{\alpha}(K - \varepsilon)\right]^{1/k}\right\}}$$

Tabella 2: Valori relativi all'Italia Nord Occidentale, zona B (Rapporto VAPI)

ε	α	k	c_0	c_1	c_2
0,635	0,352	-0,32	0,0073	0,92	1,523

Tabella 3: Analisi tempi di ritorno

	San Martino – Chisone	Torino Murazzi – Po	Torino – Dora Riparia
X_1 [km^2]	580,53	5355,47	1321,54
X_2 [mm/ore^n]	17,438	22,56	16,538
q_{ind} [m^3/s]	198,08	2264,39	389,46
h [m]	3,59	6,35	4,29
Equazione scala deflusso	$q = 28{,}4466\,(h + 1{,}25)^{2{,}3671}$	$q = 42{,}598\,h^2 + 107{,}4\,h + 3{,}1732$	$q = 37{,}542\,h^2 - 17{,}907\,h - 21{,}235$
q_{colmo} [m^3/s]	1188,85	2402,82	592,87
$K(T)$	6,0	1,06	1,52
T [anni]	254	3	7

Considerazioni

Le equazioni delle scale di deflusso relativi a "Torino Murazzi – Po" e "Torino – Dora Riparia" sono state individuate diagrammando i valori forniti dall'applicativo "idroweb", scaricato dal sito ARPA Piemonte, nella sezione scala. Sono stati presi in considerazione solo i dati relativi all'anno 2015, essendo questi ultimi quelli che più verosimilmente dovrebbero descrivere la situazione attuale. I valori sono stati poi interpolati con una funzione polinomiale di secondo grado. Si osserva che i tempi di ritorno delle ultime due stazioni sono più bassi rispetto a quello del Chisone a San Martino. Il motivo potrebbe ricercarsi nel metodo utilizzato, in quanto solitamente applicato a bacini di dimensioni ridotte rispetto a quelli considerati, oppure può essere collegato alla scelta dei valori utilizzati per la costruzione delle scale di deflusso.

Parte 2

Si individua l'intensità di riferimento dell'evento dividendo per 24 ore la massima altezza di pioggia misurata in una giornata, che risulta essere 141,0 mm

$$i = \frac{141{,}0\ mm}{24\ h} = 5{,}875\ \ mm/h$$

Si calcola il valore di *K(T)*, utilizzando l'espressione ricavata dal metodo indice: $K(T) = \frac{h_{d,oss}}{h_{d,ind}}$

$h_{d,oss} = i \cdot d,$ con $d = \{1{,}3{,}6{,}12{,}24\}$ ore

$h_{d,ind} =\ ad^n$,con $a = 14{,}282 \quad n = 0{,}4841$

I valori a e n sono stati presi dall'esercitazione 3, in cui è stata analizzata la serie storica delle altezze di pioggia massima annuale misurate a Pragelato. Ciò ha consentito di avere dati più accurati.

I tempi di ritorno sono stati calcolati con il metodo GUMBEL invertendo la formula:

$$K_T =\ 1 - CV_d\left[0{,}45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} ln\left(ln\frac{T}{T-1}\right)\right]$$

Per il metodo GEV è stata utilizzata la formula ricavata dal rapporto VAPI:

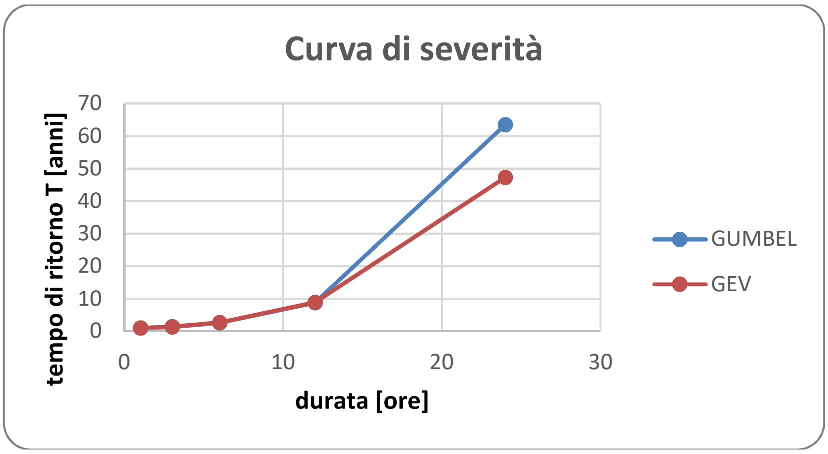
$$T = \frac{1}{1 - exp\left\{-\left[1 - \frac{k}{\alpha}(K - \varepsilon)\right]^{1/k}\right\}}$$

Tabella 4: Dati individuati nell'esercitazione 3

CV	ε	α	k
0,403	0,806	0,292	-0,079

Durata [h]	$h_{d,oss}$ [mm]	$h_{d,ind}$ [mm]	K(T)	T Gumbel* [anni]	T GEV* [anni]
1	5,875	14,282	0,411	1,03	1,02
3	17,625	24,309	0,725	1,36	1,36
6	35,250	34,001	1,037	2,54	2,69
12	70,500	47,558	1,482	8,79	8,89
24	141,000	66,520	2,120	63,49	47,31

* Per una più accurata differenziazione tra i metodi sono stati riportati i tempi di ritorno compresi di termini decimali.



L'andamento della curva è crescente poiché abbiamo assunto una intensità costante su tutte le 24 ore della giornata, inoltre essendo una "intensità media" ciò spiega i tempi di ritorno piccoli per le basse durate.

9. Ricostruzione di un idrogramma di piena osservato

DATI

Determinata la quota media del bacino $\bar{z} = 2151\ m$, si procede al calcolo del tempo di corrivazione t_c con la formula di Giandotti :

$$t_c = \frac{4\sqrt{A} + 1{,}5L}{0{,}8\sqrt{\bar{z} - z_{min}}}$$

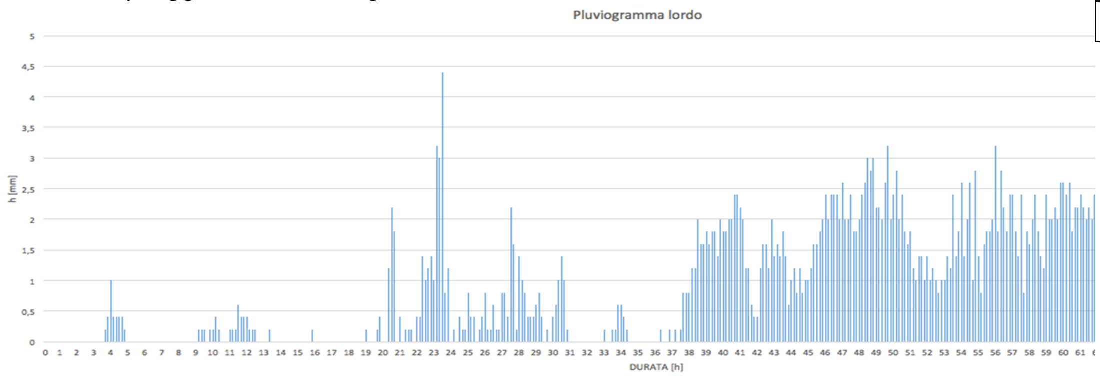
$t_c = 3{,}45\ h \cong 200\ minuti$

$Area\ [km^2]$	154,21
$z_{MAX}\ [m]$	3234
$z_{MIN}\ [m]$	1160
$L\ [km]$	25
Ψ	0,605

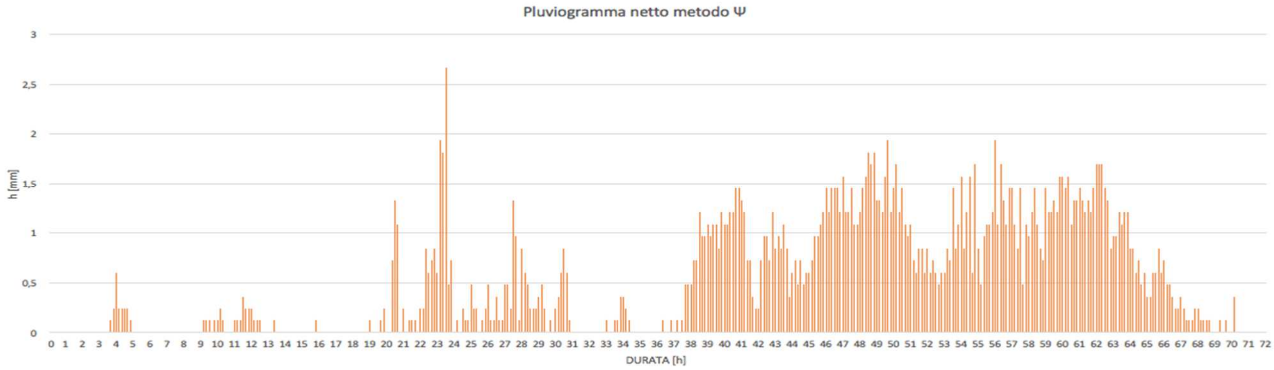
uh
0,0200
0,0559
0,1138
0,1503
0,1775
0,2017
0,1772
0,0790
0,0123
0,0123

PLUVIOGRAMMA LORDO

Il seguente pluviogramma lordo analizza una precipitazione di circa 72 ore, con altezze di pioggia misurate ogni 10 minuti.



Moltiplicando i valori per il coefficiente di afflusso Ψ, otteniamo il seguente pluviogramma netto.



Sapendo che l'altezza complessiva di pioggia netta è pari a 222,76 mm, è necessario ottenere lo stesso bilancio dei volumi anche con il metodo ϕ (con ϕ = tasso di assorbimento, da considerare incognito).

Si esprime il bilanciamento dei volumi tramite la relazione:

$$\sum \Psi \cdot i = \sum (i - \Phi)$$

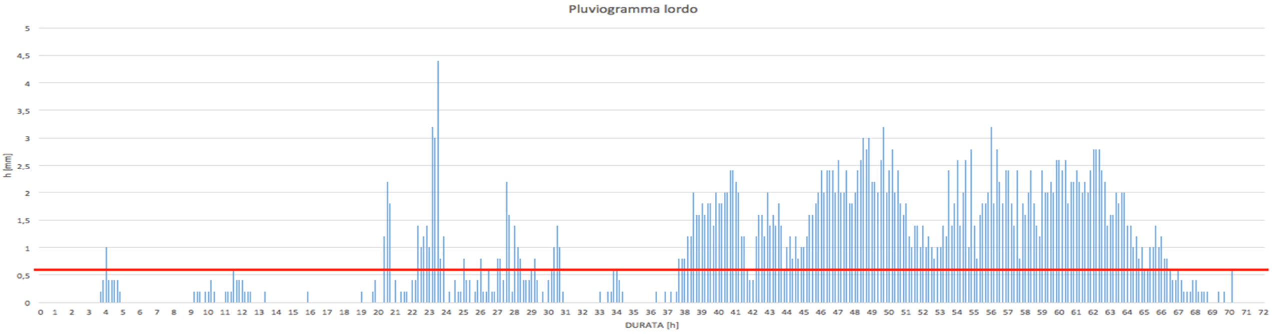
con i = intensità dello ietogramma lordo,

ϕ = tasso di assorbimento incognito;

Se $i - \Phi < 0$ si impone in Excel con la funzione "SE" che il valore sia pari a 0.

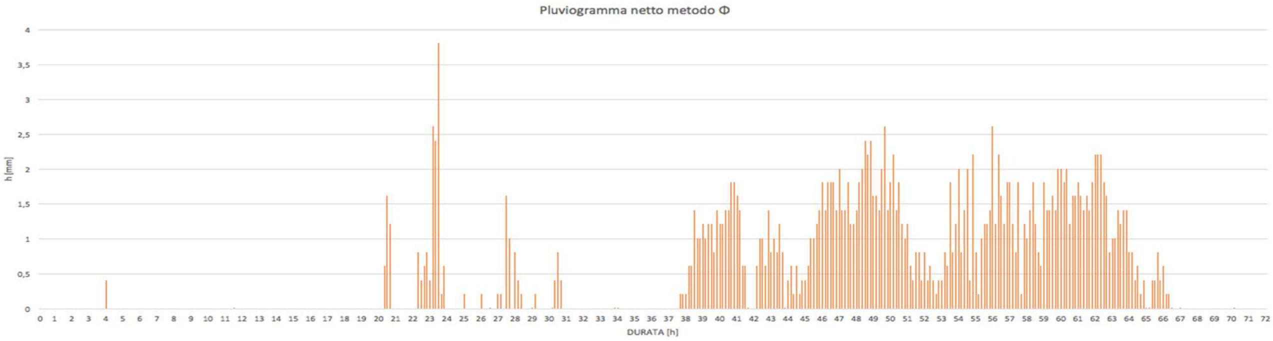
Si itera il processo, facendo variare Φ, finchè non si raggiunge l'equilibrio tra i volumi di pioggia netta

Ciò si traduce graficamente nella ricerca sul pluviogramma lordo dell'altezza di un asse orizzontale: tutto ciò che si troverà al di sopra della soglia sarà quindi pioggia netta, ciò che si troverà al di sotto sarà perso per assorbimento. (Pioggia netta= $i - \Phi$)



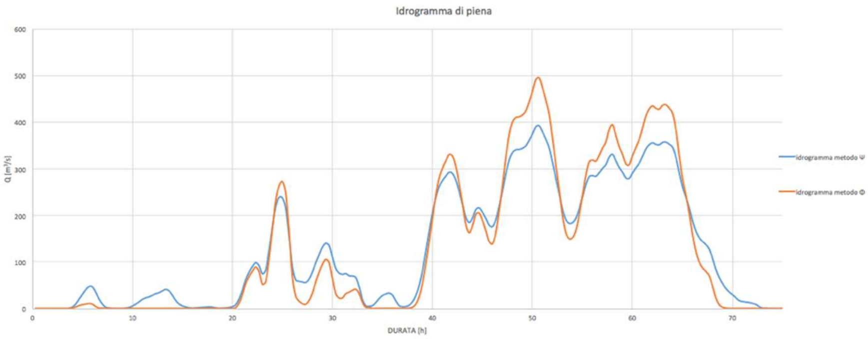
Il valore della Φ varia in base alle intensità considerate (mm/10',mm/20'…). Si riportano tre valori indicativi:

$\Phi_{10\text{min}} = 0{,}595\ mm/10'$ $\quad \Phi_{20\text{min}} = 1{,}16\ mm/20'$ $\quad \Phi_{1\text{ora}} = 3{,}37\ mm/h$



Individuato il valore di Φ, si costruisce l'idrogramma di piena utilizzando una matrice di convoluzione, in cui si inseriscono come aree i valori della funzione di risposta già forniti e come intensità le differenze $i - \Phi$; come verifica, è possibile confrontare il valore della portata di colmo ottenuto con la matrice di convoluzione del metodo Φ con il valore della portata di colmo ottenuto con una matrice di convoluzione in cui si inseriscano le intensità riferite al metodo Ψ. Per l'applicazione del metodo della corrivazione, avendo un tempo di corrivazione di circa 200 minuti, e dovendo considerare 10 aree, si considera un Δt di 20 minuti.

La massima portata al colmo è pari a:



Metodo	***Portata*** $[m^3/s]$
Φ	494,79
Ψ	391,87