TRASFORMAZIONE

PIOGGIA NETTA – DEFLUSSI

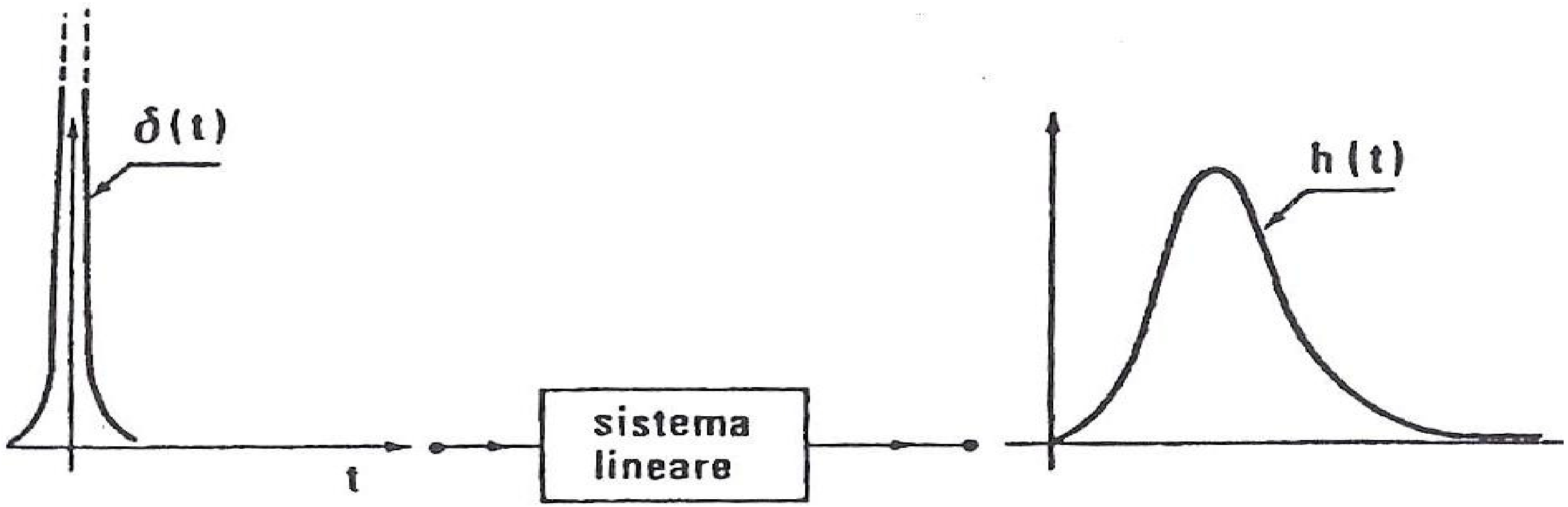
Considerando il bacino idrografico come un sistema lineare e stazionario e sottoponendolo ad una precipitazione detta *i*(t)* essa produce un idrogramma:

$$q(t) = \int_0^t i^*(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Integrale di convoluzione

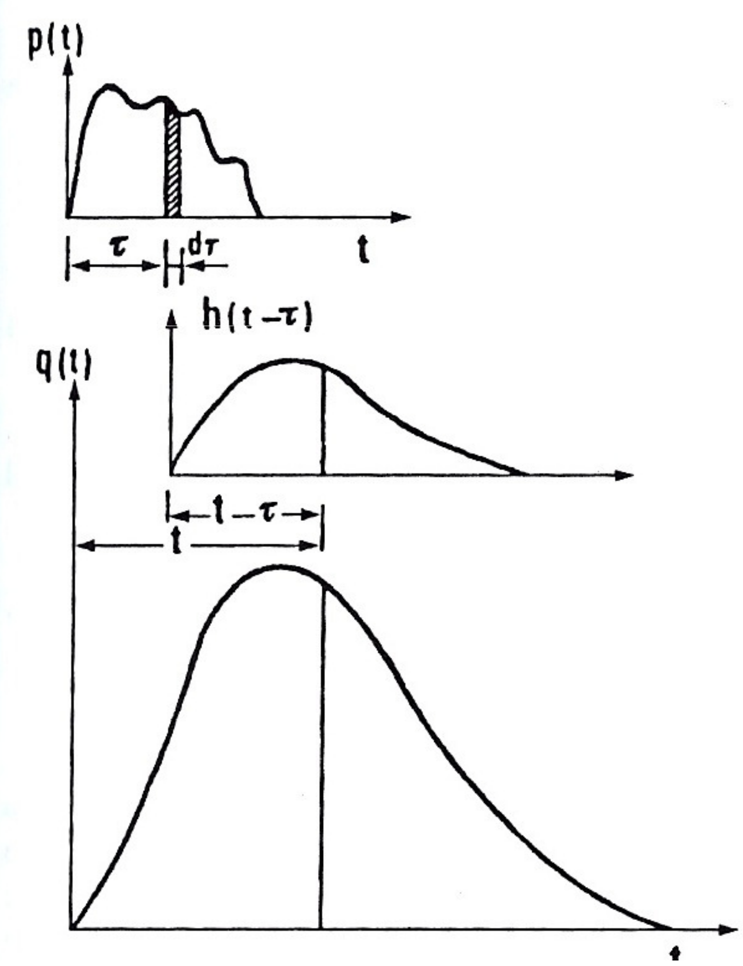
relativo all'unità di area (idrogramma specifico).

La funzione *h(t)* (***Idrogramma Unitario Istantaneo - IUH***) è l'idrogramma prodotto dal bacino sottoposto ad un impulso δ di Dirac, avente durata infinitesima ($\Delta t \rightarrow 0$) ma volume unitario:



La funzione δ di Dirac si definisce come:

$$\delta(t) = h_0(t) = 0 \qquad t \neq 0 \qquad\qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = 1 \qquad t \neq 0$$

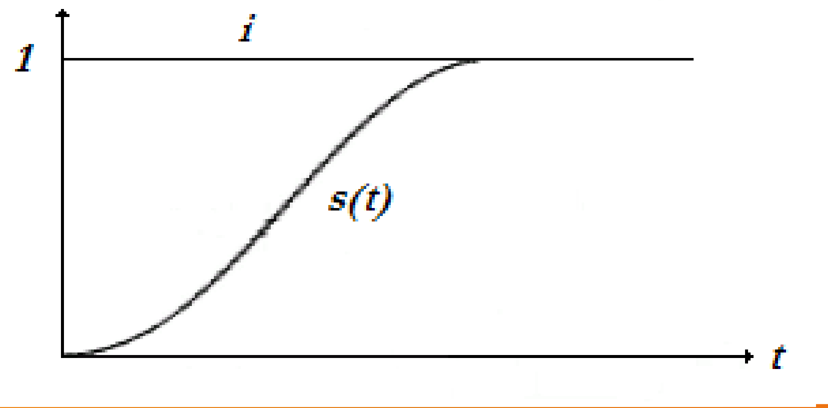


Affinché *Q(t)* mantenga le dimensioni di mm/h (portata per unità di area) *h(t)* deve avere dimensioni pari a *1/t* (il suo integrale è unitario e adimensionale). Per la sovrapposizione degli effetti, se il volume dell'impulso al generico tempo τ è $i^*(\tau)$ esso andrà a generare un IUH la cui ordinata al tempo assoluto *t* sarà:

$$i^*(\tau)\, h(t-\tau)$$

Sommando questo contributo con tutte le altre ordinate già presenti in *t*, originate dagli impulsi arrivati al bacino nell'intervallo [0, *t*] si ha l'integrale di convoluzione. Si consideri una pioggia efficace di intensità continua e uniforme (*i=1*).

L'idrogramma in uscita dal bacino si definisce **diagramma** ad **S** (***S-curve***):



Il diagramma ad S (*S-curve*) considerato come risultato dell'integrale di convoluzione:

$$s(t) = 1\int_0^t h(\tau)d\tau$$

risulta essere una funzione adimensionale e pari all'integrale dell'IUH, tale che:

$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

Metodo della corrivazione.

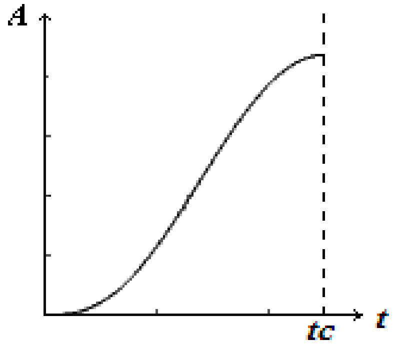


Diagramma tempo - area:
S(t)= frazione dell'area del bacino con tempo di corrivazione minore o uguale a t.

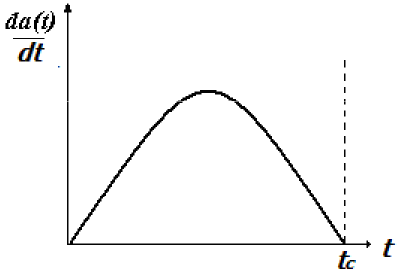


Diagramma di concentrazione tempo- area:

$$h(t) = \frac{da(t)}{dtA}$$ coincide con l'IUH.

Determinazione del diagramma tempo - area (metodo della corrivazione).

Ipotesi: linee isocorrive coincidenti con le isoipse, cioè tempo di corrivazione di una linea isocorriva proporzionale alla differenza di quota rispetto alla sezione di chiusura .

→ Il diagramma tempo - area ha la stessa forma della curva ipsometrica.

Funzione Aree-Distanze.

La lunghezza del reticolo di drenaggio superficiale $Z(x_k)$ calcolata alla distanza x_k si ottiene con:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{k} L(x_i \leq x_k)$$

dove $L(x_i)$ è la lunghezza dei singoli tratti posti a distanza x_i dalla sezione di chiusura.

La lunghezza totale del reticolo idrografico è quindi: $Z = \sum_{i=1}^{R} N(x_i) x_i$

dove x_R è la distanza corrispondente alla lunghezza dell'asta principale.

Se la densità di drenaggio è costante e pari a $D=Z/A$, l'area drenata $a(x_i)$ dalla porzione i-esima del reticolo fino alla sezione di chiusura è pari a:

$$a(x_i) = Z(x_i) / D$$

La frazione dell'area totale del bacino drenata fino alla distanza x_i dalla chiusura è quindi $Z(x_i)/Z$. La funzione Area-distanze $a(x)$ rinormalizzata rispetto all'area totale A del bacino rappresenta la funzione di frequenza cumulata delle distanze che intercorrono tra tutti i punti del bacino e la sezione di chiusura.

Applicazione del metodo della corrivazione in forma discreta

m = numero complessivo di intervalli in cui è suddiviso l' UH;
k = intervallo corrente

$$Q(k) = \sum_{j=1}^{k \le m} i_j \; A_{k-j+1}$$

i_j è l' intensità di precipitazione netta, costante nell' intervallo Δt :

$$i_j = \frac{P_j}{\Delta t}$$

Per avere Q in m^3/s, partendo da A in Km^2 e i_j in mm/h, si deve porre:

$$Q(k) = \frac{1}{3.6} \sum_{j=1}^{k \le m} i_j \; A_{k-j+1}$$

Valutazione dei Tempi di Percorrenza.

Per trasformare la funzione Area-distanze in Area-tempi si assume che durante la piena:

- v_c: velocità corrente costante lungo ogni percorso del reticolo di drenaggio alveato
- v_r : velocità costante di scorrimento delle acque di ruscellamento superficiale lungo i versanti

Tempo di corrivazione totale del bacino: $T_B = T_{mc} + T_v = \frac{L_m}{v_c} + \frac{L_v}{v_v}$
dove:

- T_{mc} : tempo di percorrenza dell'asta principale di lunghezza L_m
- T_v: tempo di percorrenza dei versanti delle acque di ruscellamento.

Per densità di drenaggio costante, un tratto di alveo di lunghezza L_c drena mediamente una superficie L_c/D approssimabile con due falde simmetriche di larghezza L_v= 1/2D

Gli ordini di grandezza delle velocità sono: 1.5 m/s nella rete e 0.3 m/s sui versanti.

Altre ipotesi per la determinazione delle isocorrive:

$$t \approx \frac{L}{\sqrt{\frac{H'}{L}}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{H'^{\frac{1}{2}}}$$

dove: L = distanza dalla sez. di chiusura, H' = dislivello rispetto a *Zmin*

Tempo di corrivazione (o concentrazione) = tempo base dell'IUH

Formula Empirica: $t_c = \frac{L}{1 \div 1{,}5}$

t_c = secondi L in metri v=1:1,5m/s velocità media spazio-temporale.

Formula empirica di **Giandotti:** $t_c = \frac{4\sqrt{A} + 1{,}5L}{0{,}8\sqrt{H'}}$

t_c = ore.

A= [Km^2] Superficie del Bacino.

L= Lunghezza Asta Principale [km].

H'=[m] Altitudine media relativa sulla sezione Z.

Formula empirica di **Kirpich:** $t_c = 3.25 \cdot 10^{-4} \frac{L^{0.77}}{i_m^{0.385}}$

t_c = ore, L = [m], i_m =pendenza media dell'asta principale (pesi lineari)

Derivazione dell'IUH per il sistema concettuale Invaso Lineare.

$$V = kQ$$

V : volume d'acqua invaso sul bacino.
k : costante (tempo) caratteristica dell'invaso.

Equazione di continuità:

$$r(t) - Q(t) = -\frac{dV(t)}{dt}$$

Equazione differenziale lineare
(equazione dell'invaso lineare):

$$k\frac{dQ(t)}{dt} + Q(t) = r(t)$$

$$r(t) = i(t) \cdot A$$

Portata di afflusso

Moltiplicando ambo i membri per $e^{\frac{t}{k}}$ si ha: $$ke^{\frac{t}{k}}\frac{dQ}{dt}+e^{\frac{t}{k}}Q=re^{\frac{t}{k}}$$

e risolvendo: $$\frac{d}{dt}(ke^{\frac{t}{k}}Q)=re^{\frac{t}{k}}$$

Considerando le condizioni iniziali ($Q=Q_0$ al tempo $t=0$) si ha:

$$\int_{Q_0,0}^{Q_t,t} d(kQe^{\frac{\tau}{k}})=\int_0^t r(\tau)e^{\frac{\tau}{k}}d\tau \qquad Q(\tau)e^{\frac{\tau}{k}}-Q_0=\int_0^t \frac{1}{k}e^{\frac{\tau}{k}}r(\tau)d\tau$$

da cui:

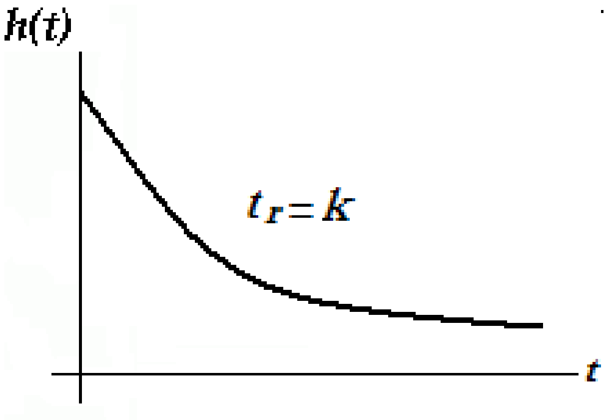
$$Q(\tau)=e^{-\frac{t}{k}}Q_0+\int_0^t \frac{1}{k}e^{-\frac{(t-\tau)}{k}}r(\tau)d\tau$$ se $Q_0=0$ $$Q(t)=\int_0^t \frac{1}{k}e^{-\frac{(t-\tau)}{k}}r(\tau)d\tau$$

Esaurimento per invaso lineare

Confrontando con: $Q(t)=\int_0^t h(t-\tau)r(\tau)d\tau$

IUH dell'invaso lineare

$$h(t)=\frac{e^{-\frac{t}{k}}}{k} \qquad h(t=0)=\frac{1}{k}$$



Forma della risposta impulsiva non molto realistica per un bacino idrografico

Tempo di ritardo: distanza dall'origine del baricentro dell'IUH. In questo caso coincide con il parametro K.

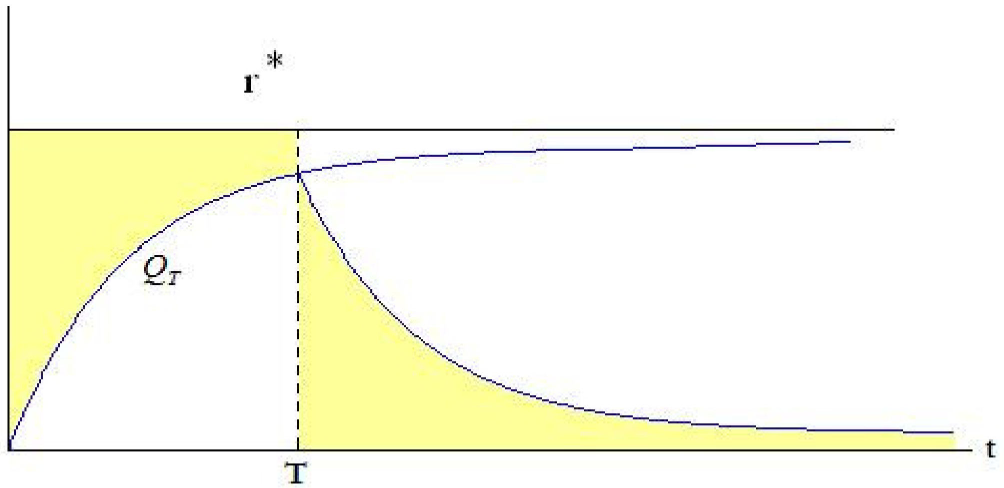
Sistema in svuotamento:

$Q=Q_0e^{-\frac{t}{k}}$ da cui $\ln Q=\ln Q_0-\frac{t}{k}$ → stima di k

Si consideri il caso di intensità di precipitazione costante nel tempo. Integrando la relazione si ha:

$$Q(t) = r\int_0^t \frac{1}{k} e^{-\frac{\tau}{k}} d\tau$$

$$Q(t) = r(1 - e^{-\frac{t}{k}})$$



Se la pioggia si interrompe al tempo t=T si ha: $Q(t) = r(1 - e^{-\frac{t}{k}})$

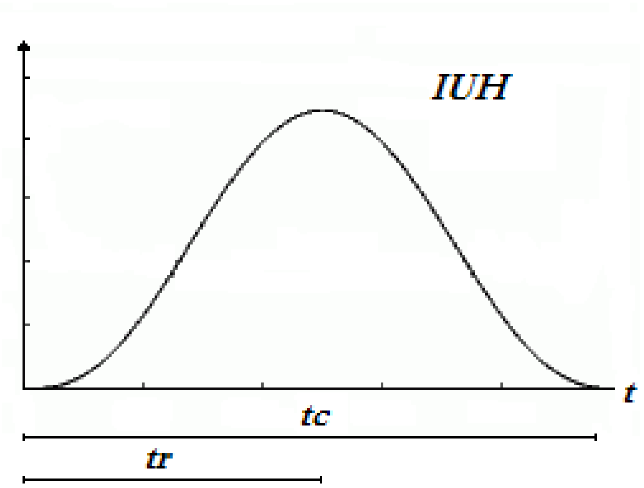
Successivamente la portata decresce con legge:

$$Q(t) = Q(T)\, e^{-\frac{(t-T)}{k}}$$

Legge di esaurimento (svuotamento) di un invaso lineare

Tempo di ritardo: distanza dall'origine del baricentro dell'IUH.

Formula di *Rossi (1974)*



$$t_r = 0{,}77\left(\frac{L}{\sqrt{i_m}}\right)^{0{,}295}$$

tr = ore,
L = [Km]
im = pendenza media dell'asta principale secondo Taylor-Schwartz.

$$t_r = \frac{1.25\sqrt{A}}{3.6\,c}$$

tr = ore,
A= area in *Km*^{2}, *c*=celerità della corrente

La seconda espressione deriva dalla relazione:

(*Troutman e Karlinger*) $$t_r = \frac{\bar{L}\sqrt{\pi M}}{c}$$

M= magnitudine della rete idrografica (n. di aste del I ordine)

$\bar{L}$ = Lunghezza media dei links nella rete; t_r è espresso in secondi.

Risposta impulsiva di sistemi in serie

Funzione di risposta del sistema complessivo ottenuta tramite convoluzione degli IUH dei due sistemi:

$$h(t) = \int_0^t h_1(\tau)\, h_2(t-\tau) d\tau \qquad (*)$$

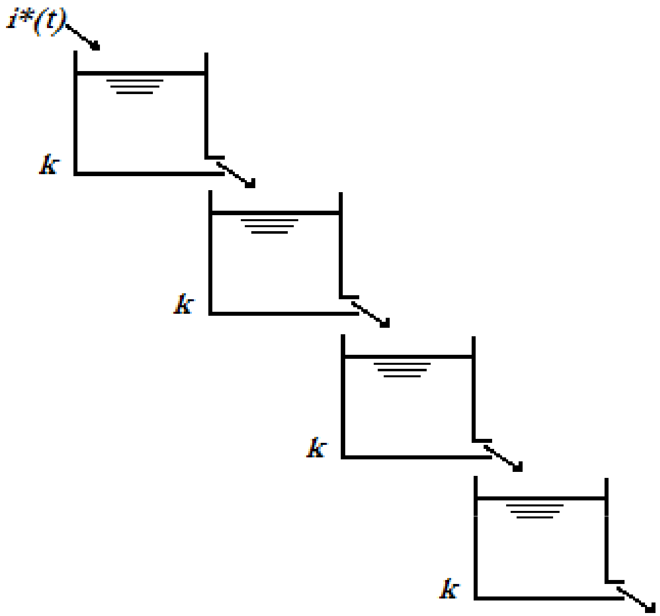
Infatti, se il sistema complessivo è sollecitato da un ingresso impulsivo, la funzione di risposta individuale del subsistema 1 è pari a $h_1(t)$. Risultando $h_1(t)$ anche l'ingresso al subsistema 2, l'uscita del sistema 2 (= all'uscita del sistema complessivo sollecitato da ingresso impulsivo) è pari alla (*), che rappresenta così l'IUH di due sistemi in serie.

Risposta impulsiva di sistemi in parallelo

Frazionamento dell'ingresso in quote percentuali *a* e *(1-a)*. L'uscita è frazionata allo stesso modo:

$$h(t) = a\, h_1(t) + (1-a)\, h_2(t)$$

Metodo di Nash: n serbatoi in serie di eguale costante k.



In base alla relazione fornita per l'IUH di sistemi in serie, per due serbatoi si ha:

$$h^{II}(t) = \int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{k}e^{-\frac{\tau}{k}} \frac{1}{k}e^{-\frac{(t-\tau)}{k}} d\tau \Rightarrow \quad h^{II}(t) = \frac{1}{k^2}e^{-\frac{t}{k}}t$$

Per tre serbatoi in serie si può porre:

$$h^{III}(t) = \int_0^t \frac{1}{k}e^{-\frac{t-\tau}{k}} \frac{1}{k^2}\tau e^{-\frac{\tau}{k}} d\tau = \frac{1}{2k^3}t^2 e^{-\frac{t}{k}}$$

Si ha pertanto:

n intero: $h(t) = \frac{1}{k(n-1)!}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{k}}$ n non intero: $h(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{k}}$

equivalente alla densità di probabilità della distribuzione Gamma.

Funzione Gamma completa: $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx$ $\Gamma(n) = (n-1)!$

Formule che consentono la stima dei parametri dell' IUH Nash:

$t_r = M_1(h) = nk$ $M_2^{'} = Var(h) = nk^2$