DISTRIBUZIONE LOG-NORMALE.

La variabile X si dice log-normalmente distribuita se:

$Y = \ln X$ è normalmente distribuita

$$Y = g(X) = \ln X \qquad \rightarrow \qquad X = g^{-1}(Y) = e^{Y} \qquad X \geq 0 \qquad -\infty \leq Y \leq +\infty \quad .$$

Funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \left|\frac{dY}{dX}\right| f_Y(y) = \left|\frac{dg(x)}{dx}\right| f_Y(g(x))$$

$$\left|\frac{dg(x)}{dx}\right| = \frac{1}{x}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$F_X(X) = P\left[X \leq x\right] = P\left[\ln X \leq \ln x\right] = P\left[Y \leq \ln x\right] = F_Y(\ln x)$$

Espressioni teoriche dei momenti:

$$\mu_y = Y_{0.50} = \ln X_{0.50} \qquad \begin{cases} \mu_x = E\left[X\right] = X_{0.50}\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_y^2\right) = \exp\left(\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2\right) \\ \sigma_x^2 = \mu_x^2\left[\exp(\sigma_y^2) - 1\right] \\ Cv_x^2 = \exp(\sigma_y^2) - 1 \\ Ca_x = 3Cv_x + Cv_x^3 \end{cases}$$

Relazioni tra momenti e parametri:

Due parametri: μ_Y e σ_Y^2.

Due momenti della popolazione: μ_X e σ_X^2

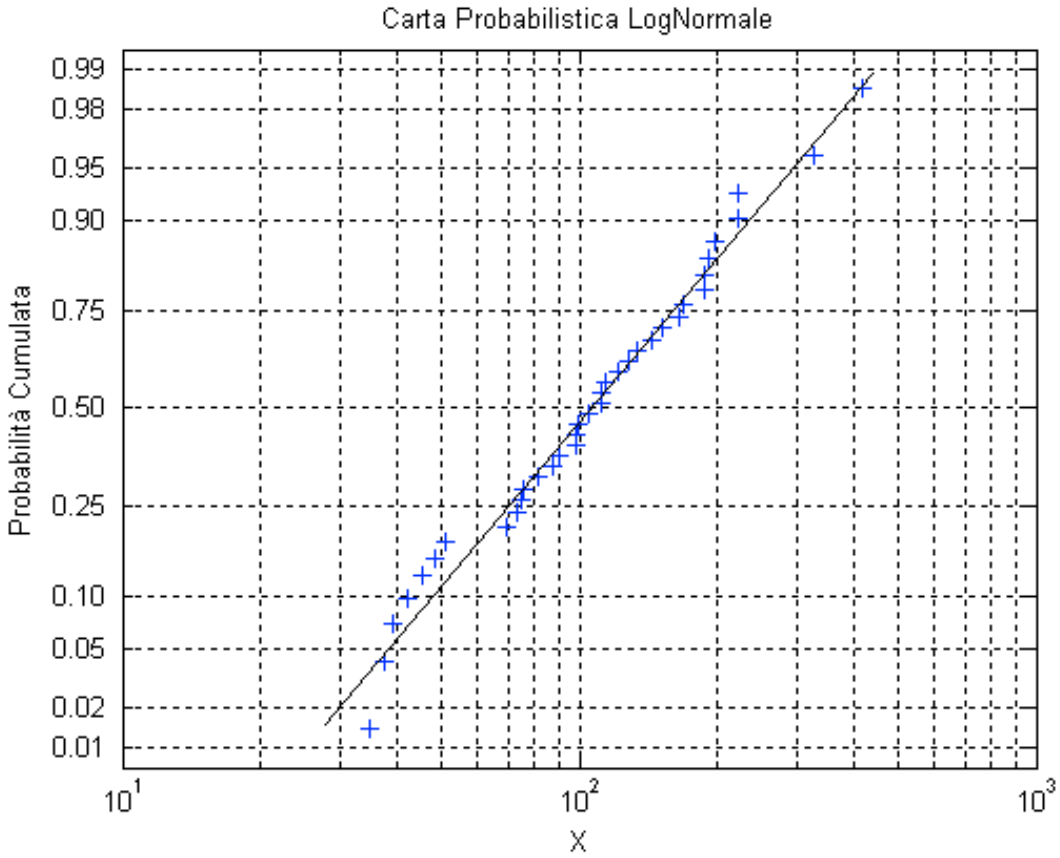
$$\mu_Y = \ln\mu_X - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \qquad \sigma_Y^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)$$

Espressioni semplificate:

$\sigma_Y^2 = \ln(1 + Cv_x^2)$ –> $\sigma_Y \cong Cv_x$ per $Cv_x < 0.3$

–> $\mu_Y \cong \ln\mu_X - \frac{1}{2}Cv_X^2$

$Ca_X = \dfrac{E\left[(x-\mu_x)^3\right]}{\sigma_x^3} = 3Cv_x + Cv_x^3 \cong 3Cv_x$ –> $Ca_X \cong 3Cv_x$ per Cv_x piccolo



Tracciamento della retta in base al passaggio per 2 punti (si ricordi che con asse delle ascisse cartesiano e relativo alla variabile Y nulla cambia rispetto alla carta probabilistica normale):

1. $[F_X = 0.5, x_{0.5}]$ che, tenuto conto che $F_X(x(y_{0.5})) = 0.5 = F_Y(y_{0.5})$ e che $y_{0.5} = \mu_y$ (per la normalità) diventa $[F_X = 0.5, e^{\mu_y}]$
2. $[F_X = 0.841, e^{\mu_y + \sigma_y}]$, sempre per la corrispondenza tra le x e le y a pari valore di F

LEGGE NORMALE DELLE POTENZE. (Trasformata di Box-Cox).

$$Y = \frac{X^{\nu} - 1}{\nu} \qquad \nu \neq 0$$

$$Y = \ln X \qquad \nu = 0$$

$$X \approx N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \approx PN(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Ca[Y] = 0$$

$$Ca[X] = 3(1-\nu)Cv_x$$

$$\nu = 1 \qquad X = Y \qquad Ca[Y] = 0$$

$$\nu = \frac{1}{2} \qquad Y = X^{\frac{1}{2}} \qquad Ca[Y] \cong 1.5Cv_x$$

$$\nu = 0 \qquad Y = \ln X \qquad Ca[Y] \cong 3Cv_x$$

<u>Distribuzione normale delle radici quadrate</u>

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{1}{2\sigma_y^2}\left(\sqrt{x} - \mu_r\right)^2\right]$$

Stima con il metodo dei momenti, (Lloyd, 1980):

$$\mu_y = \sqrt{\mu_X} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_X^2}{8\mu_X^2}\right) \qquad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_X^2}{4\mu_X}$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

La funzione densità di probabilità esponenziale è definita come:

Nella forma più usuale, nella quale il parametro è $\alpha=1/\Lambda$, la distribuzione Esponenziale assume la forma:

$$f[x] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \qquad F[x] = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

Le relazioni teoriche dei momenti sono:

$E[X] = 1/\alpha$ $\quad Var[X] = 1/\alpha^2$ $\quad Cv = 1/\alpha$

$Ca[X] = 2$ $\quad K[X] = 9$

MODELLO DEL MASSIMO VALORE.

Si consideri una serie di n variabili casuali $\left(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\right)$ in sequenza ordinata e sia

$$X_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} X_i$$

La probabilità cumulata di questa variabile non può che dipendere da quelle delle altre *n-1*:

$$F_{X(n)}(x) = P\left[X_{(n)} \le x\right] = P\left[X_1 \le x,\ X_2 \le x, \ldots, X_n \le x\right]$$

Se gli X_i sono indipendenti:

$$F_{X(n)}(x) = P\left[X_1 \le x\right] \cdot P\left[X_2 \le x\right] \cdot \ldots\ldots \cdot P\left[X_n \le x\right] = F_{X1}(x)\, F_{X2}(x) \ldots\ldots\ldots\, F_{Xn}(x)$$

Se gli X_i sono identicamente distribuiti con funzione di distribuzione cumulata $F_x(x)$

$F_{X(n)}(x) = \left[F_X(x)\right]^n$ o semplicemente $F_n(x) = \left[F(x)\right]^n$

DISTRIBUZIONI ASINTOTICHE.

$$F_n(x) = \left[F(x)\right]^n = \left[1 - n(1-F) + \frac{n(n-1)}{2}(1-F)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)(1-F)}{6} + \ldots\ldots\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \left[1 - n(1-F) + \frac{n^2}{2}(1-F)^2 - \frac{n^3}{6}(1-F)^3 + \ldots\ldots\right] = e^{-n(1-F)}$$

Per n grande:

$$F_n(x) = e^{-n(1-F(x))}$$

Al crescere di n la distribuzione di $X_{(n)}$ è relativamente insensibile alla esatta forma della distribuzione delle X_i. E' stato dimostrato che, a seconda della caratteristica della distribuzione delle X_i nella coda destra, la distribuzione della massimo $X_{(n)}$ tende a solo 3 distribuzioni asintotiche:

(1) $$\Phi_1(x) = \exp\left[-e^{-\alpha(x-\varepsilon)}\right] \qquad \alpha > 0$$

(2) $$\Phi_2(x) = \exp\left[-\left(\frac{\nu}{x}\right)^{\vartheta}\right] \qquad x \geq 0; \nu > 0; \vartheta > 0$$

(3) $$\Phi_3(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\nu}\right)^{\vartheta}\right] \qquad x \leq 0; \nu < 0; \vartheta > 1$$

La distribuzione asintotica del tipo 1 o di Gumbel vale quando la coda superiore della variabile originaria cade in maniera esponenziale, cioè se, per x abbastanza grande vale:

$$F_x(x) = 1 - e^{-g(x)}$$

essendo $g(x)$ una funzione crescente di x.

Esempio:

$g(x) = \alpha x$ $\qquad\qquad\qquad$ $F_x(x) = 1 - e^{-\alpha x}$

Distribuzione esponenziale: $E(x) = \dfrac{1}{\alpha}$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \exp\left[-n(1 - F_X(x))\right] = \exp\left[-ne^{-\alpha x}\right] = \exp\left[-e^{-\alpha(x-\varepsilon)}\right] = \Phi_1(x)$$

con

$$n = \exp(\alpha\varepsilon).$$

Il massimo di n variabili esponenziali con media $\dfrac{1}{\alpha}$ è distribuito secondo la legge di Gumbel per n abbastanza grande.

Distribuzione asintotica del tipo II o di Frèchet: se, per x abbastanza grande vale:

$$F_x(x) = 1 - \gamma\left(\frac{1}{x}\right)^k$$

la relazione tra la distribuzione di tipo I e quella di tipo II è la stessa che tra distribuzione normale e log – normale.

Se x è distribuito con $\Phi_2(x) = \exp\left[-\left(\frac{\nu}{x}\right)^{\vartheta}\right]$ $\qquad$ $y = \ln x$ è distribuito come $\Phi_1(\ln x)$

Infatti $\Phi_1(\ln x) = \exp\left[-e^{-\alpha(x-\varepsilon)}\right] = \exp\left[-\left(\frac{\nu}{x}\right)^{\vartheta}\right]$ $\qquad$ per $\vartheta = \alpha$ $\qquad$ $\varepsilon = \ln\nu$

distribuzione di Frèchet = log – Gumbel.

La distribuzione asintotica di tipo III è limitata superiormente. Interessa solo per estremi minimi.

Poiché le variabili idrologiche sono in genere di tipo esponenziale, la distribuzione asintotica del massimo valore di tipo I (Gumbel) è quella che interessa di più in idrologia.
Esempio: Massimo annuale della portata di piena (piena annuale) o Massimo annuale della pioggia giornaliera.

Se non è nota esattamente la distribuzione dei valori di colmo durante i singoli eventi di piena o di pioggia si può applicare la distribuzione di Gumbel invece che applicare la relazione esatta $F_n(x) = \left[F(x)\right]^n$

DISTRIBUZIONE EV1 o DI GUMBEL.

$$F_X(x) = \exp\left[-\Lambda e^{-\alpha x}\right] = \exp\left[-e^{-\alpha(x-\varepsilon)}\right]$$

con: $\exp(\alpha\varepsilon) = \Lambda$ (al posto di *n*)

Significato dei parametri:

- Λ: Numero medio di eventi indipendenti in $[0,t]$, ad esempio in un anno.
- $1/\alpha$:Valore medio della grandezza dell'evento, esempio portata al colmo.

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \alpha \exp\left[-\alpha(x-\varepsilon) - e^{-\alpha(x-\varepsilon)}\right]$$

$$E[x] = \mu = \varepsilon + \frac{0.57722}{\alpha} \qquad \varepsilon = \mu - 0.450\sigma$$

$$\mathrm{var}[x] = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma\sqrt{6}}{\pi}$$

$$Cv[x] = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\pi}{\sqrt{6}(\alpha\varepsilon + 0.57722)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}(\ln\Lambda + 0.57722)}$$ dipende solo da Λ

$$Ca[x] = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = 1.1396$$ Coefficiente di asimmetria, <u>indipendente dal valore dei parametri.</u>

$f_X(\varepsilon) = \alpha e^{-1} = \max \Rightarrow \varepsilon$ è la **moda** di x $\qquad F_X(\varepsilon) = e^{-1} = 0.368$

$\frac{1}{\alpha}$: è proporzionale a σ (misura di dispersione).

$(\alpha\varepsilon), \Lambda$: dipendono solo dal coefficiente di variazione Cv .

Variabile ridotta: $Y = \alpha(x - \varepsilon)$

$E\left[Y\right] = 0.57722$ *costante di Eulero* $\qquad var\left[Y\right] = \frac{\pi^2}{6}$

$\varepsilon[Y] = 0 \qquad \frac{1}{\alpha}\left[Y\right] = 1 \qquad \Lambda\left[Y\right] = 1$

$\Phi(Y) = P\left[Y \le y\right] = \qquad F_Y(y) = \exp(-e^{-y})$

$Y \approx EV1\left(0,1\right) \qquad X \approx EV1\left(\varepsilon, \frac{1}{\alpha}\right)$

$Y_F = -\ln\ln\frac{1}{F} \qquad X_F = \varepsilon + \frac{Y_F}{\alpha} = \quad \varepsilon - \frac{1}{\alpha}\ln\ln\frac{1}{F} \quad = \frac{1}{\alpha}(\ln\Lambda - \ln\ln\frac{1}{F})$

(***Quantile della distribuzione per assegnato F***)

Valore di progetto X_T con il periodo di ritorno T :

$$T = \frac{1}{p} = \frac{1}{(1-F)}$$

$$X_T = \varepsilon - \frac{1}{\alpha}\ln\ln\frac{T}{T-1} = \qquad \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\alpha\varepsilon}\ln\ln\frac{T}{T-1}\right)$$

Considerando le relazioni tra i momenti teorici ed i parametri ε ed α ,

$$\alpha\bar{x} = \frac{\pi}{Cv_x\sqrt{6}} = \frac{\pi}{\mathrm{Cv_x}\sqrt{6}} \qquad\qquad \frac{\varepsilon}{\bar{x}} = 1 - 0.45\, Cv_x$$

si può pervenire ad una relazione tra la variabile di progetto e media e Cv del campione, valida secondo l'approssimazione del metodo dei momenti:

$$X_T = \bar{x}\ \{1 - Cv_x\,[0.45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi}\ \ln\ln\,(\frac{T}{T-1})]\}$$

FORMA CARATTERISTICA

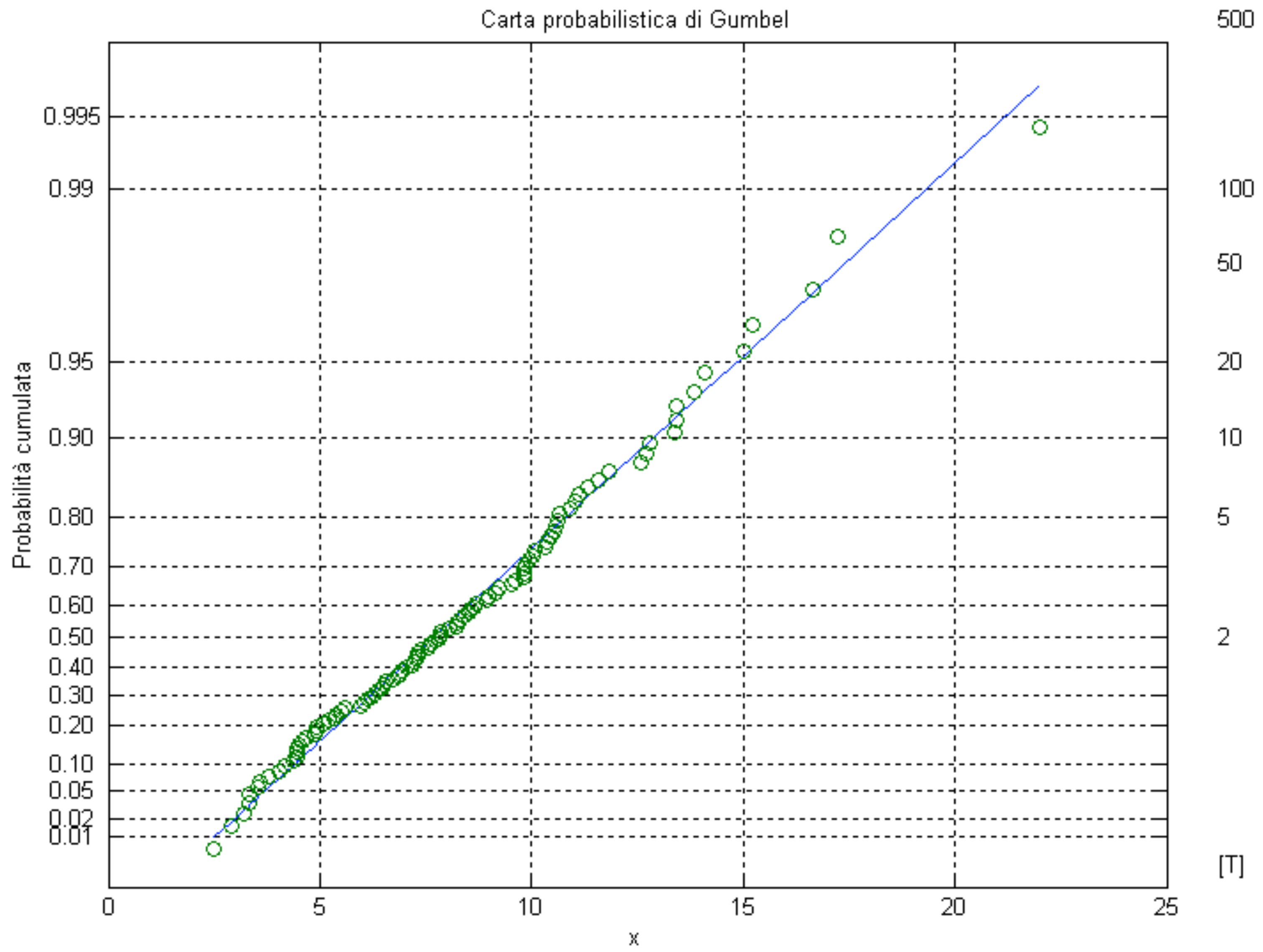
$$X_T = \varepsilon\left(1 - k'\log\ln\frac{T}{T-1}\right) \qquad \text{con } k' = \frac{1}{0{,}4343\alpha\varepsilon} \text{ (caratteristica della distribuzione)}$$

Per T abbastanza grande, in genere superiore ai 20 anni, vale che $\ln\frac{T}{T-1} \cong \frac{1}{T}$;

Di conseguenza X_T può essere espressa come:

$$X_T \cong \varepsilon\left(1 + k'\log T\right) \quad \text{dove } k' = \frac{1}{\log\Lambda} \qquad \Rightarrow$$

X_T varia linearmente con Log T



Carta probabilistica di Gumbel
Probabilità cumulata
x
0.995
0.99
0.95
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.05
0.02
0.01
0
5
10
15
20
25
500
100
50
20
10
5
2
[T]