CURVE DI DURATA:
Introduzione e Rappresentazione analitica

Premesse

Si definisce durata di una portata Q riferita ad una sezione di misura, l'intervallo di tempo in cui le portate naturali del corso d'acqua si mantengono superiori o uguali al valore Q considerato. Per *curva di durata* si intende la rappresentazione grafica della relazione fra tutti i valori assunti dalla portata nel corso d'acqua nel periodo di osservazione e le rispettive durate.

Le curve di durata possono essere intese anche come curve di frequenza, rapportando la durata alla lunghezza dell'intero periodo di osservazione. In questo senso, al minimo assoluto di portata compete frequenza (di superamento) pari ad 1.

Per la costruzione pratica di queste curve si fa riferimento ai dati di *portata media giornaliera.* Esse sono, in genere, riferite ad intervalli di un anno; in particolare, può essere conveniente far riferimento all'*anno idrologico*, che per convenzione ha inizio il 1° ottobre e termina il 30 settembre. Nell'anno idrologico risulta generalmente più chiara la valutazione dell'entità della risorsa idrica che si è resa disponibile nell'arco dei 12 mesi, in quanto non si interrompe la stagione invernale che, nei climi temperati, è la più ricca d'acqua.

Per la costruzione delle curve di durata si parte dal diagramma cronologico delle portate disponendo i valori in ordine *decrescente.* La posizione n di ogni elemento Q del vettore così ottenuto rappresenta il numero dei giorni dell'anno nei quali la Q è stata eguagliata o superata (n=durata); il rapporto

$$F = \frac{n}{N}$$

in cui N è la lunghezza della serie considerata, rappresenta una *frequenza cumulata (o di superamento)* .

Disponendo invece i valori della portata in ordine crescente si ottiene una curva crescente, con concavità verso sinistra, che è detta *diagramma dei complementi di durata*, ed il rapporto

$$F_1 = \frac{(N - n)}{N} = 1 - F \qquad (5.1.2)$$

rappresenta la *frequenza di non superamento*.

Generalmente, si preferisce rappresentare le curve di durata in forma adimensionale, per confrontare meglio le curve che si ottengono per bacini di diverse dimensioni, eliminando l'effetto dell'area. Tale rappresentazione è, peraltro, essenziale per affrontare una analisi regionale, nella quale si ricercano legami tra le caratteristiche climatiche e fisiografiche dei bacini idrografici e caratteristiche delle curve di durata.

***Relazioni analitiche proposte per le curve di durata*.**

Per operare quantitativamente con le curve di durata è conveniente ricercare per esse un'espressione analitica, possibilmente semplice e con buona capacità di rappresentazione.

Tra le formule di origine empirica si può citare quella di *Fuller-Coutagne,* in cui si considera la curva dei complementi di durata rappresentandola con l'equazione:

$$Q = Q_0 + a\, t^n$$

in cui Q_0, a ed n sono tre parametri da stimare.

Molto usata è la rappresentazione detta *legge di Galton-Gibrat* che si ottiene usando la funzione normale di Gauss ma applicando alla variabile la trasformazione logaritmica; corrisponde, pertanto, alla legge di distribuzione Log-Normale. L'equazione utilizzata è la seguente:

$$z(Q) = a \log(Q - Q_0) + b$$

caratterizzata dei parametri, a, b e Q_0 e dalla variabile z, che è la variabile normale standard. Q_0 rappresenta il valore di Q per cui $z = -\infty$, ma è principalmente un parametro che consente un migliore adattamento della curva ai dati. In teoria avrebbe però il significato di portata di soglia minima assoluta, circostanza che ne semplifica la determinazione.

Franchini e Ferraresi (1988) propongono una funzione del tipo:

$$F = 1 - a(Q - c)^b \qquad Q \geq 0$$

dove:

F = frequenza di superamento della portata Q;

a, b, c, = parametri da stimare.

Tale tipo di funzione è stato proposto per la sua flessibilità, in quanto in grado di rappresentare, con i tre parametri a, b e c, diversi andamenti di curve delle durate, senza ricorrere al supporto della variabile normale standard.

Uso della rappresentazione lognormale delle curve di durata.

Per la rappresentazione analitica delle curve di durata si adotta frequentemente la rappresentazione Log-Normale, nella quale è necessario definire:

Q = portata media giornaliera corrispondente una determinata durata (frequenza);

Q_0 = limite inferiore (asintotico) della curva di durata.

Successivamente le portate si adimensionalizzano dividendole per la media del periodo registrato, Q_m:

$$q = \frac{Q}{Q_m}.$$

Come definizione di frequenza si utilizza la *Weibull Plotting Position*, secondo cui:

$$Prob(q^* \geq q) = \frac{n}{N+1} = 1 - F$$

in cui:

n = posizione del dato q nella serie ordinata in senso decrescente;

N = lunghezza del campione di dati;

F = Frequenza cumulata.

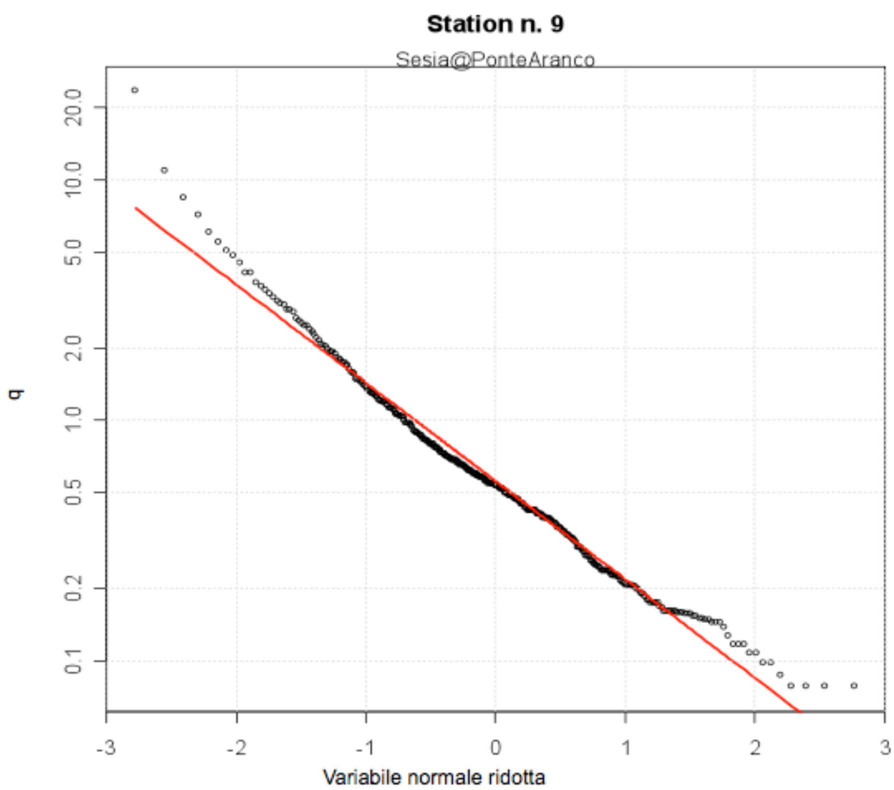
Con questa determinazione la dimensione del campione viene ampliata di un'unità per non assegnare una frequenza di superamento del 100 % (certezza di superamento) al dato più piccolo delle serie (valore minimo osservato).

Se i logaritmi delle portate giornaliere si distribuiscono normalmente, allora in carta probabilistica normale si otterrà una serie di punti che seguono un andamento rettilineo. Pertanto la variabile normale standard *z(F)* si mette in relazione alla portata Q nel seguente modo:

$$\ln(q - q_0) = \alpha + \beta * z$$

dove:

α = intercetta; β = pendenza; $q_0 = Q_0 / Q_m$.



Stima dei parametri.

Per la stima dei parametri α e β si possono usare due procedure:

La prima è basata sul metodo dei momenti ed utilizza le seguenti formule (Rosso-Kottegoda, 1997):

$$\beta = -\sqrt{\ln\left[1 + \frac{\sigma^2}{(\mu - q_0)^2}\right]}$$

$$\alpha = \ln(\mu - q_0) - \frac{1}{2}\beta^2$$

nelle quali σ e μ rappresentano la deviazione standard e la media campionarie dei dati non trasformati;

La seconda procedura è basata su una semplice interpolazione dei dati sperimentali secondo la:

$$\ln(q - q_0) = \alpha + \beta * z$$

in cui α e β sono ottenuti da una regressione lineare tra $ln(q\text{-}q_0)$ e z.

Per la stima di q_0 ci sono due possibilità:

1. Metodo dei momenti

Il parametro può essere ottenuto attraverso la soluzione numerica dell'equazione cubica:

$$\gamma_1(\mu - q_0)^3 - 3(\mu - q_0)^2\sigma - \sigma^3 = 0$$

che ammette due soluzioni complesse ed una reale. γ_1 è il coefficiente di asimmetria campionario.

2. Stima a priori, basata sul suo significato fisico (necessaria per la seconda procedura di stima di α e β)

Dal momento che q_0 ha il significato di grandezza limite inferiore della curva lognormale, è necessario che questo valore non sia superiore al minimo assoluto dei dati osservati. Per attribuire un valore regionevole a q_0 basato sui dati a disposizione, si possono usare i due criteri:

$q_0 = 0.4\ q_{95}$ purchè $q_0 > q_{min}$ dove q_{95} = portata con freq. di superamento 0.95

altrimenti

$q_0 = 0.95\ q_{min}$

Il metodo dei momenti non è particolarmente efficiente, specie in relazione alla stima di q_0, che dipende dal momento del terzo ordine. Più robusto e diffuso (si veda Manciola, 1989) è il metodo di stima con i minimi quadrati, in cui q_0 sia determinato in precedenza con stima a priori.

Se si pone $q_0 = 0$ vale:

$$\ln(q) = \alpha + \beta * z$$

che è equivalente all'espressione di una variabile Normale standardizzata:

$$x = \mu(x) - \sigma(x) * u$$

in cui si è usato il segno negativo a rappresentare che x è considerata (così come q) ordinata in senso decrescente, per cui $z = -u$.

$\mu(x)$ e $\sigma(x)$ sono, rispettivamente, la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione stessa. Risulta quindi:

$$\alpha = \mu(\ln(q))$$

$$\beta = \sigma(\ln(q))$$

e, quindi, trattandosi di distribuzione di probabilità Log-Normale, vale la relazione tra media e scarto quadratico medio della variabile ln*(q)* con media e scarto quadratico medio della variabile originaria q, secondo:

$$\mu(\ln(q)) = \ln(\mu(q)) - \frac{1}{2}\sigma^2 \ln(q) = \ln(\mu(q)) - \frac{1}{2}\beta^2$$

Vale inoltre: $$\ln(\mu(q)) = \ln\frac{\mu(Q)}{\mu(Qm)} = \ln\frac{Qm}{\mu(Qm)} = \ln 1 = 0$$

per cui: $$\alpha = \mu(\ln(q)) = -\frac{1}{2}\beta^2$$

In assenza di dati direttamente osservati nella sezione di interesse, tale rappresentazione può consentire di costruire una curva di durata a partire dalla disponibilità della media e della varianza delle portate medie giornaliere, eventualmente rese disponibili da analisi statistiche regionali. Stimati infatti i valori Q_m e σ_Q i parametri α e β possono ottenersi come:

$$\beta = -\sqrt{\ln\left[1 + \frac{\sigma_Q^{\ 2}}{(Q_m)^2}\right]} \qquad \text{e} \qquad \alpha = -\frac{1}{2}\beta^2$$

$$C_d = \frac{\sqrt{\mu_2}}{A}.$$

Le curve di frequenza possono essere simmetriche rispetto all'ordinata massima, e in questo caso, come è evidente, la norma, la media e la mediana vengono a coincidere.

In altri casi (e sono quelli che particolarmente ci interessano) questa simmetria non esiste: e poiché lo scostamento dalla forma simmetrica può essere, anche a parità di dispersione, più o meno sentito, occorre definire numericamente anche questa seconda caratteristica di forma. Esistono di fatto diversi mezzi per dare una misura dello scostamento più o meno grande dalla forma simmetrica: ci limiteremo qui a considerarne uno solo, di struttura analoga alla (6), salvo l'impiego del momento di terzo ordine μ_3:

$$\mu_3 = \frac{\int_{X_1}^{X_2}(x-A)^3\varphi(x)\,dx}{\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\,dx}. \tag{7}$$

Così come sta, il parametro μ_3 non è bene adatto descrivere l'asimmetria della curva, in quanto, a parità di asimmetria, esso è tanto più elevato quanto più forte è la dispersione. Se però combiniamo i due momenti μ_2 e μ_3, nell'espressione

$$C_a = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{A^3 C_d^3} \tag{8}$$

otteniamo un parametro assai meglio adatto, e che presenta inoltre il grande vantaggio di essere, come C_d, adimensionale. Il coefficiente C_a definito dalla (8) prende il nome di *coefficiente di asimmetria* (o di obliquità); esso è nullo per le curve simmetriche (essendo in questo caso $\mu_3 = 0$) ed è tanto più grande quanto più la curva è lontana dalla forma simmetrica, cioè quanto più moda, mediana e media tendono a staccarsi una dall'altra.

LE CURVE CARATTERISTICHE DI DISTRIBUZIONE DELLE PORTATE E IL LORO IMPIEGO

90. - Le curve di frequenza relative alla portata dei corsi d'acqua sono limitate verso sinistra, dato che la variabile non può essere inferiore a zero; per quanto riguarda il ramo destro, è difficile assegnare a priori una portata che certamente non sarà superata, e molto spesso le curve si considerano asintotiche all'asse delle ascisse. Al di là di un certo limite l'area sottesa della curva è però molto piccola, tanto che (a parte le previsioni dei fenomeni rari di piena) è per noi indifferente considerare il ramo destro finito o infinito.

Conviene piuttosto osservare che di regola la forma è asimmetrica, con la portata normale (quella cioè più frequente) inferiore alla mediana, e questa a sua volta inferiore alla media. Ciò significa in sostanza che facendo una misura di portata a caso, è più probabile riscontrare una portata inferiore alla media piuttosto che superiore.

Nelle Figg. 100 e 101 sono riportate appunto curve del tipo che si presenta per le portate dei corsi d'acqua.

In un corso d'acqua a portata costante la curva di frequenza si schiaccerebbe nella stessa verticale baricentrica, e avrebbe coefficiente di dispersione C_d

nullo. In qualunque altro caso C_d è necessariamente diverso da zero. Tanto più il fiume è irregolare, quanto più cresce C_d, mentre contemporaneamente si riscontra, almeno come regola, un contemporaneo aumento del coefficiente di asimmetria C_a: così che la conoscenza numerica di questi due coefficienti offre un buon termine di confronto sulle caratteristiche dei diversi corsi di acqua e sulla loro attitudine più o meno buona a essere sfruttati industrialmente.

91. - Data una distribuzione di frequenza rappresentata dalla $y = \varphi(x)$, consideriamo la curva

$$\Phi(x) = \int_x^{X_2} \varphi(x)\,dx. \tag{9}$$

Per quanto si è già osservato al n. 88 essa misura la probabilità che la nostra variabile sia compresa fra un valore generico x e il suo massimo X_2: la probabilità cioè che la variabile sia *maggiore* di x. Questa curva si chiama *curva di durata* della x.

Un'altra curva strettamente legata alla precedente è la

$$\Psi(x) = \int_{X_1}^{x} \varphi(x)\,dx \tag{10}$$

che misura la probabilità che la variabile si sia riscontrata minore di x. Essa si chiama *curva dei complementi di durata*, per la proprietà, che scaturisce senz'altro dalla (3):

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \int_x^{X_2} \varphi(x)\,dx + \int_{X_1}^{x} \varphi(x)\,dx = 1$$

e, nel caso delle portate, esprimendo le frequenze e le durate in giorni dell'anno (n. 88):

$$\Phi(q) + \Psi(q) = 365.$$

Le curve ora considerate sono riprodotte nella Fig. 102. Tali curve, a causa della loro maggiore facilità di costruzione e d'impiego, si sostituiscono di regola alle curve di frequenza.

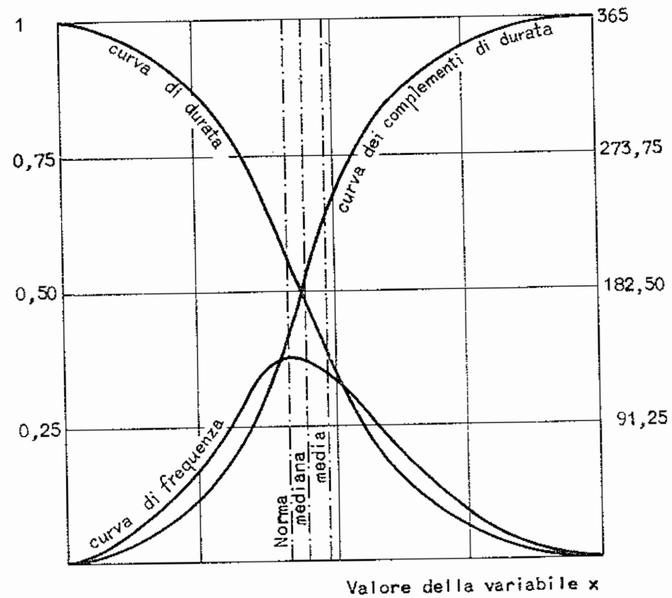


Fig. 102

92. - Le brevi premesse che precedono sono sufficienti per le applicazioni idrologiche che ci interessano.

Un periodo di osservazione abbastanza lungo nelle sezioni in cui pensiamo di fare una derivazione, ci permette di costruire una curva di durata delle portate riscontrate nella sezione stessa. Secondo le convenzioni adottate dal nostro Servizio Idrografico le curve di durata si tracciano invertendo le ascisse con le ordinate, portando cioè le portate in ordinata, e le rispettive durate in ascissa. Anziché da 0 a 1, l'asse delle durate va da 0 a 365, per avere un più comodo riferimento al periodo di un anno. Se all'ordinata q corrisponde un tempo t, significa che la durata q è t/365: che cioè per t giorni sui 365 di un anno si è avuto una portata non inferiore a q. Com'è evidente, a t = 0 corrisponderà una portata non inferiore a quella di massima piena, a t = 365 una portata non superiore alla massima magra (Fig. 103).

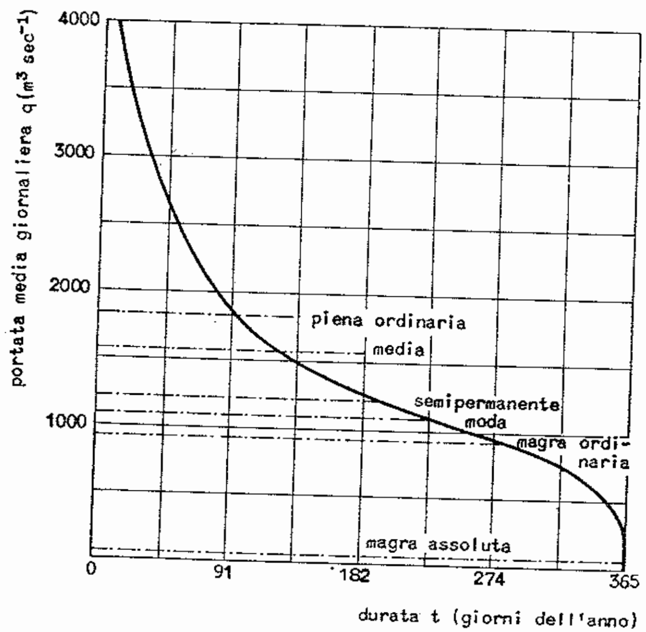


Fig. 103. - Curva di durata: Po a Pontelagoscuro (1918-1935).

La curva di Fig. 103 è evidentemente del massimo interesse nel nostro problema: se l'esperienza è abbastanza lunga, è lecito far riferimento alla nostra *curva di frequenza* di eventi passati come se coincidesse con la *curva di probabilità* di eventi futuri. Un tale assunto trae fondamento dalla nota "legge empirica del caso". Di tale legge, che ai nostri fini riveste importanza basilare, è bene conoscere i precisi termini, i quali servono a porre nella dovuta evidenza il significato e i limiti dei metodi statistici.

La legge empirica del caso si può enunciare in questi termini: in una serie di prove ripetute, la probabilità che un evento si manifesti con una frequenza uguale alla sua probabilità teorica tende ad uno (cioè alla certezza) con l'aumentare indefinito del numero delle prove. Si tratta, come si vede, di una "probabilità nella probabilità": non si può escludere che un ciclo di prove possa denunciare scarti comunque elevati fra la frequenza di un evento e la sua probabilità teorica; si afferma soltanto che, se le prove sono numerose, il fatto è pochissimo probabile. In sostanza, la fiducia da accordare a una curva di frequenza va espressa non in termini positivi, ma probabilistici.

Il fatto che, per un'esperienza abbastanza prolungata, è estremamente improbabile che la frequenza abbia valori sensibilmente diversi dalla probabilità ci permette di fare le nostre previsioni con tutta fiducia: possiamo cioè affermare che, una volta commisurata la derivazione a una certa portata q, cui corrisponde la durata t, risulterà, in media, che per t giorni dell'anno la portata q sarà effettivamente derivabile, mentre per il restante periodo di 365-t giorni l'impianto dovrà funzionare a carico ridotto, con una portata inferiore a q.

Come sappiamo già dai nn. 12 e 88, la portata q è espressa come portata media giornaliera: dato che il tempo è espresso in giorni, assume un importante significato l'area compresa fra la curva di durata $q = f(t)$ e l'asse dei tempi. Si riconosce infatti con un ragionamento analogo a quello del n. 88 che, espressa la q in m^3 al giorno, quest'area misura il volume complessivo V defluito durante l'anno:

$$V = \int_0^{365} q\,dt. \tag{11}$$

Ne segue che la portata media, o modulo del corso d'acqua, è l'ordinata di compenso della curva. Segue ancora che lo stesso integrale, esteso fra un valore generico t (cui corrisponde una certa portata q) e 365, rappresenta il contributo di volume V_t che dà il periodo di deflusso in cui la portata è inferiore a q:

$$V_t = \int_t^{365} q\,dt. \tag{12}$$

Anche nelle curve di durata si mettono in evidenza gli stessi elementi che interessano nelle curve di frequenza.

1. Ordinata di compenso della curva di durata, che definisce, come si è sopra osservato, la portata media o modulo del corso d'acqua.

2. Portata corrispondente all'ascissa 365/2, cioè la portata eguagliata o superata per mezzo anno. (Questo valore si è già definito come la mediana della distribuzione, ma in idrologia prende più spesso la denominazione di *portata semipermanente*.)

In aggiunta a queste il nostro Servizio Idrografico considera:

3. Portata che è stata superata in 75 giorni su 100 cioè corrispondente all'ascissa $3/4 \cdot 365$ (*portata di magra ordinaria*).

4. Portata corrispondente a 365/4 (*portata di piena ordinaria*).

Da ultimo si considerano, naturalmente, il minimo e il massimo di q, cioè la *massima magra assoluta* e la *massima piena assoluta* relative al periodo di osservazione considerato.

93. – Il volume derivabile durante l'anno da un impianto calcolato per una portata $\bar{q}$ si deduce facilmente dalla curva di frequenza.

Misuriamo al solito, le frequenze e le durate t in giorni, le portate q in m^3 al giorno. Sia

$$\bar{t} = \Phi(\bar{q})$$

la durata della portata di derivazione $\bar{q}$.

Per $\bar{t}$ giorni dell'anno l'impianto funziona in pieno, derivando il volume:

$$V_1 = \bar{q}\bar{t} = \bar{q}\,\Phi(\bar{q}).$$

Nei restanti $365-\bar{t}$ giorni, il contributo di tutte le portate inferiori a $\bar{q}$ vale, come abbiamo visto ai n. 88 e 92,

$$V_2 = \int_{x_1}^{x=\bar{q}} x\varphi(x)\,dx;$$

il volume complessivo derivato vale di conseguenza

$$V_{\bar{q}} = V_1 + V_2 = \bar{q}\,\Phi(\bar{q}) + \int_{x_1}^{x=\bar{q}} x\varphi(x)\,dx. \tag{13}$$

In modo ancor più immediato, lo stesso $V_{\bar{q}}$ si deduce dalla curva di durata riportata nel modo indicato nella Fig. 103.

Con riferimento alla Fig. 104, il volume V_1 è misurato dal rettangolo a tratteggio incrociato: il volume V_2 è uguale, secondo la (12), all'area a tratteggio semplice.

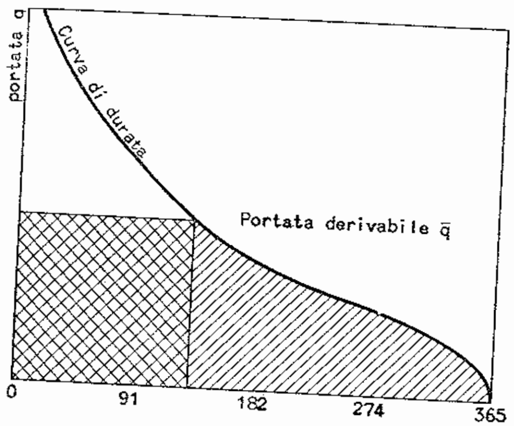


Fig. 104

Il volume complessivo, che comprende tutta l'area tratteggiata, vale evidentemente

(14) $$V_{\bar{q}} = \int_0^{\bar{q}} t\, dq\,.$$

Ciò posto, sia V_0 il complessivo volume disponibile nel corso d'acqua, uguale quindi al prodotto della portata media A (in m^3 al giorno) per i 365 giorni dell'anno. Il rapporto

(15) $$u_1(\bar{q}) = \frac{V_{\bar{q}}}{V_0}$$

è una funzione di $\bar{q}$ che misura il rapporto fra volume derivato e volume disponibile nel corso d'acqua. La curva che la rappresenta in funzione di q si chiama *curva delle portate medie industriali* (Coutagne) o *caratteristica idrologica dell'utilizzazione* (De Marchi); noi la chiameremo *curva di utilizzazione del corso d'acqua*, appunto perché fornisce la misura con cui sono sfruttate le disponibilità naturali.

Tanto più grande è $\bar{q}$, altrettanto più la (15) si avvicina all'unità; ma altrettanto peggio vengono sfruttate le opere di derivazione, in quanto si riduce sempre più il periodo di tempo in cui esse lavorano in pieno. Se la portata q fosse sempre disponibile, si deriverebbe il volume

$$\bar{V} = \bar{q} \cdot 365\,;$$

il rapporto

(16) $$u_2(\bar{q}) = \frac{V_{\bar{q}}}{\bar{V}}\,,$$

anch'esso funzione di $\bar{q}$, fornisce una curva che, per il suo ovvio significato, chiameremo *curva di utilizzazione dell'impianto*. È appena il caso di osservare che nessuno vieta di esprimere la u_2, anziché in unità razionali, in ore di utilizzazione nell'anno (vedi n. 2), sottointendendo il denominatore 8760: anzi, queste unità, più comode, sono impiegate molto spesso.

94. - Riportiamo nella Fig. 105 gli andamenti tipici delle tre curve che abbiamo imparato a costruire: curva di durata, curva di utilizzazione del corso d'acqua e dell'impianto. Come si usa spesso in pratica, nella Fig. 105 le portate sono indicate come rapporto rispetto al modulo A, ottenendo così il vantaggio che le diverse variabili in gioco sono tutte adimensionali.

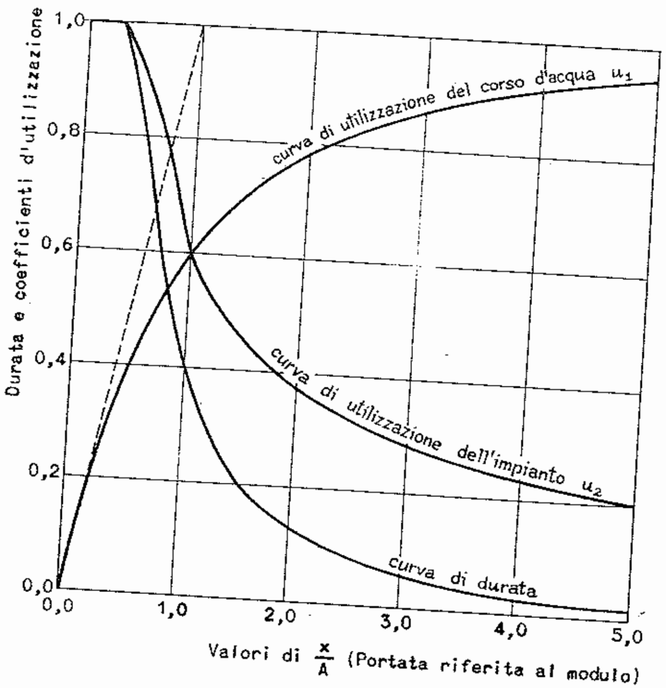


Fig. 105

Come risulta dalla sua stessa definizione, la curva di utilizzazione del corso d'acqua è costituita da una retta per l'origine nel campo delle portate comprese fra zero e la portata di massima magra: una tale retta raggiunge il valore $u_1 = 1$ per la portata media A. Superata la portata di magra, u_1 cresce meno rapidamente di x, raggiungendo il valore unitario per la portata di massima piena; se poi la portata di massima piena si considera infinitamente grande, la curva u_1 tende al valore 1 in modo asintotico. La curva u_2 di utilizzazione dell'impianto conserva, per la sua stessa definizione, valore costante uguale all'unità fino alla portata minima: poi diminuisce per tendere

asintoticamente allo zero quando la portata derivata tende all'infinito.

È chiaro che basta uno sguardo comprensivo alle curve u_1 e u_2 per rendersi conto delle attitudini di un corso d'acqua allo sfruttamento industriale. Nei corsi d'acqua regolari, cioè bene adatti, u_1 tende rapidamente al valore unitario, e altrettanto rapidamente u_2 tende allo zero; il contrario succede nei corsi d'acqua a forte irregolarità.

Dal punto di vista quantitativo, la contemporanea conoscenza delle tre curve della Fig. 105 permette di individuare per ogni valore della portata cui si proporziona la derivazione, le condizioni medie di funzionamento dell'impianto, per quanto riguarda sia la lunghezza del periodo di funzionamento a pieno carico, sia la percentuale derivata del complessivo volume disponibile, sia lo sfruttamento delle opere di utilizzazione (e quindi le ore di utilizzazione dell'impianto).

Il tecnico possiede a questo modo tutti gli elementi per fare gli opportuni confronti fra i due fattori essenziali di ogni impresa economica: spesa d'impianto, che si proporziona alla portata di derivazione e reddito dell'utilizzazione, che a sua volta dipende tanto dal volume complessivo derivato quanto dalla possibilità d'inquadrare la produzione d'energia, variabile durante l'anno, nel complesso produttivo in cui l'impianto entrerà a far parte. Sotto quest'ultimo punto di vista conviene osservare che la curva di durata non ci offre alcuna indicazione sulla successione delle portate stesse nel tempo. Essa fornisce soltanto uno dei dati che ci interessano, cioè il periodo di tempo in cui l'impianto può funzionare in pieno, indipendentemente dalla stagione o dalle stagioni in cui questo periodo viene a cadere. Per cono-